Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2016, 5(1), 98-111
Published Online February 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.51014

An Algorithm for Computing a Normal Form of a Class of Planar Degenerate Dynamical Systems

Mengxiao Li, Tusen Huang

Department of Mathematics, School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou Zhejiang
Email: 838210350@qq.com, huangtusen@sina.com

Received: Feb. 4th, 2016; accepted: Feb. 19th, 2016; published: Feb. 26th, 2016

Abstract

In this paper the normal forms of a class of planar degenerate dynamical systems are computed by using the method of Carleman linearlization, in the mean time, a sequence of the associated near identity change of variables is given. These results generalize the computations of normal forms for the non-degenerate dynamical systems with non-zero linear part in the classical theory of normal forms to those for the degenerate dynamical systems with zero linear part, and establish the bases to simplify the analyses of the dynamical properties of the degenerate systems.

Keywords

Planar Degenerate System, Normal Form, Near Identity Change of Variable, Method of Carleman Linearization

一类退化平面系统的正规形的计算

李梦晓，黄土森

浙江理工大学理学院数学系，浙江 杭州
Email: 838210350@qq.com, huangtusen@sina.com

收稿日期：2016年2月4日；录用日期：2016年2月19日；发布日期：2016年2月26日

文章引用: 李梦晓, 黄土森. 一类退化平面系统的正规形的计算[J]. 应用数学进展, 2016, 5(1): 98-111.
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.51014

摘　要

本文利用Carleman线性化方法计算了一类平面退化系统的正规形，并给出相应的近恒等变量变换。这些结果把经典正规形理论中只能计算具非零线性部分动力系统的正规形推广到可以计算具零线性部分系统的正规形情形，为简化分析这类退化系统的动力学性质建立了基础。

关键词

平面退化系统，正规形，近恒等变量变换，Carleman线性化方法

1. 引言

令 K 是特征零的交换域，通常取实数域或复数域，$K[[x]]$ 表示数域 K 上关于 n 个变元 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 的形式幂级数环。我们考虑如下自治动力系统

$$\dot{x}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F(x), \tag{1.1}$$

其中 $F(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))^{\mathrm{T}}$ 是形式幂级数向量，并且假设各分量是两两互素且不含常数项，因此原点 O 是该动力系统的一个孤立奇点。令 $F(x)=\sum_{k\ge1}F_k(x)$，其中 $F_k(x)$ 由 k 次齐次多项式向量场，其线性部分是 $F_1(x)=Ax$， $A\in M(n,n)$，其中 $M(k,m)$ 表示域 K 上的 $k\times m$ 矩阵构成的向量空间。

在非线性系统(1.1)的孤立奇点 O 的局部分析中，正规形理论是一个重要的分析工具，其基本思想是寻找合适的变量变换，在保持变换前后两个系统的局部定性性质不变的同时，使得变换后的系统在形式上尽可能的简单，以便最大程度地简化非线性系统在奇点邻域中的局部动力学分析。这种方法在分支理论、中心-焦点问题、系统的可积性问题、泛函微分方程等方面有很广泛的应用[1]-[4]。

在正规形理论中，首要的问题是对于给定的一个非线性动力系统(1.1)，我们如何计算它的正规形以及相应的变量变换。到目前为止，已发展了许多计算正规形的有效方法，例如李括号方法[5] [6]、内积法[7]、无穷小生成子法[8]、直接计算法[9] [10]、Carleman 线性化方法[11] [12]以及 $\mathrm{sl}_2(\mathrm{R})$群表示理论法[13] [14]等。这些方法主要计算了具非零系数矩阵 A 的动力系统正规形，但除 Carleman 线性化方法以外的其他方法，并不能同时给出所作的变量变换，而理论与实际问题需要探讨当动力系统的系数矩阵 A 为零(即所谓退化动力系统)时正规形的计算。直到最近几年才涉及退化动力系统正规形计算方面的工作：文献[15]利用李括号方法结合(1.1)的主系统(即(1.1)的最低次齐次项定义的系统)的守恒－耗散分解研究了一类所谓广义幂零系统

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y^3+3Ax^2y\\ -x^3-3Axy^3\end{pmatrix}+\cdots$$

的齐次分解正规形的计算及其解析可积性问题；文献[16]利用李括号方法结合(1.1)的拟主系统(即(1.1)的最低次拟齐次项定义的系统)的守恒－耗散分解研究了一类平面退化系统

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y^3+2ax^3y\\ -x^5-3ax^2y^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{50}x^5+a_{22}x^2y^2\\ b_{41}x^4y+b_{13}xy^3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{41}x^4y+a_{13}xy^3\\ b_{60}x^6+b_{32}x^3y^2+b_{04}y^4\end{pmatrix}+\cdots$$

的拟齐次分解正规形的计算及其解析可积性问题。

本文主要是利用 Carleman 线性化方法研究一类我们称之为广义鞍结系统

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2\\ \lambda y^2\end{pmatrix}+\cdots$$

的正规形的计算，其中 $\lambda\in K$。Carleman 线性化方法的主要思想是把一个非线性系统用线性形式表示出来，从而通过纯矩阵的运算就可以把系统化为正规形，同时给出所作的变量变换。而用李括号方法是难以做到这一点的[15] [16]。另外我们将看到，由于系统是退化的，与文献[11] [12]中研究具非零系数矩阵 A 的动力系统时仅需考虑所作的近恒等变量变换对相同次数项的影响不同，我们还需考虑所作的近恒等变量变换对更高次项的影响。

2. Carleman 线性化方法

为了内容完整，在这一节，我们介绍文献[12]中关于 Carleman 线性化方法。由于对一般的正整数 n 并不会复杂些，因此我们将对正整数 $n\ge 2$ 来叙述。对整数 $k\ge 1$，用 $H_k(x)$ 表示 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 k 次齐次多项式空间。在 $H_k(x)$ 中选择一组标准基 $x^q=x_1^{q_1}x_2^{q_2}\cdots x_n^{q_n}$，其中 $q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$，$q_i\in N$ 是 n 重指标，且 $|q|=q_1+q_2+\cdots+q_n=k$。我们采取由序 $x_1<x_2<\cdots<x_n$ 诱导的字典序对单项式集合 $\{x^q:|q|=k\}$ 中元素进行排序，并把 $H_k(x)$ 中的标准基记为

$$e_1^k=x_1^k,e_2^k=x_1^{k-1}x_2,e_3^k=x_1^{k-2}x_3,\cdots,e_{d_k}^k=x_n^k,$$

容易验证其维数为 $d_k=\begin{pmatrix}n+k-1\\ k\end{pmatrix}$。记

$$m_k=\left(e_1^k,e_2^k,\cdots,e_{d_k}^k\right)^{\mathrm{T}},$$

则 $H_k(x)$ 中任何元素可写成

$$P(x)=\sum_{|q|=k}\alpha_q x^q=\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{d_k}\right)m_k。$$

于是 $K[[x]]$ 中的任何元素可以写成 $f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k m_k$，其中 $a_k\in K^{d_k}$。于是 $K[[x]]^n$ 中的元素可以写成

$$S(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}D_{1k}m_k,$$

其中 $D_{1k}\in M(n,d_k)$。为了把一个形式向量场通过矩阵的运算表示出来，从而可以用线性的方法去研究非线性动力系统，我们引进作用在 $K[[x]]$ 上的与系统(1.1)相关联的导算子 D 如下：对任意的 $\phi\in K[[x]]$，令 $D\phi=\langle F,\nabla\phi\rangle$，其中 $\nabla\phi$ 表示 ϕ 的梯度。特别地，$Dx_i=f_i(x)$，其中 $f_i(x)$ 是 $F(x)$ 的第 i 个分量。因此系统(1)可以表示成

$$Dm_1=\begin{pmatrix}Dx_1\\ \vdots\\ Dx_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{+\infty}D_{1i}m_i, \tag{2.1}$$

其中 $D_{1i}\in M(n,d_i)$，$F^i(x)=D_{1i}m_i$ 是系统的 k 次齐次部分且 $D_{11}=A$ 是系统的线性部分的系数矩阵。

现在我们把 D 推广到作用在 $H_i(x)(i\ge 2)$ 空间中的基 m_i 的元素上[12]。例如，D 在 m_2 中元素 x_1x_2 上的作用定义为

$$D(x_1x_2)=x_2D(x_1)+x_1D(x_2),$$

其中 Dx_1 和 Dx_2 由(2)式给出。类似地，

$$D\left(x_1^2\right)=2x_1D\left(x_1\right) \text{ 和 } D\left(x_2^2\right)=2x_2D\left(x_2\right),$$

于是当 $n=2$ 时，对 $m_2=\left(x_1^2,x_1x_2,x_2^2\right)^{\mathrm{T}}$，有

$$Dm_2=\begin{pmatrix} D\left(x_1^2\right) \\ D\left(x_1x_2\right) \\ D\left(x_2^2\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x_1D\left(x_1\right) \\ x_2D\left(x_1\right)+x_1D\left(x_2\right) \\ 2x_2D\left(x_2\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 \\ 0 & 2x_2 \end{pmatrix}\sum_{j\ge1}D_{1j}m_j=\sum_{k\ge2}D_{2k}m_k,$$

其中

$$D_{2,k+1}m_{k+1}=\begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 \\ 0 & 2x_2 \end{pmatrix}D_{1k}m_k。$$

一般地，对 $i\ge2$，$Dm_i=\sum_{j\ge i}D_{ij}m_j$，其中，

$$D_{i,k+i-1}m_{k+i-1}=\begin{pmatrix} ix_1^{i-1} & 0 \\ (i-1)x_1^{i-2}x_2 & x_1^{i-1} \\ \vdots & \vdots \\ x_2^{i-1} & (i-1)x_1x_2^{i-2} \\ 0 & ix_2^{i-1} \end{pmatrix}D_{1k}m_k。$$

令

$$H^{\infty}=H_1\oplus H_2\oplus\cdots$$

作为正规形理论一般框架中线性空间[8]，则 $m=\left(m_1^{\mathrm{T}},m_2^{\mathrm{T}},m_3^{\mathrm{T}},\cdots\right)^{\mathrm{T}}$ 是 H^{∞} 的一组基。于是可以定义

$$D:H^{\infty}\to H^{\infty},$$

它是从 H^{∞} 到 H^{∞} 的线性映射，并且 D 在 H^{∞} 的基 m 上可以表示为

$$Dm=T_m\left(D\right)m, \tag{2.2}$$

其中

$$T_m\left(D\right)=\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & \cdots \\ 0 & D_{22} & D_{23} & \cdots \\ 0 & 0 & D_{33} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

是一个无穷维上三角分块矩阵，而 $D_{ij}\left(i\le j\right)$ 是一个 $d_i\times d_j$ 矩阵。显然 $T_m\left(D\right)$ 是由矩阵 $D_{1k}\left(k\ge1\right)$ 所唯一决定的。因此为了记号方便，我们可以把 $T_m\left(D\right)$ 表示为 $\mathrm{Der}_m\left(D_{11},D_{12},\cdots\right)$，而用 $\mathrm{Der}_m^k\left(D_{11},D_{12},\cdots,D_{1k}\right)$ 或 $T_m^{(k)}\left(D\right)$ 表示 $T_m\left(D\right)$ 的左上角分块矩阵，即

$$T_m^{(k)}\left(D\right)=\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & \cdots & D_{1k} \\ & D_{22} & D_{23} & \cdots & D_{2k} \\ & & D_{33} & \cdots & D_{3k} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & D_{kk} \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

并称之为$T_m(D)$的k阶截断分块矩阵。在正规性理论的一般框架中，除了刚才引进的线性空间H^{∞}外，还需要引进另外一个对象——变换群[8]。令$\mathcal{G}_n$是$K[[x]]^n$上与恒等变换相切的一个形式自同构群，并且称$\mathcal{G}_n$中的元素为近恒等变量变换。令$\varphi=(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x))^{\mathrm{T}}\in\mathcal{G}_n$，我们现在把$\varphi$也用矩阵形式表示出来。令

$$\varphi(x)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x)\\ \varphi_2(x)\\ \vdots\\ \varphi_n(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+\sum_{k=2}^{\infty}\xi_1^k(x)\\ x_2+\sum_{k=2}^{\infty}\xi_2^k(x)\\ \vdots\\ x_n+\sum_{k=2}^{\infty}\xi_n^k(x)\end{pmatrix},$$

其中$\xi_i^k(x)$ $(i=1,2,\cdots,n;\ k\geq 2)$表示既不含常数项又不含一次项的形式幂级数，即

$$\varphi(m_1)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x)\\ \varphi_2(x)\\ \vdots\\ \varphi_n(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+\sum_{k=2}^{\infty}\xi_1^k(x)\\ x_2+\sum_{k=2}^{\infty}\xi_2^k(x)\\ \vdots\\ x_n+\sum_{k=2}^{\infty}\xi_n^k(x)\end{pmatrix}=m_1+\sum_{i\geq 2}T_{1i}m_i,$$

其中$T_{1i}\in M(n,d_i)$。我们也可以把$m_1+\sum_{i\geq 2}T_{1i}m_i$看成是$\varphi$在$H^{\infty}$中前$n$个基元素$m_1$上的矩阵表示。为了给出$\varphi$在$H^{\infty}$中其它基元素上的表示，我们现在推广上面关于$\varphi(m_1)$的矩阵表示如下：例如当$n=2$时，定义

$$\varphi(m_2)=\varphi\begin{pmatrix}x_1^2\\ x_1x_2\\ x_2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\varphi_1(x))^2\\ (\varphi_1(x))(\varphi_2(x))\\ (\varphi_2(x))^2\end{pmatrix}=m_2+\sum_{i\geq 2}T_{1i}m_i,$$

其中$T_{1i}\in M(2,d_i)$。一般地，对$i\geq 2$，令

$$\varphi(m_j)=m_j+\sum_{k>j}T_{jk}m_k=\sum_{k\geq j}T_{jk}m_k,$$

其中$T_{jk}\in M(d_j,d_k)$。对一般的n，可类似地定义，因此近恒等变量变换φ可以用矩阵形式表示如下：

$$\varphi(m)=\varphi\begin{pmatrix}m_1\\ m_2\\ m_3\\ \vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi(m_1)\\ \varphi(m_2)\\ \varphi(m_3)\\ \vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m_1+T_{12}m_2+T_{13}m_3+\cdots\\ m_2+T_{23}m_3+T_{24}m_4+\cdots\\ m_3+T_{34}m_4+T_{35}m_5+\cdots\\ \vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_1 & T_{12} & T_{13} & \cdots\\ & I_2 & T_{23} & \cdots\\ & & I_3 & \cdots\\ & & & \ddots\end{pmatrix}m,$$

其中，I_i是$d_i\times d_i$的单位矩阵，T_{ij}是$d_i\times d_j$矩阵。这样，近恒等变量变换φ (作为K^n上的映射一般是非线性的)可以作为H^{∞}上的一个线性映射，并且可以表示为如下的无穷维上三角分块矩阵：

$$T_m(\varphi)=\begin{pmatrix}I_1 & T_{12} & T_{13} & \cdots\\ & I_2 & T_{23} & \cdots\\ & & I_3 & \cdots\\ & & & \ddots\end{pmatrix}。\tag{2.4}$$

现在我们可以对动力系统(1.1)通过 φ 做变量变换。记 $m_i' = \varphi(m_i)$，则可以证明

$$m' = \left(m_1'^{\mathrm{T}}, m_2'^{\mathrm{T}}, \cdots\right)^{\mathrm{T}}$$

是 H^∞ 中的一组基且 $m' = T_m(\varphi)m$。我们得到

$$Dm' = T_m(\varphi)Dm = T_m(\varphi)T_m(D)m = T_m(\varphi)T_m(D)\left(T_m(\varphi)\right)^{-1}m'。$$

因此 D 在 H^∞ 中另外一组基 m' 下的矩阵为

$$T_{m'}(D) = T_m(\varphi)T_m(D)\left(T_m(\varphi)\right)^{-1}。$$

引理 1.1 [12] 令 $\psi, \varphi \in \mathcal{G}_n$，则 $\psi \circ \varphi \in \mathcal{G}_n$ 并且 $\varphi^{-1} \in \mathcal{G}_n$，而且

$$T_m(\psi \circ \varphi) = T_{m'}(\psi)T_m(\varphi)，\text{且 } T_{m'}\left(\varphi^{-1}\right) = \left(T_m(\varphi)\right)^{-1}。$$

我们注意到矩阵(2.4)中各分块矩阵 T_{ij} 由第一行中的各分块矩阵 $I_1, T_{12}, T_{13}, \cdots$ 所唯一确定，因此，我们可以使用记号 $\mathrm{Diff}_m(I_1, T_{12}, T_{13}, \cdots)$ 来表示矩阵 $T_m(\varphi)$，而用 $\mathrm{Diff}_m^k(I_1, T_{12}, T_{13}, \cdots, T_{1k})$ 或 $T_m^{(k)}(\varphi)$ 表示 $T_m(\varphi)$ 的左上角分块矩阵，即

$$T_m^{(k)}(\varphi) = \begin{pmatrix} I_1 & T_{12} & T_{13} & \cdots & T_{1k} \\ & I_2 & T_{23} & \cdots & T_{2k} \\ & & I_3 & \cdots & T_{3k} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & I_k \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

并称之为 $T_m(\varphi)$ 的 k 阶截断分块矩阵。

正规形理论的目标是解决下列问题：设 D 是 $K[[x]]$ 上的与系统(1.1)相关联的导算子 D，我们设法找到一个近恒等的变量变换 $\varphi \in \mathcal{G}_n$，使得变换后的无穷维矩阵 $T_m(\varphi)T_m(D)\left(T_m(\varphi)\right)^{-1}$ 第一行中的各分块矩阵尽可能的简单，也就是说，在这些分块矩阵中包含尽可能多的零。

3. 一类退化系统的正规形计算

这一节我们利用上节中介绍的 Carleman 线性化方法计算下面的所谓广义鞍结系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + X(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = \lambda x_2^2 + Y(x_1, x_2) \end{cases} \tag{3.1}$$

的正规形，其中 $X(x_1, x_2)$，$Y(x_1, x_2) = O\left(\left|(x_1, x_2)\right|^3\right)$。这里 $n = 2$，于是非线性系统(3.1)在 H^∞ 中标准基 $m = \left(m_1^{\mathrm{T}}, m_2^{\mathrm{T}}, m_3^{\mathrm{T}}, \cdots\right)^{\mathrm{T}}$ 下的矩阵为

$$T_m(D) = \begin{pmatrix} 0 & D_{12} & D_{13} & D_{14} & \cdots & D_{1,i+1} & D_{1.i+2} & D_{1,i+3} & \cdots \\ 0 & 0 & D_{23} & D_{24} & \cdots & D_{2,i+1} & D_{2,i+2} & D_{2.i+3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & D_{34} & \cdots & D_{3,i+1} & D_{3,i+2} & D_{3.i+3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & D_{i,i+1} & D_{i,i+2} & D_{i,i+3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & D_{i+1,i+2} & D_{i+1,i+3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & D_{i+2,i+3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

其中 $D_{12}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$。于是我们可以把系统(3.1)写成

$$Dm=T_m\left(D\right)m\text{。}\tag{3.2}$$

若记 $a_{k-i,i}$ 为 $x_1^{k-i}x_2^i$ 的系数，$q=1,2$，$a_{k-i,i}^q$ 为其在矩阵第 q 行的分量，则可得

$$D_{1k}=\begin{pmatrix}a_{k0}^1&a_{k-1,1}^1&a_{k-2,2}^1&\cdots&a_{1,k-1}^1&a_{0k}^1\\a_{k0}^2&a_{k-1,1}^2&a_{k-2,2}^2&\cdots&a_{1,k-1}^2&a_{0k}^2\end{pmatrix}，\quad k=2,3,\cdots\text{。}$$

在正规形的经典理论中，对于一个线性部分的系数矩阵 A 为非零矩阵的动力系统，求其正规形的通常做法是：假设已经求得阶数小于等于 $k-1$ 的正规形，然后去求 k 阶的正规形[8] [12]，并且通常难以求得所作的变量变换。然而对退化系统(3.1)，为求其正规形，我们的做法是假设已经求得阶数小于等于 k 的正规形，然后去求 $k+1$ 阶正规形。为此设有一个待求的近恒等变量变换

$$\varphi\left(x\right)=x+\xi^k\left(x\right)，$$

其中 ξ^k 是 k 次齐次多项式的向量，即

$$\varphi\left(m_1\right)=\begin{pmatrix}\varphi_1\left(x\right)\\\varphi_2\left(x\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+\xi_1^k\left(x\right)\\x_2+\xi_2^k\left(x\right)\end{pmatrix}=m_1+E_{1k}m_k，\quad E_{1k}\in M\left(2,d_k\right)\text{。}$$

于是

$$\varphi\left(m_2\right)=\varphi\begin{pmatrix}x_1^2\\x_1x_2\\x_2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(\varphi_1\left(x\right)\right)^2\\\left(\varphi_1\left(x\right)\right)\left(\varphi_2\left(x\right)\right)\\\left(\varphi_2\left(x\right)\right)^2\end{pmatrix}=m_2+E_{2,k+1}m_{k+1}+E_{2,2k}m_{2k}，$$

其中 $E_{2,k+1}m_{k+1}=\begin{pmatrix}2x_1&0\\x_2&x_1\\0&2x_2\end{pmatrix}E_{1k}m_k$。同理

$$\varphi\left(m_3\right)=\varphi\begin{pmatrix}x_1^3\\x_1^2x_2\\x_1x_2^2\\x_2^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(\varphi_1\left(x\right)\right)^3\\\left(\varphi_1\left(x\right)\right)^2\left(\varphi_2\left(x\right)\right)\\\left(\varphi_1\left(x\right)\right)\left(\varphi_2\left(x\right)\right)^2\\\left(\varphi_2\left(x\right)\right)^3\end{pmatrix}=m_3+E_{3,k+2}m_{k+2}+E_{3,2k+1}m_{2k+1}+E_{3,3k}m_{3k}，$$

其中

$$E_{3,k+2}m_{k+2}=\begin{pmatrix}3x_1^2&0\\2x_1x_2&x_1^2\\x_2^2&2x_1x_2\\0&3x_2^2\end{pmatrix}E_{1k}m_k\text{。}$$

一般地，

$$\varphi\left(m_i\right)=m_i+E_{i,k+i-1}m_{k+i-1}+E_{i,2k+i-2}m_{2k+i-2}+\cdots+E_{i,(i-1)k+1}m_{(i-1)k+1}+E_{i,ik}m_{ik}，$$

其中

$$E_{i,k+i-1}m_{k+i-1}=\begin{pmatrix} ix_1^{i-1} & 0 \\ (i-1)x_1^{i-2}x_2 & x_1^{i-1} \\ \vdots & \vdots \\ x_2^{i-1} & (i-1)x_1x_2^{i-2} \\ 0 & ix_2^{i-1} \end{pmatrix}E_{1k}m_k\text{。}$$

所以

$$T_m(\varphi)=\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 & \cdots & E_{1k} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & I_2 & 0 & \cdots & 0 & E_{2,k+1} & 0 & \cdots & E_{2,2k} & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & I_3 & \cdots & 0 & 0 & E_{3,k+2} & \cdots & 0 & \cdots & E_{3,3k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\text{。}$$

在经典的正规形理论中我们只关心是否能通过近恒等变量变换使 D_{1k} 尽可能简单(即包含尽可能多的零！)；类似地，在计算退化系统(3.1)的正规形时，我们也只需求合适的近恒等变量变换使 $D_{1,k+1}$ 尽可能简单(即包含尽可能多的零)。为此，我们先考虑当 $k=2$ 时的情形(即求系统(3.1)的 3 阶正规形)。取 $k+1=3$ 阶截断式，即

$$T_m^{(3)}(D)=\begin{pmatrix} 0 & D_{12} & D_{13} \\ 0 & 0 & D_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad T_m^{(3)}(\varphi)=\begin{pmatrix} I_1 & E_{12} & 0 \\ 0 & I_2 & E_{23} \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix},$$

其中 $E_{12}\in M(2,d_2)$， $d_2=3$ 是待求的矩阵。经计算可得

$$\left(T_m^{(3)}(\varphi)\right)^{-1}=\begin{pmatrix} I_1 & -E_{12} & E_{12}E_{23} \\ & I_2 & -E_{23} \\ & & I_3 \end{pmatrix},$$

所以

$$T_m^{(3)}(\varphi)T_m^{(3)}(D)\left(T_m^{(3)}(\varphi)\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & D_{12} & D'_{13} \\ 0 & 0 & D_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中

$$D'_{13}=D_{13}-\left(D_{12}E_{23}-E_{12}D_{23}\right)\text{。}$$

于是为了简化 D'_{13} (即 D'_{13} 中包含尽可能多的零！)，设待定的矩阵 E_{12} 为

$$E_{12}=\begin{pmatrix} b_{20}^1 & b_{11}^1 & b_{02}^1 \\ b_{20}^2 & b_{11}^2 & b_{02}^2 \end{pmatrix}\text{。}$$

因为

$$D_{23}m_3=\begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 \\ 0 & 2x_2 \end{pmatrix}D_{12}m_2=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}m_3,$$

即

$$D_{23}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix},$$

所以

$$E_{12}D_{23}=\begin{pmatrix}2b_{20}^1 & b_{11}^1 & \lambda b_{11}^1 & 2\lambda b_{02}^1\\ 2b_{20}^2 & b_{11}^2 & \lambda b_{11}^2 & 2\lambda b_{02}^2\end{pmatrix}。$$

又因为

$$E_{23}m_3=\begin{pmatrix}2x_1 & 0\\ x_2 & x_1\\ 0 & 2x_2\end{pmatrix}E_{12}m_2=\begin{pmatrix}2b_{20}^1 & 2b_{11}^1 & 2b_{02}^1 & 0\\ b_{20}^2 & b_{20}^1+b_{11}^2 & b_{11}^1+b_{02}^2 & b_{02}^1\\ 0 & 2b_{20}^2 & 2b_{11}^2 & 2b_{02}^2\end{pmatrix}m_3,$$

即

$$E_{23}=\begin{pmatrix}2b_{20}^1 & 2b_{11}^1 & 2b_{02}^1 & 0\\ b_{20}^2 & b_{20}^1+b_{11}^2 & b_{11}^1+b_{02}^2 & b_{02}^1\\ 0 & 2b_{20}^2 & 2b_{11}^2 & 2b_{02}^2\end{pmatrix},$$

所以

$$D_{12}E_{23}=\begin{pmatrix}2b_{20}^1 & 2b_{11}^1 & 2b_{02}^1 & 0\\ 0 & 2\lambda b_{20}^2 & 2\lambda b_{11}^2 & 2\lambda b_{02}^2\end{pmatrix}。$$

我们注意到矩阵 D_{12} 的特点，可以看出对于 E_{23} 来说只需求出第一行和最后一行即可。类似地，在之后的 $D_{12}B$ 中我们也只需要求出 B 的第一行和最后一行。所以

$$D_{12}E_{23}-E_{12}D_{23}=\begin{pmatrix}0 & b_{11}^1 & 2b_{02}^1-\lambda b_{11}^1 & -2\lambda b_{02}^1\\ -2b_{20}^2 & 2\lambda b_{20}^2-\lambda b_{11}^2 & \lambda b_{11}^2 & 0\end{pmatrix}。$$

令

$$b_{11}^1=a_{21}^1,b_{02}^1=-\frac{1}{2\lambda}a_{03}^1,b_{20}^2=-\frac{1}{2}a_{30}^2,b_{11}^2=\frac{1}{\lambda}a_{12}^2,$$

则

$$D_{13}'=D_{13}-\left(D_{12}E_{23}-E_{12}D_{23}\right)=\begin{pmatrix}a_{30}^1 & 0 & a_{12}^1+\frac{1}{\lambda}a_{03}^1+\lambda a_{21}^1 & 0\\ 0 & a_{21}^2+\lambda a_{30}^2+a_{12}^2 & 0 & a_{03}^2\end{pmatrix}。$$

所以 D_{13}' 可化为至多有 4 项不为 0，这表明系统(3.1)的 3 阶正规形中的非零参数最多有 4 个。

我们继续考虑当 $k=3$ 时的情形(即求系统(3.1)的 4 阶正规形)。取 $k+1=4$ 阶截断式，即

$$T_m^{(4)}(D)=\begin{pmatrix}0 & D_{12} & D_{13} & D_{14}\\ 0 & 0 & D_{23} & D_{24}\\ 0 & 0 & 0 & D_{34}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad T_m^{(4)}(\varphi)=\begin{pmatrix}I_1 & 0 & E_{13} & 0\\ 0 & I_2 & 0 & E_{24}\\ 0 & 0 & I_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & I_4\end{pmatrix}。$$

经计算得

$$\left(T_m^{(4)}(\varphi)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}I_1 & 0 & -E_{13} & 0\\ 0 & I_2 & 0 & -E_{24}\\ 0 & 0 & I_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & I_4\end{pmatrix}。$$

所以

$$T_m^{(4)}(\varphi)T_m^{(4)}(D)\left(T_m^{(4)}(\varphi)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & D_{12} & D_{13} & D_{14}' \\ 0 & 0 & D_{23} & D_{24} \\ 0 & 0 & 0 & D_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

其中

$$D_{14}'=D_{14}-\left(D_{12}E_{24}-E_{13}D_{34}\right)。$$

现设待定的矩阵 E_{13} 为

$$E_{13}=\begin{pmatrix}b_{30}^1 & b_{21}^1 & b_{12}^1 & b_{03}^1 \\ b_{30}^2 & b_{21}^2 & b_{12}^2 & b_{03}^2\end{pmatrix}。$$

因为

$$D_{34}m_4=\begin{pmatrix}3x_1^2 & 0 \\ 2x_1x_2 & x_1^2 \\ x_2^2 & 2x_1x_2 \\ 0 & 3x_2^2\end{pmatrix}D_{12}m_2=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\lambda\end{pmatrix}m_4,$$

即

$$D_{34}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\lambda\end{pmatrix},$$

所以

$$E_{13}D_{34}=\begin{pmatrix}3b_{30}^1 & 2b_{21}^1 & \lambda b_{21}^1+b_{12}^1 & 2\lambda b_{12}^1 & 3\lambda b_{03}^1 \\ 3b_{30}^2 & 2b_{21}^2 & \lambda b_{21}^2+b_{12}^2 & 2\lambda b_{12}^2 & 3\lambda b_{03}^2\end{pmatrix}。$$

又因为

$$E_{24}m_4=\begin{pmatrix}3x_1^2 & 0 \\ 2x_1x_2 & x_1^2 \\ x_2^2 & 2x_1x_2 \\ 0 & 3x_2^2\end{pmatrix}E_{12}m_2=\begin{pmatrix}2b_{30}^1 & 2b_{21}^1 & 2b_{12}^1 & 2b_{03}^1 & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 2\lambda b_{30}^2 & 2\lambda b_{21}^2 & 2\lambda b_{12}^2 & 2\lambda b_{03}^2\end{pmatrix}m_4,$$

即

$$E_{24}=\begin{pmatrix}2b_{30}^1 & 2b_{21}^1 & 2b_{12}^1 & 2b_{03}^1 & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 2\lambda b_{30}^2 & 2\lambda b_{21}^2 & 2\lambda b_{12}^2 & 2\lambda b_{03}^2\end{pmatrix},$$

所以

$$D_{12}E_{24}=\begin{pmatrix}2b_{30}^1 & 2b_{21}^1 & 2b_{12}^1 & 2b_{03}^1 & 0 \\ 0 & 2\lambda b_{30}^2 & 2\lambda b_{21}^2 & 2\lambda b_{12}^2 & 2\lambda b_{03}^2\end{pmatrix}。$$

于是

$$D_{12}E_{24}-E_{13}D_{34}=\begin{pmatrix}-b_{30}^{1} & 0 & b_{12}^{1}-\lambda b_{21}^{1} & 2b_{03}^{1}-2\lambda b_{12}^{1} & -3\lambda b_{03}^{1}\\ -3b_{30}^{2} & 2\lambda b_{30}^{2}-2b_{21}^{2} & \lambda b_{21}^{2}-b_{12}^{2} & 0 & -\lambda b_{03}^{2}\end{pmatrix}。$$

令

$$b_{30}^{1}=-a_{40}^{1},b_{03}^{1}=-\frac{1}{3\lambda}a_{04}^{1},b_{12}^{1}=-\frac{a_{13}^{1}}{2\lambda}-\frac{a_{04}^{1}}{2\lambda^{2}},b_{21}^{1}=-\frac{a_{22}^{1}}{\lambda}-\frac{a_{13}^{1}}{2\lambda^{2}}-\frac{a_{04}^{1}}{2\lambda^{3}},$$

$$b_{30}^{2}=-\frac{1}{3}a_{40}^{2},b_{03}^{2}=-\frac{1}{\lambda}a_{04}^{2},b_{21}^{2}=-\frac{a_{31}^{2}}{2}-\frac{\lambda a_{40}^{2}}{3},b_{12}^{2}=-a_{22}^{2}-\frac{\lambda a_{31}^{2}}{2}-\frac{\lambda^{2}a_{40}^{2}}{2},$$

则可得到

$$D_{14}'=D_{14}-\left(D_{12}E_{24}-E_{13}D_{34}\right)=\begin{pmatrix}0 & a_{31}^{1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_{13}^{2} & 0\end{pmatrix},$$

所以 D_{14}' 可化为至多含有 2 项不为 0，这表明系统(3.1)的 4 阶正规形中的非零参数最多有 2 个。

类似地，考虑当 $k\geq 4$ 时的情形(即求系统(3.1)的 $k+1$ 阶正规形)。取 $k+1$ 次截断式

$$T_m^{(k+1)}(D)=\begin{pmatrix}0 & D_{12} & D_{13} & D_{14} & \cdots & D_{1,k} & D_{1,k+1}\\ 0 & 0 & D_{23} & D_{24} & \cdots & D_{2,k} & D_{2,k+1}\\ 0 & 0 & 0 & D_{34} & \cdots & D_{3,k} & D_{3,k+1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & D_{k-1,k} & D_{k-1,k+1}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & D_{k,k+1}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$T_m^{(k+1)}(\varphi)=\begin{pmatrix}I_1 & 0 & \cdots & 0 & E_{1,k} & 0\\ 0 & I_2 & 0 & \cdots & 0 & E_{2,k+1}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & I_{k-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_k & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & I_{k+1}\end{pmatrix}。$$

经计算得

$$\left(T_m^{(k+1)}(\varphi)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}I_1 & 0 & \cdots & 0 & -E_{1,k} & 0\\ 0 & I_2 & 0 & \cdots & 0 & -E_{2,k+1}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & I_{k-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_k & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & I_{k+1}\end{pmatrix}。$$

于是

$$T_m^{(k+1)}(\varphi)T_m^{(k+1)}(D)\left(T_m^{(k+1)}(\varphi)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & D_{12} & D_{13} & D_{14} & \cdots & D_{1,k} & D_{1,k+1}'\\ 0 & 0 & D_{23} & D_{24} & \cdots & D_{2,k} & D_{2,k+1}\\ 0 & 0 & 0 & D_{34} & \cdots & D_{3,k} & D_{3,k+1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & D_{k-1,k} & D_{k-1,k+1}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & D_{k,k+1}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix},$$

其中

$$D'_{1,k+1} = D_{1,k+1} - \left(D_{12}E_{2,k+1} - E_{1k}D_{k,k+1}\right)。$$

现设待定的矩阵 E_{1k} 为

$$E_{1k} = \begin{pmatrix} b_{k0}^1 & b_{k-1,1}^1 & b_{k-2,2}^1 & \cdots & b_{1,k-1}^1 & b_{0k}^1 \\ b_{k0}^2 & b_{k-1,1}^2 & b_{k-2,22}^2 & \cdots & b_{1,k-1}^2 & b_{0k}^2 \end{pmatrix}。$$

因为

$$D_{k,k+1}m_{k+1} = \begin{pmatrix} kx_1^{k-1} & 0 \\ (k-1)x_1^{k-2}x_2 & x_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots \\ x_2^{k-1} & (k-1)x_1x_2^{k-2} \\ 0 & kx_2^{k-1} \end{pmatrix} D_{12}m_2，$$

即

$$D_{k,k+1} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-2 & 2\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (k-1)\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k\lambda \end{pmatrix}。$$

又因为

$$E_{2,k+1}m_{k+1} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 \\ 0 & 2x_2 \end{pmatrix} E_{1k}m_k，$$

即

$$E_{2,k+1} = \begin{pmatrix} 2b_{k0}^1 & 2b_{k-1,1}^1 & 2b_{k-2,2}^1 & \cdots & 2b_{0k}^1 & 0 \\ & & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 2\lambda b_{k0}^2 & 2\lambda b_{k-1,1}^2 & \cdots & 2\lambda b_{1,k-1}^2 & 2\lambda b_{0k}^2 \end{pmatrix},$$

所以

$$D_{12}E_{2,k+1} - E_{1k}D_{k(k+1)} = \begin{pmatrix} c_{k+1,0}^1 & c_{k1}^1 & \cdots & c_{1k}^1 & c_{0,k+1}^1 \\ c_{k+1,0}^2 & c_{k1}^2 & \cdots & c_{1k}^2 & c_{0,k+1}^2 \end{pmatrix},$$

其中

$$c_{k+1,0}^1 = (2-k)b_{k0}^1，$$

$$c_{k1}^1 = \left(2-(k-1)\right)b_{k-1,1}^1，$$

$$c_{k-1,2}^1 = \left(2-(k-2)\right)b_{k-2,2}^1 - \lambda b_{k-1,1}^1，$$

$$c_{k-2,3}^1 = \left(2-(k-3)\right)b_{k-3,3}^1 - 2\lambda b_{k-2,2}^1，$$

$$c_{k-3,4}^1 = \left(2-(k-4)\right)b_{k-4,4}^1 - 3\lambda b_{k-3,3}^1，$$

$$c_{3,k-2}^{1}=-(k-3)\lambda b_{3,k-3}^{1},$$

$$c_{2,k-1}^{1}=b_{1,k-1}^{1}-(k-2)\lambda b_{2,k-2}^{1},$$

$$c_{1,k}^{1}=2b_{0k}^{1}-(k-1)\lambda b_{1,k-1}^{1},$$

$$c_{0,k+1}^{1}=-k\lambda b_{0k}^{1};$$

$$c_{k+1,0}^{2}=-kb_{k0}^{2},$$

$$c_{k1}^{2}=2\lambda b_{k,0}^{2}-(k-1)b_{k-1,1}^{2},$$

$$c_{k-1,2}^{2}=\lambda b_{k-1,1}^{2}-(k-2)b_{k-2,2}^{2},$$

$$c_{k-2,3}^{2}=-(k-3)b_{k-3,3}^{2},$$

$$c_{3,k-2}^{2}=\left(2-(k-3)\right)\lambda b_{3,k-3}^{2}-2b_{2,k-2}^{2},$$

$$c_{2,k-1}^{2}=\left(2-(k-2)\right)\lambda b_{2,k-2}^{2}-b_{1,k-1}^{2},$$

$$c_{1k}^{2}=\left(2-(k-1)\right)\lambda b_{1,k-1}^{2},$$

$$c_{0,k+1}^{2}=(2-k)\lambda b_{0k}^{2}。$$

令 $b_{0k}^{1}=-\frac{1}{k}a_{0,k+1}^{1}$, 则由以上递推关系和给定的 $D_{1,k+1}$ 我们可以依次得出直到 $b_{k-1,1}^{1}$ 的值，再令 $b_{k0}^{1}=\frac{1}{2-k}a_{k+1,0}^{1}$ 则可给出 E_{1k} 的第一行，同理我们令 $b_{k0}^{2}=-\frac{a_{k+1,0}^{2}}{k}$，则由以上递推关系和给定的 $D_{1,k+1}$ 我们可以依次得出直到 $b_{1,k-1}^{2}$ 的值，再令 $b_{0k}^{2}=\frac{1}{(2-k)\lambda}a_{0,k+1}^{2}$，则可给出 E_{1k} 的第二行。从而我们可以得到

$$D_{1,k+1}'=D_{1,k+1}-\left(D_{12}E_{2,k+1}-E_{1k}D_{k(k+1)}\right)=\begin{pmatrix}0&*&0&\cdots&0&0&0\\0&0&0&\cdots&0&*&0\end{pmatrix},$$

其中“*”表示仅有可能的非零元素，所以 $D_{1,k+1}'$ 可化为至多有 2 项不为 0，这表明当 $k\geq 4$ 时，系统(3.1)的 $k+1$ 阶正规形中的非零参数最多有 2 个。

综上，我们得到系统(3.1)的正规形定理如下：

定理 考虑形式为(3.1)的广义鞍结动力系统，它的矩阵表示为(3.1)。对任意的正整数 $j\geq 3$，我们可以约化系统到一个正规形 $\mathrm{Der}_m\left(0,D_{12},D_{13}',D_{14}',\cdots,D_{1j}',\cdots\right)$，其中 D_{1j}' 是变换后系统 j 次齐次多项式的系数矩阵。当 $j=3$ 时，D_{13}' 中最多含 4 个非零元素，当 $j\geq 4$ 时，D_{1j}' 中最多含 2 个非零元素。

致 谢

本文得到浙江省自然科学基金(LY15A010021)资助。

参考文献 (References)

[1] Guckenheimer, J. and Holmes, P. (1993) Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems; and Bifurcations of Vector Fields. 4th Edition, Springer-Verlag, New York.

[2] Nayfeh, A. (1993) Method of Normal Forms. John Wiley & Sons, New York.

[3] Chow, S.N., Li, C. and Wang, D. (1994) Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields. Cambridge University Press, Cambridge. http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511665639

[4] Niu, B., Guo, Y. and Jiang, W. (2015) An Approach to Normal Forms of Kuramoto Model with Distributed Delays and the Effect of Minimal Delay. *Physics Letters A*, **379**, 2018-2024. http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2015.06.028

[5] Chow, S.N. and Hale, J.K. (1982) Methods of Bifurcation Theory. Springer, New York. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4613-8159-4

[6] Takens, F. (1974) Singularities of Vector Fields. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, **43**, 47-100. http://dx.doi.org/10.1007/BF02684366

[7] Elphick, C., Tirapegui, E., Brachet, M.E., Coullet, P. and Iooss, G. (1987) A Simple Global Characterization for Normal Forms of Singular Vector Fields. *Physica D*: *Nonlinear Phenomena*, **29**, 95-127. http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789(87)90049-2

[8] Chua, L.O. and Kokubu, H. (1988) Normal Forms for Nonlinear Vector Fields. Part I: Theory and Algorithm. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, **35**, 863-880. http://dx.doi.org/10.1109/31.1833

[9] Bruno, A.D. (1989) Local Method in Nonlinear Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-61314-2

[10] Chen, G.T. and Dora, J.D. (2000) Further Reduction of Normal Forms for Dynamical Systems. *Journal of Differential Equations*, **166**, 79-106. http://dx.doi.org/10.1006/jdeq.2000.3783

[11] Tsiligiannis, C.A and Lyberatos, G. (1989) Normal Forms, Resonance and Bifurcation Analysis via the Carleman Linearization. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **139**, 123-138. http://dx.doi.org/10.1016/0022-247X(89)90233-3

[12] Chen, G.T. and Dora, J.D. (2000) An Algorithm for Computing a New Normal Form for Dynamical Systems. *Journal of Symbolic Computation*, **29**, 393-418. http://dx.doi.org/10.1006/jsco.1999.0305

[13] Cushman, R. and Sanders, J. (1990) A Survey of Invariant Theory Applied to Normal Forms of Vector Fields with Nilpotent Linear Part. In: *Proceedings of Invariant Theory*, New York, Springer, 82-106.

[14] Chen, G.T. and Dora, J.D. (1991) Nilpotent Normal Form for Systems of Nonlinear Differential Equations: Algorithm and Examples. Rapport de Recherche RR 838 M, France, Universite de Grenoble 1.

[15] Algaba, A., García, C. and Giné, J. (2013) Analytic Integrability for Some Degenerate Planar Systems. *Communications on Pure and Applied Analysis* (*CPAA*), **12**, 2797-2809. http://dx.doi.org/10.3934/cpaa.2013.12.2797

[16] Algaba, A., García, C. and Giné, J. (2014) Analytic Integrability for Some Degenerate Planar Vector Fields. *Journal of Differential Equations*, **257**, 549-565. http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2014.04.010