Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2014, 3, 155-159**
Published Online November 2014 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2014.34023

Generalization of Deng's Pseudo-Metric on the Lattices

Peng Chen[1,2*], Feifei Guo[1]

[1]Mathematics and Statistics Institute, Henan University of Science and Technology, Luoyang
[2]College of Applied Science, Beijing University of Technology, Beijing
Email: *chenpengbeijing@sina.com

Received: Mar. 2nd, 2014; revised: Sep. 12th, 2014; accepted: Sep. 29th, 2014

Abstract

In this paper, we research some properties of Deng's pseudo-metric, and show an equivalent form of its axioms. Therefore, we generalize Deng's pseudo-metric from I^X to completely distributive lattice L^X。

Keywords

Deng's Pseudo-Metric; Shi's Pseudo-Metric, Fuzzy Point, L^X Completely Distributive Lattice

Deng式伪度量在格上的推广

陈　鹏[1,2*]，郭飞飞[1]

[1]河南科技大学，数学与统计学院，洛阳
[2]北京工业大学，应用数理学院，北京
Email: *chenpengbeijing@sina.com

收稿日期：2014年3月2日；修回日期：2014年9月12日；录用日期：2014年9月29日

摘　要

本文研究了Deng式伪度量的一些性质，并给出了它的一种等价形式，由此把定义在I^X上的Deng式伪度

*通讯作者。

量推广到完全分配格 L^X 上。

关键词

Deng伪度量，Shi伪度量，模糊点； L^X 完全分配格

1. 引言和预备

格上度量是格上拓扑学研究的重要内容，国外 Erceg M.A.在上世纪 70 年代末给出了较经典的 Erceg 度量，得到了许多较满意结果[1]，是无点派的优秀成果；国内邓自克教授上世纪八十年代初提出 Deng 度量，该度量是国内最早且较系统地研究过的度量，邓曾给出过该度量较漂亮的结果[2]，是有点派的典范之一，但 Deng 度量是在 $I^X\ (I=[0,1])$ 这种特殊格上定义且是通过下列模糊点定义的，即

定义 1.1 一个模糊点 $x_\lambda \in I^X$ 当且仅当 x_λ 是被定义如下[2]：

$$x_\lambda(y)=\begin{cases}\lambda, & y=x;\\ 0, & y\neq x.\end{cases}$$

这里 $\lambda\in(0,1)$。简记映射 $x_\lambda(y)$ 为 x_λ，同时，$x_{1-\lambda}$ 被称为 x_λ 的余点。$\{x_\lambda\}$ 表示 I^X 在所有模糊点的集合。

在文[3] [4] [5]中，刘应明院士与王国俊教授分别对下列模糊点和重域(或远域)(参考后面预备知识)的合理性进行了论证，由此在 I^X 上现大家广泛接受的模糊点是下列定义 1.2，即

定义 1.2 $y_\alpha(x)\in I^X$ 是一个模糊点，当且仅当 $y_\alpha(x)$ 被定义如下[3] [4] [5]：

$$x_\alpha(y)=\begin{cases}\alpha, & y=x;\\ 0, & y\neq x.\end{cases}$$

尽管在文[2]中，邓借助余点的邻域给出过该度量较好的结论。但由于 Deng 度量是建立在比较特殊的格 I^X 与特殊的模糊点上，特别是邓给出的该度量公理体系在格上推广非常困难，这极大的局限了该度量的接受。

在文[6]我们证明了 Deng 度量一定是 Erceg 度量，但反之不成立。并证明了 Deng 度量所诱导拓扑和 m-一致结构就是 Erceg 度量诱导拓扑和 Hutton 一致结构。本文在此基础上，给出了 Deng 度量的一组等价公理，由此把定义在 I^X 上的 Deng 式伪度量很自然地推广到完全分配格 L^X 上。

为此本文需要下列预备知识：

定义 1.3 一个映射 $d:\{x_\lambda\}\times\{x_\lambda\}\to[0,+\infty)$ 被称为 Deng 伪度量，如果它满足下列条件[2]：

1) 如果 $\lambda_0\le\lambda_1$，则 $d(x_{\lambda_0},x_{\lambda_1})=0$；

2) $d(x_{\lambda_0},x_{\lambda_1})=d(y_{1-\lambda_2},x_{1-\lambda_1})$；

3) $d(x_{\lambda_1},z_{\lambda_3})\le d(x_{\lambda_1},y_{\lambda_2})+d(y_{\lambda_2},z_{\lambda_3})$；

4) $d(x_{\lambda_1},y_{\lambda_2})<r$，这里 $r>0\Rightarrow\exists\lambda'>\lambda_1$ 使得 $d(x_{\lambda'},y_{\lambda_2})<r$。

定义 1.4 L^X 上的 Shi 伪度量是一个满足下列条件的 $d:M\times M\to[0,+\infty)$ 映射[7]：

(N1) $\forall a,b\in M$, 如果 $a\ll b$，那么 $d(a,b)=0$;

(N2) $\forall a,b,c\in M$, $d(a,c)\le d(a,b)+d(b,c)$;

(N3) $\forall a,b\in M$， $d(a,b)=\wedge_{c\ll b} d(a,c)$;

(N4) $\forall a,b\in M$， $\forall a,b\in M,\exists x\not\leq a'$ 使得 $d(x,b)<r \Leftrightarrow \exists y\not\leq b'$ 使得 $d(y,a)<r$ 。

注 (N4)是等价于下列条件

(N4)* $\forall a,b\in M$， $\bigwedge_{x\not\leq a'} d(x,b)=\bigwedge_{x\not\leq b'} d(x,a)$ 。

定理 1.5 d 是一个 Deng 伪度量，如 $\forall a,b\in\{x_\lambda\}$，有 $d^*(a,b)=d(a,b)$，且令 $d^*(a,\underline{1})=0$ 和 $d^*(1,b)=\vee_{c<\underline{1}} d(c,b)$ 那么 d^* 在 I^X 上是一个 Shi 伪度量[6]。

定义 1.6 (L,τ) 是格上拓扑空间。1) 对 $a\in M$, 称 $\mu\in L$, 是 a 的重域，若有开集 $\eta\in\tau$, 使得 $\eta\leq\mu$, 且 $a\not\leq\eta$；2) a 的重域族 $Q(a)$ 称为 a 的 Q-neighborhood 基，若对 a 的任一重域 η，存在 $\xi\in Q(a)$ 使得 $\eta\leq\xi$；3) (L,τ) 称为是 $Q-C_1$ 的，若对每一个 $a\in M$, 有可数 Q-neighborhoods 基[8]。

2. 其它预备知识

本文 L 表一个具有逆序对合对应“ ′ ”的完全分配格。X 是指标集，L^X 是从 M 到 L 的全部映射组成的集，且带有点式地被定义 $\leq$ 和 ′ 并按映射的大小顺序构成的一个偏序集。$e\in L^X-\{0\}$ 被叫一个分子，当且仅当对 $p,q\in L^X, e\leq p\vee q$ 蕴含 $e\leq p$ 或 $e\leq q$，L^X 的全部分子集记为 M 。分子 $a\ll b$ 表 way-below 关系。(L^X,δ) 是 LF 拓扑空间， $x\in M$, $A\in\delta'$ (即 A 为闭集)。如 $x\not\in A$, 则称 A 为 x 的闭远域， $B\in L^X$, 如果 x 有闭远域 A 使 $B\leq A$，则称 B 为 x 的远域。其他未声明概念与符号请参考文[5]。

3. 本文主要结果

为了推广 Deng 度量，首先我们证明 Deng 度量定义可以由下列定理中的(M1) - (M4)代替。

定理 3.1 一个映射 $d:\{x_\lambda\}\times\{x_\lambda\}\to[0,+\infty)$ 是 Deng 伪度量当且仅当它满足下列条件：

(M1) 如果 $\lambda_0\leq\lambda_1$，则 $d(x_{\lambda_0},x_{\lambda_1})=0$；

(M2) $d(x_{\lambda_1},z_{\lambda_3})\leq d(x_{\lambda_1},y_{\lambda_2})+d(y_{\lambda_2},z_{\lambda_3})$；

(M3) $x_{\lambda_1},y_{\lambda_2}\in\{x_\lambda\}$， $d(x_{\lambda_1},y_{\lambda_2})=\wedge_{s>\lambda_1} d(x_s,y_{\lambda_2})$；

(M4) $x_{\lambda_1},y_{\lambda_2}\in\{x_\lambda\}$， $\exists x_h\not\leq x_{1-\lambda_1}$， 使得 $\exists x_h\not\leq x_{1-\lambda_1}$ $d(y_s,x_{\lambda_1})<r\Leftrightarrow$ 使得 $d(y_s,x_{\lambda_2})<r$ 。

为证明定理 3.1，我们需要证明下列一些引理，这些引理也是该度量的性质的进一步研究。

引理 3.1 设 d 映射满足(I)、(III)和(IV)，则(M3)成立。

证明 由于 $\forall s>\lambda_1$ 根据(I)和(III)得 $d(x_s,y_{\lambda_2})\geq d(x_{\lambda_1},y_{\lambda_2})$，从而 $\wedge_{s>\lambda_1} d(x_s,y_{\lambda_2})\geq d(x_{\lambda_1},y_{\lambda_2})$ 。

假设 $\wedge_{s>\lambda_1} d(x_s,y_{\lambda_2})\neq d(x_{\lambda_1},y_{\lambda_2})$，则 $d(x_{\lambda_1},y_{\lambda_2})<\wedge_{s>\lambda_1} d(x_s,y_{\lambda_2})=r$，根据(IV)，$\exists s_0>\lambda_1$ 使得 $d(x_{s_0},y_{\lambda_2})<r$ 而 $\wedge_{s>\lambda_1} d(x_s,y_{\lambda_2})=r$ 知 $s_0>\lambda_1$ 有 $d(x_{s_0},y_{\lambda_2})\geq r$，从而矛盾，命题得证。

引理 3.2 设 d 映射满足(M3) $d(x_{\lambda_1},y_{\lambda_2})=\wedge_{s>\lambda_1} d(x_s,y_{\lambda_2})$，则(IV)成立。

证明 证明显然。

推论 3.3 设 d 映射满足(I)和(III)，则(IV) = (M3)。

证明 由引理 3.1 和引理 3.2，结论显然。

引理 3.4 设 d 映射满足(I)、(III)、(IV)和(M4)，则(II)成立。

证明 取 $x_{\lambda_1},y_{\lambda_2}\in\{x_\lambda\}$，根据(I)和(III)得

$$d(x_{1-\lambda_1},y_{\lambda_2})\leq\wedge_{h>1-\lambda_1} d(x_h,y_{\lambda_2}),\ d(y_{1-\lambda_2},x_{\lambda_1})\leq\wedge_{s>1-\lambda_2} d(y_s,x_{\lambda_1})\text{。}$$

由于(N4)*⇔(M4)，由(N4)* $\wedge_{h>1-\lambda_1} d(x_h,y_{\lambda_2})=\wedge_{s>1-\lambda_2} d(y_s,x_{\lambda_1})$ 和引理 3.2 得：

$$d\left(x_{1-\lambda_1}, y_{\lambda_2}\right) \le \wedge_{s>1-\lambda_2} d\left(y_s, x_{\lambda_1}\right) = d\left(y_{1-\lambda_2}, x_{\lambda_1}\right)。$$

同理 $d\left(y_{1-\lambda_2}, x_{\lambda_1}\right) \le d\left(x_{1-\lambda_1}, y_{\lambda_2}\right)$。由上得 $d\left(x_{1-\lambda_1}, y_{\lambda_2}\right) = d\left(y_{1-\lambda_2}, x_{\lambda_1}\right)$。从而(II)成立，即命题得证。

推论 3.5 设 d 映射满足(I)、(III)、(IV)，则(II) = (M4)成立。

证明 先证明(I) + (III) + (IV) + (II)⇒(M4)成立(由于(N4)*⇔(N4)⇔(M4))。

证(M4)成立，只需要证明(N4)*成立，设 $a,b \in \{x_\lambda\}$，因为

$$\wedge_{x\not\le a'} d(x,b) = \wedge_{x>a'} d(x,b),\ \wedge_{y\not\le b'} d(y,a) = \wedge_{y>b'} d(y,a),$$

所以须证

$$\wedge_{x>a'} d(x,b) = \wedge_{y>b'} d(y,a),$$

由于 $\wedge_{x>a'} d(x,b) = \wedge_{x>1-a} d\left(b^c, x^c\right) = \wedge_{a>x^c} d\left(b^c, x^c\right) = d\left(b^c, a\right)$.

同理可证 $\wedge_{y>b'} d(y,a) = d\left(a^c, b\right)$。根据(II)，能知有 $d\left(b^c, a\right) = d\left(a^c, b\right)$. 因此(N4)*成立。

其次有引理 3.4 (I) + (III) + (IV) + (M4)⇒(II)成立。

定理 3.1 的证明 (M1)⇔(I)，(M2)⇔(III)，由推论 3.3 得(M3)⇔(IV)，再由推论 3.5 得(II)⇔(M4)，从而该命题结论成立。

定理 3.2 设 d 是一个映射，满足(N3)和(II)，则(IV)成立。

证明 取 $x_{\lambda_1}, y_{\lambda_2} \in \{x_\lambda\}$，由(N3)和(II)得

$$d\left(x_{\lambda_1}, y_{\lambda_2}\right) = d\left(y_{1-\lambda_2}, x_{1-\lambda_1}\right) = \wedge_{h<1-\lambda_1} d\left(y_{1-\lambda_2}, x_h\right) < r.$$

从而可知 $\exists h < 1-\lambda_1$ 使得 $d\left(y_{1-\lambda_2}, x_h\right) < r$，再由(II)得 $d\left(x_{1-h}, y_{\lambda_2}\right) < r, h < 1-\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 < 1-h = \lambda'$，得 $d\left(x_{\lambda'}, y_{\lambda_2}\right) < r$ 即(IV)成立。

由于 Deng 度量是建立在比较特殊的模糊点上，且邓自克教授给出的公理也不好推广，这局限了该度量的使用和接受，现有了定理 3.1，Deng 度量很自然从 I^x 到 L^x 完全分配格上可做如下推广：

定义 3.8 L^x 上的 Deng 伪度量是一个满足下列条件的 $d: M \times M \to [0, +\infty)$ 映射：

(L1) $\forall a,b \in M$, 如果 $a \ll b$，那么 $d(a,b) = 0$;

(L2) $\forall a,b,c \in M$，$d(a,c) \le d(a,b) + d(b,c)$;

(L3) $\forall a,b \in M$，$d(a,b) = \wedge_{a\ll c} d(c,b)$; $\wedge_{c\ll b} d(a,c)$;

(L4) $\forall a,b \in M$，$\forall a,b \in M, \exists x \not\le a'$ 使得 $d(x,b) < r \Leftrightarrow \exists y \not\le b'$ 使得 $d(y,a) < r$.

这么推广的好处：第一：Deng 度量在更加广泛的 L^x 完全分配格上进行研究；第二：推广的 Deng 度量与 Shi 度量比较，两者仅仅(N3)与(L3)不同(Erceg 度量一样，参考文[9])，从而，根据使用不同连续性公理，得到三种 Erceg 度量，Den 度量，Shi 度量；第三，根据文[6] [9]结论，尽管三种度量不同，但地位平行，它们之间既有联系又有差别，从诱导拓扑性质来看，I^x 上 Deng 度量性质优于 Erceg 度量和 Shi 度量，且根据定理 1.5 知：在 I^x 上 Deng 度量所诱导的拓扑就是 Shi 度量诱导的拓扑，从而在 I^x 上 Deng 度量是 $Q-C_1$ 的。

参考文献 (References)

[1] Erceg, M.A. (1979) Metric spaces in fuzzy set theory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **69**, 205-230.

[2] Deng, Z.K. (1982) Fuzzy pseudo-metric spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **86**, 74-79.

[3] Pu, B.M. and Liu, Y.M. (1980) Fuzzy Topology I, neighborhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith Convergence. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **76**, 571-599.

[4] 王国俊 (1982) 领域方法在 Fuzzy 拓扑学中的困难. *模糊数学*, **1**, 113-116.
[5] Wang, G.J. (1988) Theory of L-fuzzy topological space. Shanxi Normal University Publishers, Xian. (In Chinese).
[6] 陈鹏 (2008) L-拓扑中几种度量的性质及其关系. 博士论文, 北京理工大学, 北京.
[7] Shi, F.G. (2001) Pointwise pseudo-metrics in L-fuzzy set theory. *Fuzzy Sets and Systems*, **121**, 200-216.
[8] 梁基华 (1984) 关于不分明度量空间的几个问题. *数学年刊*, **1**, 59-67.
[9] 陈鹏, 史富贵 (2007) *Erceg* 度量的进一步简化及其性质. *数学进展*, **5**, 579-586.