Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2016, 5(2), 208-213
Published Online May 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.52027

Hans汉斯

Stability Analysis of a Competition or Cooperation Dynamic Model among Shoal of Fish

Xiya Shen, Binbin Wang*, Hailiang Zhang

Department of Mathematics, Zhejiang Ocean University, Zhoushan Zhejiang
Email: *18368095189@163.com

Received: Apr. 22nd, 2016; accepted: May 10th, 2016; published: May 13th, 2016

Abstract

To analyze shoal of fish that is cooperation at low density, but is competition at high density, we establish the fish competition or cooperation motivation model. And combining the fish competition or cooperation motivation model, we establish differential equation stability theory, analyze the stability of the equilibrium point, and give two fish coexistence of multiple stability conditions. The shoal evolution of biological explanation is also given eventually.

Keywords

Competition or Cooperation, Dynamic Model, Stability Analysis

鱼群竞争合作动力学模型的稳定性分析

沈希雅，王斌斌*，张海亮

浙江海洋大学数学系，浙江 舟山
Email: *18368095189@163.com

收稿日期：2016年4月22日；录用日期：2016年5月10日；发布日期：2016年5月13日

*通讯作者。

文章引用：沈希雅，王斌斌，张海亮. 鱼群竞争合作动力学模型的稳定性分析[J]. 应用数学进展, 2016, 5(2): 208-213.
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.52027

摘　要

本文通过对低密度时合作而高密度时竞争的鱼群进行研究，建立了鱼群竞争合作的动力学模型，并结合微分方程稳定性理论，分析了平衡点的稳定性，从而给出鱼群共存的稳定性条件。并在文章最后给出了鱼群演化的生物学解释。

关键词

竞争合作，动力学模型，稳定性分析

1. 引言

Lotka-Volterra 合作种群模型[1] [2]与 May 合作种群模型是一类经典的种群模型，许多学者已经对此进行了大量的研究。但对于具体的生态学背景，比如鱼群来说，仍然潜藏许多具有研究价值的东西。因此，建立一类具有鱼群特点的模型来准确研究鱼群的分布机理是有必要的。现已知鱼群在低密度时是合作的，高密度时是竞争的，那么有没有类似的动力学模型来描述这一现象呢？

生态数学的种间关系一直是种群研究和群落生态学的热门话题。为了解决如何分析在低密度时是合作的，高密度时是竞争的鱼群的分布机理问题，建立了鱼群竞争合作的动力模型，并通过分析该模型的稳定性来探究对应的鱼群的演化机理。

2. 鱼群竞争合作模型的建立

注意到鱼群在低密度时是合作的，高密度时是竞争的这一类特殊现象。虽然 Lotka-Volterra 合作种群模型与 May 合作种群模型是一类经典的种群模型，但是它们并不能准确的描述此类现象。因此建立的鱼群竞争合作的动力模型[3] [4]如下：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x\left(r - kx + \left(a - cy\right)y\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y\left(R - Kx + \left(b - dx\right)x\right) \end{cases} \tag{1}$$

其中 x、y 分别表示鱼群甲、乙在时间 t 的种群密度，r、R 分别表示鱼群甲、乙的固有增长率，k、K 分别表示鱼群甲、乙的种内竞争系数，项 $a-cy$ 表示鱼群乙对鱼群甲的种间作用，项 $b-dx$ 表示鱼群甲对鱼群乙的种间作用。

现假设 a,b,c,d 都是非负的，这意味着高密度时两个种群是竞争的，低密度时两个种群是互利共生的。

基于 Lotka-Volterra 的竞争模型[1]，假定固有增长率 r、R 都是正数，方程组(1)可以不表示一个捕食者－食饵系统。假定种间相互作用不是固定不变的，它取决于系统中鱼群的密度，即

若 $y<\dfrac{a}{c}$，则 $a-cy>0$；若 $y>\dfrac{a}{c}$，则 $a-cy<0$；

若 $x>\dfrac{b}{d}$，则 $b-dx<0$；若 $x<\dfrac{b}{d}$，则 $b-dx>0$。

从而，发现种间关系有三种不同的情况：

(1) 若 $y>\dfrac{a}{c}$ 且 $x>\dfrac{b}{d}$，则两个鱼群是竞争关系。

(2) 若 $y<\dfrac{a}{c}$ 且 $x<\dfrac{b}{d}$，则两个种群是互利共生的关系。

(3) 若 $y<\frac{a}{c}$ 且 $x>\frac{b}{d}$ 或 $y>\frac{a}{c}$ 且 $x<\frac{b}{d}$，则两个种群是捕食者－食饵关系。

3. 鱼群模型的稳定性分析

讨论所建立的鱼群竞争合作模型在什么情况下可以保持系统平衡。对上述给出的鱼群竞争合作的模型(1)进行稳定性分析[1] [5]。模型(1)的定态方程组

$$\begin{cases} f_1(x,y)=x\left(r-kx+(a-cy)y\right)=0 \\ f_2(x,y)=y\left(R-Kx+(b-dx)x\right)=0 \end{cases} \tag{2}$$

由方程组(2)可以先求出三个边界平衡点，分别是：

$$A_1(0,0)，\quad A_2\left(\frac{r}{k},0\right)，\quad A_3\left(0,\frac{R}{K}\right)$$

对于这些平衡点，分别讨论它们的各自的稳定性[2]。

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x}=a_{11}=r-2kx+(a-cy)y \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}=a_{12}=x(a-2cy) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}=a_{21}=y(b-2dx) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}=a_{22}=R-2Ky+(b-dx)x \end{cases} \tag{3}$$

对于鱼群的平衡点 A_1，代入(3)式可得 $a_{11}=r$；$a_{12}=0$；$a_{21}=0$；$a_{22}=R$。

特征根方程为

$$\begin{vmatrix} r-\lambda & 0 \\ 0 & R-\lambda \end{vmatrix}=0$$

解为 $\lambda_1=r>0$；$\lambda_2=R>0$。平衡点 A_1 是不稳定的。

对于鱼群的平衡点 A_2，代入(3)式可得

$$a_{11}=-r\,;\quad a_{12}=\frac{ra}{k}\,;\quad a_{21}=0\,;\quad a_{22}=R+\frac{r}{k}\left(b-\frac{rd}{k}\right)$$

对应于特征根方程的解为

$$\lambda_1=-r<0\,;\quad \lambda_2=R+\frac{r}{k}\left(b-\frac{rd}{k}\right)$$

如果 $R+\frac{r}{k}\left(b-\frac{rd}{k}\right)>0$，那么平衡点 A_2 是不稳定的；如果 $R+\frac{r}{k}\left(b-\frac{rd}{k}\right)<0$，那么平衡点 A_2 是渐进稳定的。

当 $R+\frac{r}{k}\left(b-\frac{rd}{k}\right)=0$ 时，可以把模型(1)近似地看作：

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}t}=-r\tilde{x}+\phi(\tilde{x},\tilde{y}) \\ \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}t}=\varphi(\tilde{x},\tilde{y}) \end{cases} \tag{4}$$

其中，

$$\tilde{x}=x-\frac{r}{k}-\frac{ay}{k}；\quad \tilde{y}=y$$

$$\phi(\tilde{x},\tilde{y})=-k\tilde{x}^2-a\tilde{x}\tilde{y}-\frac{rc}{k}\tilde{y}^2-c\tilde{x}\tilde{y}^2-\frac{ac}{k}\tilde{y}^3-\frac{a}{k}\varphi(\tilde{x},\tilde{y})$$

$$\varphi(\tilde{x},\tilde{y})=-\left(K+\frac{adr}{R^2}+\frac{Ra}{r}\right)\tilde{y}^2-\left(\frac{dr}{k}+\frac{Rk}{r}\right)\tilde{x}\tilde{y}-d\tilde{x}^2\tilde{y}-2\frac{da}{k}\tilde{x}\tilde{y}^2-\frac{a^2d}{k^2}\tilde{y}^3 \tag{5}$$

根据 Carr 的中心流形理论[2]，存在 $\tilde{x}=h(\tilde{y})$，满足 $h(0)=0$ 和 $h'(0)=0$，故 $h(\tilde{y})$ 可以写成

$$h(\tilde{y})=h_2\tilde{y}^2+h_3\tilde{y}^3+\cdots$$

从而 $\tilde{x}=h(\tilde{y})$ 满足

$$-r\sum_{i=2}^{\infty}h_i\tilde{y}^i+\phi\left(\sum_{i=2}^{\infty}h_i\tilde{y}^i,\tilde{y}\right)=\left(\sum_{i=2}^{\infty}ih_i\tilde{y}^{i-1}\right)\varphi\left(\sum_{i=2}^{\infty}h_i\tilde{y}^i,\tilde{y}\right) \tag{6}$$

即系数 $h_2,h_3,\cdots$ 由式(6)决定。

从而由式(4)和式(5)，可以得出结论：

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}t}=-\left(K+\frac{adr}{R^2}+\frac{Ra}{r}\right)\tilde{y}^2+\varphi\left(h(\tilde{y}),\tilde{y}\right)$$

由于 $K+\frac{adr}{R^2}+\frac{Ra}{r}>0$，当 $R+\frac{r}{k}\left(b-\frac{rd}{k}\right)=0$ 时，平衡点 A_2 是不稳定的。

对于鱼群的平衡点 A_3，类似的可以求得：

当且仅当 $r+\frac{R}{K}\left(a-\frac{Rc}{K}\right)<0$ 时，平衡点 A_3 是渐进稳定的。

记模型(1)中的内部平衡点为 $A_4\left(x^*,y^*\right)$，满足 $x^*>0$，$y^*>0$。该平衡态满足方程[4]：

$$\begin{cases}L_1^*=r-kx^*+\left(a-cy^*\right)y^*=0\\ L_2^*=R-Ky^*+\left(b-dx^*\right)x^*=0\end{cases} \tag{7}$$

对方程 L_1^*，L_2^* 分别对 y^* 求导，移项后得：$\begin{cases}\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\left(L_1^*\right)}=\frac{k}{a-2cy^*}\\ \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\left(L_2^*\right)}=\frac{b-2dx^*}{K}\end{cases}$

对于鱼群的平衡点 $A_4\left(x^*,y^*\right)$，代入(3)式可得

$$a_{11}=r-2kx^*+\left(a-cy^*\right)y^*=\left(r-kx^*+\left(a-cy^*\right)y^*\right)-kx^*=-kx^*$$

$$a_{12}=x^*\left(a-cy^*\right)=kx^*\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x_{\left(L_1^*\right)}}\right)^{-1}$$

$$a_{21}=y^*\left(b-2dx^*\right)=Ky^*\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x_{\left(L_2^*\right)}}$$

$$a_{22}=R-2Ky^*+\left(b-dx^*\right)x^*=-Ky^*$$

解得特征根方程的特征值为：

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left[-\left(kx^*+Ky^*\right)\pm\sqrt{\left(kx^*+Ky^*\right)^2-4kKx^*y^*\left(1-\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x\left(L_1^*\right)}\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x\left(L_2^*\right)}\right)}\right]$$

(1) 当 $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x\left(L_1^*\right)}\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x\left(L_2^*\right)}<1$ 时，$A_4\left(x^*,y^*\right)$ 是渐进稳定的。

(2) 当 $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x\left(L_1^*\right)}\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x\left(L_2^*\right)}=1$ 时，可以根据 Carr 的中心流形理论(与对平衡态 A_2 的稳定性分析同理)，求得此时 $A_4\left(x^*,y^*\right)$ 是不稳定的。

(3) 当 $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x\left(L_1^*\right)}\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x\left(L_2^*\right)}>1$ 时，$A_4\left(x^*,y^*\right)$ 是不稳定的。

因此，当且仅当 $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x\left(L_1^*\right)}\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x\left(L_2^*\right)}<1$ 时，$A_4\left(x^*,y^*\right)$ 是渐进稳定的。

4. 模型分析

(1) 根据边界平衡点的稳定情况，对两个鱼群的共存有以下结论：

(i) 当 $c\le\left(\frac{K}{R}\right)^2\left(r+\frac{Ra}{K}\right)$，$d\le\left(\frac{k}{r}\right)^2\left(R+\frac{rb}{k}\right)$ 时，鱼群竞争合作的动力模型平衡点 $A_2\left(\frac{r}{k},0\right)$ 与平衡点 $A_3\left(0,\frac{R}{K}\right)$ 同时不稳定。记两个鱼群的初值分别为 x_0、y_0，若它们满足 $x_0>0$，$y_0>0$，则两个鱼群共存将总是有可能的。特别地，若 $c=0$ 且 $d=0$，即 $a-cy=a>0$，$b-dx=b>0$，则两个鱼群的种间关系是共生的。但当两个鱼群中的一个处于低密度而另外一个处于高密度的时候，即这个模型处在靠近边界平衡点的情况时，共生关系将会有助于减少对种群密度低的鱼群增长的阻力，但这并不意味着两个鱼群的共存仅仅依靠边界平衡点的稳定性。

(ii) 当 $c\le\left(\frac{K}{R}\right)^2\left(r+\frac{Ra}{K}\right)$，$d>\left(\frac{k}{r}\right)^2\left(R+\frac{rb}{k}\right)$ 时，平衡点 $A_2\left(\frac{r}{k},0\right)$ 不稳定，平衡点 $A_3\left(0,\frac{R}{K}\right)$ 渐进稳定，则系统向着 $A_3\left(0,\frac{R}{K}\right)$ 演化。鱼群乙的存在，减少鱼群甲的供养资源；而鱼群甲的存在，增加了鱼群乙的供养资源。即在供养鱼群甲的资源竞争中，乙强于甲，故鱼群甲可能面临灭绝的危险，而鱼群乙则趋于生态系统容量的最大值。

(iii) 当 $c>\left(\frac{K}{R}\right)^2\left(r+\frac{Ra}{K}\right)$，$d\le\left(\frac{k}{r}\right)^2\left(R+\frac{rb}{k}\right)$ 时，与(ii)的情况正好相反，系统向着 $A_2\left(\frac{r}{k},0\right)$ 演化。

(2) 通过对内部平衡点稳定性的分析(限制 $a<k$，$b<K$)，得出如下结论：

(i) 当 $y^*>\frac{a}{c}$ 且 $x^*>\frac{b}{d}$ 时，两个鱼群是竞争关系，且满足

$$\begin{cases}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x\left(L_1^*\right)}\right)^{-1}=\frac{a-2cy^*}{k}<\frac{-a}{k}<0\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x\left(L_2^*\right)}=\frac{b-2dx^*}{K}<\frac{-b}{K}<0\end{cases}$$

由于$\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x_{\left(L_1^*\right)}}\right)^{-1}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x_{\left(L_2^*\right)}}$可能大于 1 也可能小于 1，故$A_4\left(x^*,y^*\right)$可能稳定也可能不稳定。

(ii) 当$y^*<\dfrac{a}{c}$且$x^*<\dfrac{b}{d}$时，两个鱼群是互利共生的关系，且满足

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x_{\left(L_1^*\right)}}\right)^{-1}>\frac{-a}{k}\text{ 和 }\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x_{\left(L_2^*\right)}}>\frac{-b}{K}$$

由于$\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x_{\left(L_1^*\right)}}\right)^{-1}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x_{\left(L_2^*\right)}}<1$，故$A_4\left(x^*,y^*\right)$是渐近稳定的。

(iii) 当$y^*<\dfrac{a}{c}$且$x^*>\dfrac{b}{d}$或$y^*>\dfrac{a}{c}$且$x^*<\dfrac{b}{d}$时，两个鱼群是捕食者－食饵关系，从而可得$A_4\left(x^*,y^*\right)$是渐近稳定的。

参考文献 (References)

[1] 王高雄, 等. 常微分方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[2] 林振山. 种群动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2006.

[3] Zhang, Z. (2003) Mutualism or Cooperation among Competitors Promotes Coexistence and Competitive Ability. *Ecological Modelling*, **164**, 271-282. http://dx.doi.org/10.1016/S0304-3800(03)00069-3

[4] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[5] 陈凤德, 谢向东. 合作种群模型动力学研究[M]. 北京: 科学出版社, 2014.