Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2013, 2, 65-73
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2013.22009 Published Online May 2013 (http://www.hanspub.org/journal/aam.html)

Epidemic Model with Vertical Transmission and Pulse Vaccination and Non-Monotonic Incidence Rate

Fengling Hong, Xia Wang, Weiping Yan

School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan
Email: hongfl666@163.com

Received Apr. 8th, 2013; revised Apr. 20th, 2013; accepted Apr. 30th, 2013

Abstract: In this paper, we investigate an SIRS epidemic model with vertical transmission and pulse vaccination and non-monotonic incidence rate. First, we obtain the condition for which the disease-free periodic solution of the epidemic model is globally asymptotically stable when $R_0 < 1$ and $b(1-p)-\gamma < 0$ by Floquet theorem, impulsive comparison theorem and iteration method. Second, permanence of this system is presented by comparison theorem.

Keywords: SIRS Epidemic Model; Non-Monotone Incidence Rate; Impulsive Vaccination; Vertical Transmission; Globally Asymptotically Stable

垂直传染脉冲免疫以及非单调发病率的传染病模型

洪凤玲，王　霞，闫卫平

山西大学数学科学学院，太原
Email: hongfl666@163.com

收稿日期：2013 年 4 月 8 日；修回日期：2013 年 4 月 20 日；录用日期：2013 年 4 月 30 日

摘　要：本文介绍了一类垂直传染带脉冲免疫以及非单调发病率的 SIRS 传染病模型，首先利用 Floquet 定理，脉冲比较定理以及迭代法给出了无病周期解的全局渐近稳定的条件，得出当 $R_0 < 1$ 且 $b(1-p)-\gamma < 0$ 时，无病平衡点是全局渐近稳定的结论。其次通过使用比较定理，证明了系统持续的充分条件。

关键词：SIRS 型传染病模型；非单调发病率；脉冲免疫；垂直传染；全局渐近稳定

1. 引言

传染病动力系统的研究已经有很长的历史，许多数学模型在疾病防预和控制方面起着重要作用。几年前，大部分学者在发病率上考虑传染病对人类的影响[1-4]。近来，许多学者开始在脉冲免疫传染病方面给出多个模型[5-10]。例如[10]研究了一类带脉冲免疫以及非单调发病率的 SIRS 传染病模型，给出了无病周期解全局吸引以及系统持续的充分条件。本文在前人的基础上，综合全局渐近稳定性以及系统的持续性的证明方法，给出了如下带垂直传染、脉冲免疫以及非单调发病率的传染病模型：

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}&\dot{S}(t)=b-\frac{\beta e^{-d\tau}S(t)I(t-\tau)}{1+\alpha I^2(t-\tau)}-dS(t)+b(1-p)I(t)+\gamma R(t)\\&\dot{I}(t)=\frac{\beta e^{-d\tau}S(t)I(t-\tau)}{1+\alpha I^2(t-\tau)}-(d+\mu)I(t)+bpI(t)\\&\dot{R}(t)=\mu I(t)-(d+\gamma)R(t)\end{aligned}\right\}t\neq nT\\ \left.\begin{aligned}&S(t^+)=(1-\theta)S(t)\\&I(t^+)=I(t)\\&R(t^+)=R(t)+\theta S(t)\end{aligned}\right\}t=nT\end{cases}\tag{1}$$

其中 $S(t),I(t),R(t)$ 分别为易感人群数，已感人群数和恢复人群数，b,d 分别为出生率和自然死亡率，β 为比例常量，μ 为已感人群的自然恢复率，γ 是恢复人群失去免疫力又重新变成易感人群的比例，α 是衡量传染效果的参数，τ 为疾病的时滞周期，p 为垂直传染率，θ 为疫苗免疫率。为简化模型，引入 $S(t)+I(t)+R(t)=A$，则 $R(t)=A-S(t)-I(t)$。故(1)可简化为

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}&\dot{S}(t)=b+A\gamma-\frac{\beta e^{-d\tau}S(t)I(t-\tau)}{1+\alpha I^2(t-\tau)}-(d+\gamma)S(t)+\left[b(1-p)-\gamma\right]I(t)\\&\dot{I}(t)=\frac{\beta e^{-d\tau}S(t)I(t-\tau)}{1+\alpha I^2(t-\tau)}-(d+\mu-bp)I(t)\end{aligned}\right\}t\neq nT\\ \left.\begin{aligned}&S(t^+)=(1-\theta)S(t)\\&I(t^+)=I(t)\end{aligned}\right\}t=nT\end{cases}\tag{2}$$

考虑生态因素，设初值 $\phi=(\varphi(\theta),\psi(\theta))\in C([-\tau,0],R_+^2)$, $\varphi(0)>0,\psi(0)>0$, $\varphi(0)+\psi(0)\le A$，其中

$$R_+^2=\left\{(u_1,u_2)\middle|u_1\ge 0,u_2\ge 0,u_1+u_2\le A\right\},$$

则模型(2)在集合 $\Omega=\left\{(S,I)\middle|0\le S,I\le A,S+I\le A\right\}$ 中是正向不变集。

本文组织如下：第二节中利用 Floquet 定理，脉冲比较定理以及迭代法给出了无病周期解的全局渐近稳定的条件，得出当 $R_0<1$ 且 $b(1-p)-\gamma<0$ 时，无病平衡点是全局渐近稳定的结论。第三节中通过使用比较定理，证明了系统持续的充分条件。

2. 无病解的渐近行为

引理 2.1[9] 假设 $x(t)=(S(t),I(t))$ 是(2)的带正初值的一个解，$S(0^+)\ge 0,I(0^+)\ge 0$，则有 $x(t)\ge 0,\forall t>0$。进一步，若 $S(0^+)>0,I(0^+)>0$，则 $x(t)>0,\forall t>0$。

下面研究(2)的无病子系统，此时 $I(t)=0$，则有

$$\begin{cases}\dot{S}(t)=b+A\gamma-(d+\gamma)S(t),t\neq nT,\\S(t^+)=(1-\theta)S(t),t=nT.\end{cases}\tag{3}$$

对此子系统，有如下引理：

引理 2.2 系统(3)存在一个正 T-周期解

$$\tilde{S}(t)=\frac{b+A\gamma}{d+\gamma}\left[1-\frac{\theta e^{(d+\gamma)T}}{e^{(d+\gamma)T}+\theta-1}e^{-(d+\gamma)(t-nT)}\right],\ nT<t\le(n+1)T$$

证明：由(3)的第一个方程$\dot{S}(t)+(d+\gamma)S(t)=b+A\gamma$，从$nT\to t$积分得

$$S(t)=\frac{b+A\gamma}{d+\gamma}+\left(S_{nT}-\frac{b+A\gamma}{d+\gamma}\right)\mathrm{e}^{-(d+\gamma)(t-nT)},\ nT<t\le(n+1)T$$

其中S_{nT}表示*n-th*脉冲之后的易感人群的数目。

由(3)的第二个方程可得：

$$S_{(n+1)T}=(1-\theta)\left[\frac{b+A\gamma}{d+\gamma}+\left(S_{nT}-\frac{b+A\gamma}{d+\gamma}\right)\mathrm{e}^{-(d+\gamma)T}\right]$$

记不动点为S^*，则

$$S^*=(1-\theta)\left[\frac{b+A\gamma}{d+\gamma}+\left(S^*-\frac{b+A\gamma}{d+\gamma}\right)\mathrm{e}^{-(d+\gamma)T}\right]$$

解得$S^*=\dfrac{(1-\theta)\dfrac{b+A\gamma}{d+\gamma}\left(\mathrm{e}^{(d+\gamma)T}-1\right)}{\mathrm{e}^{(d+\gamma)T}+\theta-1}$。

将S^*代回到前面$S(t)$中，替代S_{nT}，有

$$\tilde{s}(t)=\frac{b+A\gamma}{d+\gamma}\left[1-\frac{\theta\mathrm{e}^{(d+\gamma)T}}{\mathrm{e}^{(d+\gamma)T}+\theta-1}\mathrm{e}^{-(d+\gamma)(t-nT)}\right],\ nT<t\le(n+1)T$$

故系统(3)存在一个正T-周期解。证毕。

引理 2.3[7] 考虑方程$\dot{x}(t)=a_1x(t-\omega)-a_2x(t)$，其中$a_1,a_2,\omega>0$，当$-\omega\le t\le 0$时，$x(t)>0$，则有：1) 若$a_1<a_2$，则$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$；2) 若$a_1>a_2$，则$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=+\infty$。

对于给定初值$S(0^+)\ge 0, I(0^+)\ge 0$的解，定义

$$R_0=\frac{\beta\mathrm{e}^{-d\tau}(b+A\gamma)}{(d+\mu-bp)(d+\gamma)}\left[1-\frac{\theta\mathrm{e}^{(d+\gamma)T}}{\left(\mathrm{e}^{(d+\gamma)T}+\theta-1\right)(b+A\gamma)T}\left(1-\mathrm{e}^{-(d+\gamma)T}\right)\right]$$

定理 1 若$R_0<1$，则系统(2)的无病周期解$\left(\tilde{S}(t),0\right)$是局部渐近稳定的。若$R_0>1$，则$\left(\tilde{S}(t),0\right)$是不稳定的。$R_0=1$是临界值。

证明：令$x(t)=S(t)-\tilde{S}(t), y(t)=I(t)$则系统(2)可变为如下等价系统：

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}\dot{x}(t)&=-\frac{\beta\mathrm{e}^{-d\tau}x(t)y(t-\tau)+\beta\mathrm{e}^{-d\tau}\tilde{S}(t)y(t-\tau)}{1+\alpha y^2(t-\tau)}-(d+\gamma)x(t)+\left[b(1-p)-\gamma\right]y(t)\\ \dot{y}(t)&=\frac{\beta\mathrm{e}^{-d\tau}x(t)y(t-\tau)+\beta\mathrm{e}^{-d\tau}\tilde{S}(t)y(t-\tau)}{1+\alpha y^2(t-\tau)}-(d+\mu-bp)y(t)\end{aligned}\right\}t\ne nT\\ \left.\begin{aligned}x(t^+)&=(1-\theta)x(t)\\ y(t^+)&=y(t)\end{aligned}\right\}t=nT\end{cases}\tag{4}$$

系统(2)的无病周期解$\left(\tilde{S}(t),0\right)$等价于(4)的零解，(4)在零点处的线性系统为

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}\dot{x}(t)&=-(d+\gamma)x(t)+\left[\beta\mathrm{e}^{-d\tau}\tilde{S}(t)\mathrm{e}^{-\lambda\tau}+b(1-p)-\gamma\right]y(t)\\ \dot{y}(t)&=\left[\beta\mathrm{e}^{-d\tau}\tilde{S}(t)\mathrm{e}^{-\lambda\tau}-(d+\mu-bp)\right]y(t)\end{aligned}\right\}t\ne nT\\ \left.\begin{aligned}x(t^+)&=(1-\theta)x(t)\\ y(t^+)&=y(t)\end{aligned}\right\}t=nT\end{cases}\tag{5}$$

定义 $A(t)=\begin{pmatrix} -(d+\gamma) & \beta e^{-d\tau}\tilde{S}(t)e^{-\lambda\tau}+b(1-p)-\gamma \\ 0 & \beta e^{-d\tau}\tilde{S}(t)e^{-\lambda\tau}-(d+\mu-bp) \end{pmatrix}$，$B(t)=\begin{pmatrix} 1-\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则(5)的单值矩阵为

$$M(T)=B(t)e^{\int_0^T A(t)dt}=\begin{pmatrix} 1-\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-(d+\gamma)T} & * \\ 0 & e^{\int_0^T\left[\beta e^{-d\tau}\tilde{S}(t)e^{-\lambda\tau}-(d+\mu-bp)\right]dt} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1-\theta)e^{-(d+\gamma)T} & * \\ 0 & e^{\int_0^T\left[\beta e^{-d\tau}\tilde{S}(t)e^{-\lambda\tau}-(d+\mu-bp)\right]dt} \end{pmatrix}$$

因为不需要后面的分析，故无需计算项$*$的精确值。$M(T)$有两个实特征值$\lambda_1=(1-\theta)e^{-(d+\gamma)T}<1$，$\lambda_2=e^{\int_0^T\left[\beta e^{-d\tau}\tilde{S}(t)e^{-\lambda\tau}-(d+\mu-bp)\right]dt}$。故由 Floquet 定理，若$\lambda_2<1$，则系统(2)的无病周期解$(\tilde{S}(t),0)$是局部渐近稳定的，即$\int_0^T\left[\beta e^{-d\tau}\tilde{S}(t)e^{-\lambda\tau}-(d+\mu-bp)\right]dt<0$，等价于$R_0<1$。若$R_0>1$，则$(\tilde{S}(t),0)$是不稳定的。

定理 2 若$R_0<1$，且$b(1-p)-\gamma<0$，则系统(2)的无病周期解$(\tilde{S}(t),0)$是全局渐近稳定的，即$\lim_{t\to\infty}S(t)=\tilde{S}(t),\lim_{t\to\infty}I(t)=0$。

证明：由条件$R_0<1$可知，存在足够小的$\varepsilon_1>0$，使得$\frac{1}{T}\int_0^T(\tilde{S}(t)+\varepsilon_1)dt<\frac{d+\mu-bp}{\beta e^{-(d+\lambda)\tau}}$，则由(2)的第一个方程有$\dot{S}(t)\le(b+A\gamma)-(d+\gamma)S(t)$。

考虑脉冲比较系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=(b+A\gamma)-(d+\gamma)x(t), t\ne nT \\ x(t^+)=(1-\theta)x(t), t=nT \end{cases} \tag{6}$$

对脉冲比较系统(6)的第一个方程从$nT\to t$积分，得解$x(t)=\frac{b+A\gamma}{d+\gamma}+\left[x(nT)-\frac{b+A\gamma}{d+\gamma}\right]e^{-(d+\gamma)(t-nT)}$。

由(6)的第二个方程，有

$$x((n+1)T)=(1-\theta)\left[\frac{b+A\gamma}{d+\gamma}+\left(x(nT)-\frac{b+A\gamma}{d+\gamma}\right)e^{-(d+\gamma)T}\right] \tag{7}$$

方程(7)有唯一的正不动点$\bar{x}=\frac{(b+A\gamma)(1-\theta)\left(e^{(d+\gamma)T}-1\right)}{(d+\gamma)\left(e^{(d+\gamma)T}+\theta-1\right)}$。

方程(7)可改写为如下形式：$x_{(n+1)T}=g+\bar{g}x_{nT}$，其中$g=(1-\theta)\frac{b+A\gamma}{d+\gamma}\left(1-e^{-(d+\gamma)T}\right),\bar{g}=(1-\theta)e^{-(d+\gamma)T}$。

由迭代法，可得：

$$\begin{aligned} x_{(n+1)T}&=g+\bar{g}x_{nT}=g+\bar{g}\left(g+\bar{g}x_{(n+1)T}\right)=g(1+\bar{g})+\bar{g}^2x_{(n-1)T} \\ &=\cdots=g\left(1+\bar{g}+\bar{g}^2+\cdots+\bar{g}^n\right)+\bar{g}^{n+1}x_0 \\ &=g\frac{1-\bar{g}^{n+1}}{1-\bar{g}}+\bar{g}^{n+1}x_0, x_0=x(0^+)>0 \end{aligned}$$

由$0<\bar{g}<1$可知，

$$\lim_{n\to\infty}x_{(n+1)T}=\frac{g}{1-\bar{g}}=\frac{(1-\theta)\frac{b+A\gamma}{d+\gamma}\left(1-e^{-(d+\gamma)T}\right)}{1-(1-\theta)e^{-(d+\gamma)T}}=\frac{(b+A\gamma)(1-\theta)\left(e^{(d+\gamma)T}-1\right)}{(d+\gamma)\left(e^{(d+\gamma)T}+\theta-1\right)}=\bar{x}$$

即$\bar{x}$是全局渐近稳定的。因此，系统(7)的周期解

$$\tilde{x}(t)=\frac{b+A\gamma}{d+\gamma}-\frac{b+A\gamma}{d+\gamma}\cdot\frac{\theta\mathrm{e}^{(d+\gamma)T}}{\mathrm{e}^{(d+\gamma)T}+\theta-1}\mathrm{e}^{-(d+\gamma)(t-nT)}=\frac{b+A\gamma}{d+\gamma}\left[1-\frac{\theta\mathrm{e}^{(d+\gamma)T}}{\mathrm{e}^{(d+\gamma)T}+\theta-1}\mathrm{e}^{-(d+\gamma)(t-nT)}\right],nT<T\le(n+1)T$$

是全局渐近稳定的。

假设 $x(t)$ 是满足初值条件 $x_0=x(0^+)>0$ 系统(6)的任意解，由脉冲微分方程比较定理可知，对(2)的满足初值条件 $S_0=S(0^+)=x_0,I_0=I(0^+)>0$ 的一个解 $(S(t),I(t))$ 一定存在一个非负整数 m_1，使得 $S(t)<\tilde{x}(t)+\varepsilon_1,nT<t\le(n+1)T,nT>m_1T$，即 $S(t)<\tilde{S}(t)+\varepsilon_1,nT<t\le(n+1)T,nT>m_1T$。

由(2)的第二个方程可得：

$$\dot{I}(t)\le\beta\mathrm{e}^{-d\tau}\left(\tilde{S}(t)+\varepsilon_1\right)I(t-\tau)-(d+\mu-bp)I(t),\ t>nT>m_1T$$

考虑脉冲比较系统

$$\begin{cases}\dot{y}(t)=\beta\mathrm{e}^{-d\tau}\left(\tilde{S}(t)+\varepsilon_1\right)y(t-\tau)-(d+\mu-bp)y(t),t\ne nT,\\ y(t^+)=y(t),t=nT.\end{cases}\tag{8}$$

由 $R_0<1$ 易知 $\beta\mathrm{e}^{-d\tau}\left(\tilde{S}(t)+\varepsilon_1\right)<d+\mu-bp$，故由引理 2.3 可知 $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$。假设 $(S(t),I(t))$ 是(2)的一个解，满足初值 $S_0=S(0^+)>0,I_0=I(0^+)=y_0>0$，由脉冲微分方程比较定理，有 $\limsup\limits_{t\to\infty}I(t)\le\limsup\limits_{t\to\infty}y(t)=0$。又 $I(t)>0$，因此 $\lim\limits_{t\to\infty}I(t)=0$。

故对 $\forall\varepsilon_2>0$，必存在一个非负整数 $m_2>m_1$，使得 $I(t)<\varepsilon_2,t>m_2T>m_1T$。

由(2)的第一个方程有

$$\begin{aligned}\dot{S}(t)&\ge b+A\gamma-\beta\mathrm{e}^{-d\tau}S(t)\varepsilon_2-(d+\gamma)S(t)+\left[b(1-p)-\gamma\right]\varepsilon_2>b+A\gamma-\beta\mathrm{e}^{-d\tau}A\varepsilon_2-(d+\gamma)S(t)+\left[b(1-p)-\gamma\right]\varepsilon_2\\&=(b+A\gamma)-\left[A\beta\mathrm{e}^{-d\tau}+\gamma-b(1-p)\right]\varepsilon_2-(d+\gamma)S(t)\end{aligned}$$

当 $t>m_2T$，考虑如下比较系统

$$\begin{cases}\dot{z}(t)=(b+A\gamma)-\left[A\beta\mathrm{e}^{-d\tau}+\gamma-b(1-p)\right]\varepsilon_2-(d+\gamma)z(t),t\ne nT\\ z(t^+)=(1-m)z(t),t=nT\end{cases}\tag{9}$$

方法同系统(6)，易知系统(9)有一个全局渐近稳定的周期解

$$\tilde{z}(t)=\frac{b+A\gamma-\left[A\beta\mathrm{e}^{-d\tau}+\gamma-b(1-p)\right]\varepsilon_2}{d+\gamma}\left[1-\frac{m\mathrm{e}^{(d+\gamma)T}\cdot\mathrm{e}^{-(d+\gamma)(t-nT)}}{\mathrm{e}^{(d+\gamma)T}+m-1}\right]$$

假设 $z(t)$ 是(9)的一个解满足初值 $z_0=z(0^+)>0$，则对(2)的任意解 $(S(t),I(t))$，满足初值 $S_0=S(0^+)=z_0>0,I_0=I(0^+)>0$，必存在一个非负整数 $m_3>m_2>m_1$，使得

$$S(t)>\tilde{z}(t)-\varepsilon_2,nT<t\le(n+1)T,nT>m_3T$$

故对任意的 ε_1 和 ε_2，

$$\tilde{S}(t)=\frac{b+A\gamma}{d+\gamma}\left[1-\frac{\theta\mathrm{e}^{(d+\gamma)T}}{\mathrm{e}^{(d+\gamma)T}+\theta-1}\mathrm{e}^{-(d+\gamma)(t-nT)}\right],nT<t\le(n+1)T$$

是全局吸引的，因此系统(2)的无病周期解 $\left(\tilde{S}(t),0\right)$ 是全局渐近稳定的。

3. 持续性

在本节中，我们将证明系统(2)的持续性。

定义 3.1 若存在正常数m, M以及t_0，使得当$t > t_0$时，在初值条件下，系统(2)的每一个正解$\left(S(t), I(t)\right)$满足$m \le S(t) \le M, m \le I(t) \le M$，则称系统(2)是持续的。

定义$S_0^* = \dfrac{\left(1+\alpha A^2\right)\left(d+\mu-bp\right)}{\beta \mathrm{e}^{-d\tau}}$，$R_* = \dfrac{A\beta \mathrm{e}^{-d\tau}\left(1-\theta\right)}{\left(d+\mu-bp\right)\left(1+\alpha A^2\right)} \dfrac{1-\mathrm{e}^{-(d+\gamma)T}}{1-\left(1-\theta\right)\mathrm{e}^{-(d+\gamma)T}} = R_0^* \dfrac{1-\theta}{1+\alpha A^2}$

其中

$$R_0^* = \frac{A\beta \mathrm{e}^{-d\tau}}{d+\mu-bp} \frac{1-\mathrm{e}^{-(d+\gamma)T}}{1-\left(1-\theta\right)\mathrm{e}^{-(d+\gamma)T}},\ \tilde{\eta} = \frac{A\left(d+\gamma\right)\left(R_*-1\right)}{R_*\left(\beta \mathrm{e}^{-d\tau}A+\gamma\right)}$$

引理 3.1[10] 考虑如下脉冲微分方程

$$\begin{cases} \dot{u} = a - bu(t), t \ne nT, \\ u\left(t^+\right) = \left(1-\xi\right)u(t), t = nT \end{cases}$$

其中$a, b > 0, 0 < \xi < 1$，则该系统有唯一的全局渐近稳定正周期解

$$\tilde{u}(t) = \frac{a}{b} + \left(u^* - \frac{a}{b}\right)\mathrm{e}^{-b(t-nT)} = \frac{a}{b}\left(1 - \frac{\xi \mathrm{e}^{-b(t-nT)}}{1-\left(1-\xi\right)\mathrm{e}^{-bT}}\right),\ nT < t \le (n+1)T$$

其中$u^* = \dfrac{a}{b}\dfrac{\left(1-\xi\right)\left(1-\mathrm{e}^{-bT}\right)}{1-\left(1-\xi\right)\mathrm{e}^{-bT}}$。

引理 3.2 若$R_* > 1$，则存在一个常数$\rho : 0 < \rho < 1$，使得$\liminf\limits_{t\to\infty} I(t) \ge \min\left\{\dfrac{\beta\tilde{\eta}}{2}, \rho\tilde{\eta}\mathrm{e}^{-(d+\mu-bp)\tau}\right\} \equiv m_I$。

证明：令$\left(S(t), I(t)\right)$是系统(2)在初值条件下的任意一个解，对$t \ge 0$，定义微分函数$V(t)$如下：

$$V(t) = I(t) + \beta \mathrm{e}^{-d\tau} S_0^* \int_{t-\tau}^{t} \frac{I(\theta)}{1+\alpha I^2(\theta)} \mathrm{d}\theta$$

则$V(t)$的导数满足

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{I}(t) + \beta \mathrm{e}^{-d\tau} S_0^* \frac{I(t)}{1+\alpha I^2(t)} - \beta \mathrm{e}^{-d\tau} S_0^* \frac{I(t-\tau)}{1+\alpha I^2(t-\tau)} \\ &= \beta \mathrm{e}^{-d\tau}\left(S(t) - S_0^*\right)\frac{I(t-\tau)}{1+\alpha I^2(t-\tau)} + \left[\beta \mathrm{e}^{-d\tau} S_0^* \frac{1}{1+\alpha I^2(t)} - \left(d+\mu-bp\right)\right] I(t) \\ &\ge \beta \mathrm{e}^{-d\tau}\left(S(t) - S_0^*\right)\frac{I(t-\tau)}{1+\alpha I^2(t-\tau)} + \left[\beta \mathrm{e}^{-d\tau} S_0^* \frac{1}{1+\alpha A^2} - \left(d+\mu-bp\right)\right] I(t) \\ &\ge \beta \mathrm{e}^{-d\tau}\left(S(t) - S_0^*\right)\frac{I(t-\tau)}{1+\alpha I^2(t-\tau)}, t \ge 0 \end{aligned}$$

由于$R_* > 1$，则$\tilde{\eta} > 0$，对任意的$\rho : 0 < \rho < 1$，有

$$S_0^* < \frac{b + A\gamma - \left(\beta \mathrm{e}^{-d\tau}A + \gamma - b\left(1-p\right)\right)\rho\tilde{\eta}}{d+\gamma} \frac{\left(1-\theta\right)\left(1-\mathrm{e}^{-(d+\gamma)T}\right)}{1-\left(1-\theta\right)\mathrm{e}^{-(d+\gamma)T}}$$

则存在一个充分小的正常数ε，使得

$$S_0^* \le \frac{b+A\gamma-\left(\beta e^{-d\tau}A+\gamma-b(1-p)\right)\rho\tilde{\eta}}{d+\gamma}\frac{(1-\theta)\left(1-e^{-(d+\gamma)T}\right)}{1-(1-\theta)e^{-(d+\gamma)T}}-\varepsilon \equiv S_\Delta$$

下面证明存在 $m_I>0$ 和一个充分大的 t_0，使得对任意的 $t>t_0$，有 $I(t)\ge m_I$。

首先，对所有的 $t>t_0, I(t)<\rho\tilde{\eta}$ 是不可能的。否则，对所有的 $t>t_0, I(t)<\rho\tilde{\eta}$。

由(2)的第一个方程，有 $\dot{S}(t)\ge b+A\gamma-\left[\beta e^{-d\tau}A+\gamma-b(1-p)\right]\rho\tilde{\eta}-(d+\gamma)S(t)$，对 $t>t_0$，考虑如下脉冲比较系统，有

$$\begin{cases}\dot{v}(t)=b+A\gamma-\left[\beta e^{-d\tau}A+\gamma-b(1-p)\right]\rho\tilde{\eta}-(d+\gamma)v(t), t\ne nT\\ v(t^+)=(1-\theta)v(t), t=nT\end{cases} \tag{10}$$

由引理 3.1 可得，(10)存在一个全局渐近稳定的正周期解

$$\tilde{v}(t)=\frac{b+A\gamma-\left[\beta e^{-d\tau}A+\gamma-b(1-p)\right]\rho\tilde{\eta}}{d+\gamma}+\left(v^*-\frac{b+A\gamma-\left[\beta e^{-d\tau}A+\gamma-b(1-p)\right]\rho\tilde{\eta}}{d+\gamma}\right)e^{-(d+\gamma)(t-nT)}$$

其中

$$v^*=\frac{b+A\gamma-\left[\beta e^{-d\tau}A+\gamma-b(1-p)\right]\rho\tilde{\eta}}{d+\gamma}\frac{(1-\theta)\left(1-e^{-(d+\gamma)T}\right)}{1-(1-\theta)e^{-(d+\gamma)T}}$$

由比较定理，存在 $t_1>t_0$ 以及 ε，使得当 $t>t_1$ 时有如下不等式成立：

$$S(t)\ge v>\tilde{v}(t)-\varepsilon>v^*-\varepsilon=\frac{b+A\gamma-\left[\beta e^{-d\tau}A+\gamma-b(1-p)\right]\rho\tilde{\eta}}{d+\gamma}\frac{(1-\theta)\left(1-e^{-(d+\gamma)T}\right)}{1-(1-\theta)e^{-(d+\gamma)T}}-\varepsilon \triangleq S_\Delta>S_0^*. \tag{11}$$

则由(11)，对 $t>t_1$，有

$$\dot{V}(t)\ge\beta e^{-d\tau}\left(S(t)-S_0^*\right)\frac{I(t-\tau)}{1+\alpha I^2(t-\tau)}>\beta e^{-d\tau}\left(S_\Delta-S_0^*\right)\frac{I(t-\tau)}{1+\alpha I^2(t-\tau)}。$$

定义 $h=\min\limits_{t\in[t_1,t_1+\tau]}I(t)$，则对所有 $t\ge t_1$，有 $I(t)\ge h$。否则，存在 $t_2\ge t_1+\tau$，使得 $I(t_2)=h, \dot{I}(t_2)\le 0$，且 $I(t)\ge I(t_2), t_1\le t\le t_2$。此时

$$\dot{I}(t_2)=\frac{\beta e^{-d\tau}S(t_2)I(t_2-\tau)}{1+\alpha I^2(t_2-\tau)}-(d+\mu-bp)I(t_2)>\frac{\beta e^{-d\tau}S_\Delta h}{1+\alpha A^2}-(d+\mu-bp)h=(d+\mu-bp)h\left[\frac{S_\Delta}{S_0^*}-1\right]>0$$

与 $\dot{I}(t_2)\le 0$ 矛盾。因此，当 $t\ge t_1$，有 $I(t)\ge h>0$。故对所有的 $t\ge t_1+\tau$，有 $\dot{V}(t)>\beta e^{-d\tau}\left(S_\Delta-S_0^*\right)\frac{h}{1+\alpha A^2}>0$，当 $t\to\infty$ 时，$V(t)\to\infty$，与 $V(t)<A+\beta e^{-d\tau}S_0^*A\tau$ 矛盾！

由以上可知，对所有的 $t>t_0, I(t)<\rho\tilde{\eta}$ 是不可能的，即 $I(t)\ge\rho\tilde{\eta}, t>t_0$。

因此，对于系统(2)的正解 $(S(t), I(t))$ 有两种情形可被考虑：

首先，当 t 足够大时，$I(t)\ge\rho\tilde{\eta}$；第二，当 t 足够大时，关于 $\rho\tilde{\eta}$，$I(t)$ 振动。

在第一种情形，$I(t)\ge\tilde{\eta}$，这是我们想要的，此处 $m_I=\rho\tilde{\eta}$。

对于第二种情形，假设 $I(t^*)=I(t^*+\lambda)=\rho\tilde{\eta}$ 且 $I(t)\le\rho\tilde{\eta}, t^*\le t\le t^*+\lambda$，因为(2)的正解是一致有界的且 $I(t)$ 不被脉冲影响，$I(t)$ 是一致连续的，因此，存在一个 $0<t_c<\tau$ (与 t^* 的选择独立)，使得 $I(t)\ge\frac{\tilde{\eta}}{2}, t^*\le t\le t^*+t_c$。若 $\lambda\le t_c$ 则证明完成。若 $t_c<\lambda\le\tau$，由(2)的第二个方程，有 $\dot{I}(t)\ge-(d+\mu-bp)I(t), t^*\le t\le t^*+\lambda$，则有

$$I(t)\ge\rho\tilde{\eta}\mathrm{e}^{-(d+\mu-bp)\tau},t^*\le t\le t^*+\lambda\le t^*+\tau 。$$

若$\lambda>\tau$，则$I(t)\ge\rho\tilde{\eta}\mathrm{e}^{-(d+\mu-bp)\tau},t^*\le t\le t^*+\tau$。

综上可知，$I(t)\ge\rho\tilde{\eta}\mathrm{e}^{-(d+\mu-bp)\tau},t^*+\tau\le t\le t^*+\lambda$。

若上述结论不成立，则存在一个$t_3>t^*+\tau$，使得$I(t)\ge\rho\tilde{\eta}\mathrm{e}^{-(d+\mu-bp)\tau},t^*\le t\le t_3,I(t_3)=\rho\tilde{\eta}\mathrm{e}^{-(d+\mu-bp)\tau}$，且$\dot{I}(t_3)\le 0$。当$t^*$足够大时，不等式$S(t)>S_\Delta,t^*\le t\le t^*+\lambda$成立。

另一方面，由(2)的第二个方程，有

$$\dot{I}(t_3)\ge(d+\mu-bp)\left[\frac{\beta\mathrm{e}^{-d\tau}S_\Delta}{(1+\alpha A^2)(d+\mu-bp)}-1\right]\rho\tilde{\eta}\mathrm{e}^{-(d+\mu-bp)\tau}=(d+\mu-bp)\left[\frac{S_\Delta}{S_0^*}-1\right]\rho\tilde{\eta}\mathrm{e}^{-(d+\mu-bp)\tau}>0$$

与$\dot{I}(t_3)\le 0$矛盾。因此，$I(t)\ge\rho\tilde{\eta}\mathrm{e}^{-(d+\mu-bp)\tau},t^*+\tau\le t\le t^*+\lambda$。

因为m_I的选择是独立的，当t充分大时，有$I(t)\ge m_I$。引理3.2得证。

定理3 当$R_*>1$且$b(1-p)-\gamma<0$时，系统(2)是持续的。

证明： 记$(S(t),I(t))$是系统(2)的带初值的任意一个解，由系统(2)的第一个方程可知，

$$\dot{S}(t)\ge b+A\gamma-\left(\beta\mathrm{e}^{-d\tau}A+d+\gamma\right)S(t)+\left[b(1-p)-\gamma\right]A=b\left[1+(1-p)A\right]-\left(\beta\mathrm{e}^{-d\tau}A+d+\gamma\right)S(t)$$

考虑如下比较方程

$$\begin{cases}\dot{z}(t)=b\left[1+(1-p)A\right]-\left(\beta\mathrm{e}^{-d\tau}A+d+\gamma\right)z(t),t\ne nT\\ z(t^+)=(1-\theta)z(t),t=nT\end{cases}$$

与系统(6)的证明相似，对任意充分小的$\varepsilon>0$，存在t_0 (t_0充分大)，使得

$$S(t)\ge z(t)>\tilde{z}(t)-\varepsilon\ge\frac{b\left[1+(1-p)A\right]}{\beta\mathrm{e}^{-d\tau}A+d+\gamma}\left(1-\frac{\theta\mathrm{e}^{-\left(\beta\mathrm{e}^{-d\tau}A+d+\gamma\right)(t-nT)}}{1-(1-\theta)\mathrm{e}^{-\left(\beta\mathrm{e}^{-d\tau}A+d+\gamma\right)T}}\right)-\varepsilon$$

$$\ge\frac{b\left[1+(1-p)A\right]}{\beta\mathrm{e}^{-d\tau}A+d+\gamma}\frac{(1-\theta)\left(1-\mathrm{e}^{-\left(\beta\mathrm{e}^{-d\tau}A+d+\gamma\right)T}\right)}{1-(1-\theta)\mathrm{e}^{-\left(\beta\mathrm{e}^{-d\tau}A+d+\gamma\right)T}}-\varepsilon\triangleq m_s>0$$

令$D=\left\{(S,I)\in R^2\middle|m_s\le S(t)\le A,m_I\le I(t)\le A\right\}$，由引理3.2且$\lim\limits_{t\to\infty}S(t)\ge m_s$，可知集合$D$在$R_+^2$是全局吸引的。

4. 致谢

本论文是在闫卫平老师悉心指导和王霞同学的批评指正下完成的，在此论文发表之际向我的导师和朋友致以深深地敬意和衷心的感谢，同时也感谢《应用数学进展》各位老师对本文提出的宝贵建议，祝愿《应用数学进展》越办越好。

参考文献 (References)

[1] H.-F. Huo, Z.-P. Ma. Dynamics of a delayed epidemic model with non-monotonic incidence rate. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010, 15(2): 459-486.

[2] Y. Muroya, Y. Enatsu and Y. Nakata. Global stability of a delayed SIRS epidemic model with a non-monotonic incidence rate. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2011, 377(1): 1-14.

[3] R. Xu, Z. E. Ma. Global stability of a SIR epidemic model with nonlinear incidence rate and time delay. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2009, 10(5): 3175-3189.

[4] D. M. Xiao, S. G. Ruan. Global analysis of an epidemic model with nonmonotone incidence rate. Mathematical Biosciences, 2007, 208(2): 419-429.
[5] B. Shulgin, L. Stone and Z. Agur. Pulse vaccination strategy in the SIR epidemic model. Bulletin of Mathematical Biology, 1998, 60(6): 1123-1148.
[6] L. Stone, B. Shulgin and Z. Agur. Theoretical examination of the pulse vaccination policy in the SIR epidemic model. Mathematical and Computer Modelling, 2000, 31(4-5): 207-215.
[7] S. J. Gao, L. S. Chen, J. J. Nieto and A. Torres. Analysis of a delayed epidemic model with pulse vaccination and saturation incidence. Vaccine, 2006, 24(35-36): 6037-6045.
[8] Y. C. Zhou, H. W. Lin. Stability of periodic solutions for an SIR model with pulse vaccination. Mathematical and Computer Modelling, 2003, 38: 299-308.
[9] Y. Song. Asymptotical behavior of SIR epidemic models with vertical transmission and Impulsive Vaccination. International Conference on Computer Application and System Modeling (ICCASM2010), Taiyuan, 22-24 October 2010: V1-92-V1-95.
[10] X. B. Zhang, H. F. Huo, H. Xiang and X. Y. Meng. An SIRS epidemic model with pulse vaccination and non-monotonic incidence rate. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2013, 8: 13-21.

