Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2016, 5(1), 74-78**
Published Online February 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.51011

The Mathematics Thought in Linear Algebra

Ling Wang

College of Sciences, North China University of Science and Technology, Tangshan Hebei
Email: wangl1216@ncst.edu.cn

Received: Feb. 2nd, 2016; accepted: Feb. 23rd, 2016; published: Feb. 26th, 2016

Abstract

Linear algebra is an important mathematical course in the University, is also on the indispensable part of the postgraduate entrance exam. Many concepts have strong logic and abstraction which have made the students many difficulties in the study. Combined with linear algebra teaching practice, this paper makes a simple summary of several important mathematical ideas in the course of linear algebra.

Keywords

Linear Algebra, Mathematical Thought, Teaching Method, Mathematics Quality

浅析线性代数中的几个数学思想

王　玲

华北理工大学理学院，河北　唐山
Email: wangl1216@ncst.edu.cn

收稿日期：2016年2月2日；录用日期：2016年2月23日；发布日期：2016年2月26日

摘　要

线性代数作为大学中的一门重要数学课程，也是研究生入学考试的必考内容。很多概念具有较强的逻辑性和抽象性，这些概念即是线性代数教学的重点也是难点，给学生的学习和运用制造了很多困难。本文结合线性代数教学实践，对线性代数课程中几个重要的数学思想做个简单总结，希望引起广大教学工作

文章引用: 王玲. 浅析线性代数中的几个数学思想[J]. 应用数学进展, 2016, 5(1): 74-78.
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.51011

者的讨论。

关键词

线性代数，数学思想，教学方法，数学素养

1. 引言

线性代数作为大学中的一门重要数学课程，也是研究生入学考试的必考内容。很多概念具有较强的逻辑性和抽象性，这些概念即是线性代数教学的重点也是难点，给学生的学习和运用制造了很多困难。一部分学生虽然硬性的记住了结论和方法，即使机械地解决了一些问题，但并没有真正理解这些方法，更不能解释为什么这么做就是对的。为了从根本上解决线性代数的教与学的困难，数学教育工作者和一线教师们都做了很多研究工作。大家普遍认为在教学过程中应该注意引导学生体会并应用每个数学概念中蕴含的数学思想，从而更好的掌握所学知识，提高学生的数学思维能力，改善其数学素养。本文结合线性代数教学实践，对线性代数课程中几个重要的数学思想做个简单总结，希望引起广大教学工作者的讨论。

2. 类比思想

矩阵实际上是一个矩形数表，学生对矩阵的概念比较陌生，是新知识，但是对实数不陌生，所以在引入矩阵的概念后，类比实数的运算，定义了矩阵的运算并研究了它的运算律，其中有符合实数运算思维的，也有不符合的。学生可进行类比记忆并应用。

如矩阵的加法运算及交换律、结合律等都与实数的相符。类比实数中的单位数 1，矩阵中有单位矩阵 E_n，并且单位矩阵 E_n 与单位数 1 有相同的性质 $E_nA = AE_n = A$，在应用过程中也很灵活，很巧妙。类比实数中的特殊数值 0，矩阵中有零矩阵。类比实数的乘法运算中的一条重要性质：“如果实数 $\frac{1}{a}\cdot a = a\frac{1}{a} = 1$，$\frac{1}{a}$ 称为 a 的倒数，也记作 a^{-1}”，引进逆矩阵：“设是 nn 阶方阵，若存在 n 阶方阵 B，使得 $AB = BA = E$，则称方阵 A 是可逆的，并称矩阵为 AA 的逆矩阵，记作 A^{-1}”。在判断方阵 A 是否可逆时，类比若则 aa 有倒数，对于矩阵有若 $|A| \neq 0$，则 A 可逆等等。

矩阵是个新概念，虽然由数组成，但毕竟不是数，自然也就有很多与数不一样的地方，如矩阵无除法运算；在矩阵的乘法运算中，着实颠覆了数的乘法运算法则，由此产生的运算律也有很大不同。如矩阵乘法不满足交换律，即“$AB \neq BA$”；也不满足消去律，即“由且 $A \neq 0A \neq 0$，不能得出 $B = C$”。另外单位矩阵 E_n 虽然与单位数 1 有很多类似的地方，但是也有不同的地方，如单位数 1 是唯一的，但是单位矩阵不唯一，因阶数不同有无穷个，应用时应注意选择阶数等。

在学习向量空间时，由于向量空间实际上是满足一定条件的 n 维向量组的集合，所以向量空间具有向量组的所有性质，只是一些量的名称换了。在授课时可以先给出向量空间的定义，然后采用类比方法给出其他量的定义，如表 1。

这样学生就感觉是旧知识，新叫法，难度降低了，接受起来也就容易了。

类似的还有：矩阵间的三种关系——等价、相似、合同，矩阵等价与向量组等价，向量组的线性相关与线性无关，线性方程组解的判定等知识，都可以通过比较法进行讲授，使学生易于掌握，并且还可以把单个的知识点穿成串，更容易体会知识的连贯性与相通性，提高综合分析能力[1] [2]。

Table 1. Vectors and vector space concepts
表 1. 向量组与向量空间概念类比

向量组 V	向量空间 V
最大线性无关组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$	基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$
两两正交的单位向量组	标准正交基
秩为 r	维数为 r
向量用最大线性无关组线性表示 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r$	向量在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 下的坐标 $(x_1,x_2,\cdots,x_r)$
最大无关组不唯一	基不唯一

3. 归纳和总结的思想

线性代数整本书都是围绕矩阵展开的，先是研究矩阵，然后是以矩阵为工具去求解线性方程组，进而研究向量、向量空间和二次型。但是拨开各种掩饰的外衣，去寻求问题的本质，线性代数实际上是按照“一般矩阵-方阵-实对称矩阵”这种从一般到特殊的思路去研究矩阵的。如先是给出了矩阵的概念及运算(一般矩阵)，又研究了行列式和矩阵的逆(这是方阵特有的)；先研究了方阵的特征值、特征向量，又研究了实对称矩阵的相似对角化、二次型(与实对称矩阵一一对应)；先研究矩阵的相关性质，又研究向量、向量组(一种特殊的矩阵)，进而研究向量空间(特殊的向量组)。

在处理某些具体知识点时，又遵循了从特殊到一般的研究规律。如求行列式的值时，先求二阶、三阶行列式，进而寻找规律，定义一般行列式的计算公式；再如在判断方程组什么时候无解，什么时候有唯一解、无穷多解时先是通过几个具体的方程组求解，然后去猜测规律，再证明猜测，进而得到方程组有、无解的一般规律。这样得出的结论学生容易理解，并且证明过程也“呼之欲出”[3]。

4. 划归思想

线性代数中矩阵的内容强调矩阵是一个非常好的工具，是线性代数的基础内容。线性代数中研究的其他问题都可以转化成矩阵问题。如线性方程组求解，首先由系数、常数组成增广矩阵，然后对增广矩阵进行初等行变换化为行阶梯型矩阵，然后求秩判断方程组解的情况。研究向量组的秩及最大线性无关组时，是把每个向量作为矩阵的列向量组成矩阵，然后进行研究。研究二次型时先转化成对称矩阵，然后把对称矩阵合同对角化，进而得到二次型的标准型。解决实际问题时，先根据题意提炼出矩阵，然后对矩阵进行处理，再利用最终的化简结果去解释实际问题等等。

线性代数中的转化，既可以看成是把不会的、不熟悉的问题转化成会的、熟悉的问题，也可以看成是一种语言的转换，还可以看出知识的相通性。抓住事物的本质，本质问题解决了，其他问题也就迎刃而解了。所以学生只要弄透了矩阵的相关内容，线性代数这门课也就学好了。

5. 函数思想

函数思想就是把问题经过适当的数学变化和构造，使一个非函数的问题转化为函数的形式，并运用函数的性质来处理这一问题，是一种重要的数学思想方法。函数思想在线性代数课程中有着广泛的应用，其中行列式是渗透数学思想知识点及方法技能的最佳交汇。行列式是数也是式，行列式的计算和证明中蕴含着丰富的函数思想[4]。

利用多项式带余除法思想：

例 1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$，计算 $g(A)=2A^8-3A^5+A^4+A^2-14E$ 。

解析：记 $g(x)=2x^8-3x^5+x^4+x^2-14$，矩阵 A 的特征多项式

$$f_A(x)=x^3-2x+1。$$

由带余除法，得

$$g(x)=(x^3-2x+1)(2x^5+4x^3-5x^2+9x-14)+24x^2-37x=f_A(x)q(x)+r(x)$$

由 Hamilton-Cayley 定理，得 $f_A(A)=0$，从而有

$$g(A)=r(A)=24A^2-37A=\begin{pmatrix}-13 & -24 & -37\\ 0 & 24 & 61\\ 0 & 61 & 85\end{pmatrix}。$$

利用多项式函数的相等定义：

例 2. 设 a，b，c 是互异的数，证明：

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow a+b+c=0。$$

解析：D_3 与范德蒙行列式十分接近，只要把第三行换成 $\begin{pmatrix}a^2 & b^2 & c^2\end{pmatrix}$，所以很自然的想到把 D_3 改造成范德蒙行列式，然后再利用函数思想从两者的联系中去求 D_3。构造 4 阶范德蒙行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & x\\ a^2 & b^2 & c^2 & x^2\\ a^3 & b^3 & c^3 & x^3\end{vmatrix}=D(a,b,c,x)$$

则 $D_3=M_{34}=-A_{34}$。

按范德蒙行列式公式和按第四列展开两种方法求 D_4，有

$$D_4=(b-a)(c-a)(x-a)(c-b)(x-b)(x-c)=1\cdot A_{14}+x\cdot A_{24}+x^2A_{34}+x^3\cdot A_{44},$$

所以是 x^2x^2 的系数的相反数，而 x^2 的系数为

$$-(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)。$$

所以

$$D_3=(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c),$$

故

$$D_3=0\Leftrightarrow a+b+c=0。$$

6. 总结

本文对线性代数教学过程中涉及的几个重要数学思想方法做了简单的剖析，通过在这方面的持续努力，已经在教学效果上得到了积极的效果，但这远不是全部。我们希望起到抛砖引玉的作用，引起广大教学工作者的讨论，共同学习和提高线性代数的教学水平。

基金项目

河北省精品课程《线性代数》。

参考文献 (References)

[1] 蒋卫华, 王洪滨. 线性代数教学中两组概念的处理[J]. 大学数学, 2005, 21(1): 120-122.

[2] 赵慧斌. 问题驱动是线性代数有效的教学法之一[J]. 高等数学研究, 2008, 11(4): 91-94.

[3] 吴忠怀. 也谈结合实际使线性代数变得具体[J]. 数学教学与研究, 2008(43): 76-77.

[4] 陈建华, 李立斌. 浅析用函数思想解线性代数问题[J]. 大学数学, 2008, 24(5): 144-148.