

On the Anti-Forcing Number of $C_m \times P_k$

Yongjun Zhang, Jinzhuan Cai*

Department of Mathematics, Hainan University, Haikou Hainan
Email: caijzh12@163.com

Received: Aug. 15th, 2016; accepted: Aug. 27th, 2016; published: Aug. 30th, 2016

Copyright © 2016 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

Let G be a simple connected graph with a perfect matching, S an edge set of G . We call S an anti-forcing set of G , if $G - S$ contains only one perfect matching of G . The cardinality of the minimum anti-forcing set of G is called the anti-forcing number of G . In this paper, we study the anti-forcing number of the Cartesian product of a cycle and a path. According to the necessity of a graph with only one perfect matching, we show that the anti-forcing numbers of $C_3 \times P_{2k}, C_{2k+1} \times P_2, C_4 \times P$ are all $k + 1$, and the anti-forcing number of $C_{2k} \times P_2 (k \geq 2)$ is 3.

Keywords

The Cartesian Product of a Cycle and a Path, Perfect Matching, Anti-Forcing Numbers

关于 $C_m \times P_k$ 的反强迫数

张勇军, 蔡金转*

海南大学数学系, 海南 海口
Email: caijzh12@163.com

收稿日期: 2016年8月15日; 录用日期: 2016年8月27日; 发布日期: 2016年8月30日

摘要

设 G 是一个有完美匹配的简单连通图。若 G 的一个边子集 S 满足 $G - S$ 只有唯一完美匹配, 则称 S 是 G

*通讯作者。

的一个反强迫集。 G 中最小的反强迫集的大小称为 G 的反强迫数。本文主要研究圈和路的卡什积图的反强迫数。根据一个图有唯一完美匹配的必要条件, 我们证明了 $C_3 \times P_{2k}$, $C_{2k+1} \times P_2$, $C_4 \times P$ 的反强迫数都为 $k+1$, 并表明了 $C_{2k} \times P_2$ ($k \geq 2$) 的反强迫数恒为 3。

关键词

圈和路的卡什积图, 完美匹配, 反强迫数

1. 引言

图 G 的完美匹配 M 是指覆盖了 G 的所有顶点的一个独立边集, 它对应于化学中的凯库勒结构。Randic 和 Klein 对凯库勒结构提出了内自由度的概念[1] [2], 图的完美匹配对应地也有强迫数这一概念[3]。一个边集 S 称为图 G 的完美匹配 M 的强迫集是指 S 只包含在 M 中, 但不包含在其它完美匹配中。 M 的最小的强迫集的大小称为 M 的强迫数。近年来, 化学图论专家针对图的完美匹配又陆续提出了强迫六角形, 全局强迫数, 反凯库勒数和反强迫数等概念。其中, 反强迫数的概念最早是由 Vukicevic 和 Trinajstic 提出来的[4]。

若图 G 一个边集 S 满足 $G-S$ 只有唯一完美匹配, 则称 S 为图 G 的反强迫集。图 G 最小的反强迫集的大小称为 G 的反强迫数, 并用 $af(G)$ 表示。目前, 有关反强迫数的结论较少, 主要是针对一些图类进行研究。Vukicevic 和 Trinajstic 证明了平行四边形结构六角系统的反强迫数为 1 [4]。随后, 六角形链[5], 双六角形链[6], 一类由四边形和六边形构成的 cata 型图(cata-condensed Phenylenes) [7], 富勒烯[8], 管状硼氮富勒烯图[9]的反强迫数先后得到确定。

设 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$ 是两个图。两个图 G_1 和 G_2 的卡什积图, 记为 $G_1 \times G_2$, 是一个以 $V_1 \times V_2$ 为顶点集的图, 且其中顶点 (u_1, v_1) 和 (u_2, v_2) 有边相连当且仅当 $u_1 = u_2$ 且 $v_1 v_2 \in E_2$ 或 $v_1 = v_2$ 且 $u_1 u_2 \in E_1$ 。

本文主要研究圈和路的卡什积图的反强迫数。我们用 C_m 和 P_k 分别表示顶点数为 m 和 k 的圈和路。本文第一部分根据非二部图有唯一完美匹配的的必要条件, 证明了 $C_3 \times P_{2k}$ 和 $C_{2k+1} \times P_2$ 的反强迫数都为 $k+1$ 。第二部分根据二部图有唯一完美匹配的的必要条件, 得到 $C_4 \times P_k$ 的反强迫数为 $k+1$ 。对 $C_{2k} \times P_2$ ($k \geq 2$), 我们证明了其反强迫数恒为 3。

2. 奇长圈和路的卡什积图的反强迫数

为了保证有完美匹配, 我们只讨论 $C_{2m+1} \times P_{2k}$ 的情形。此部分主要基于以下关于一个图有唯一完美匹配的的必要条件。

引理 2.1 [10] 若一个连通图 G 恰好有一个完美匹配, 则 G 有一条割边属于此完美匹配。

定理 2.2 $af(C_3 \times P_2) = 2$

证明 易见, 去掉图 1 中所示的内外两个三角形之间的两条虚线标记的边后, 因为内外两个三角形之间必须有奇数条匹配边, 所以内外两个三角形之间剩余的边必须是匹配边, 这样我们可确定出 $C_3 \times P_2$ 的余子图中的唯一完美匹配。于是这两条虚边构成 $C_3 \times P_2$ 的一个反强迫集, 从而 $af(C_3 \times P_2) \leq 2$ 。另外, 设 S 是 $C_3 \times P_2$ 的一个最小的反强迫集, 则 $C_3 \times P_2 - S$ 只有唯一完美匹配。根据引理 2.1, $C_3 \times P_2 - S$ 有一条割边, 而 $C_3 \times P_2$ 的边割大小至少是 3, 为产生一条割边, $C_3 \times P_2$ 至少需要去掉两条边, 即 $|S| \geq 2$ 。于是 $af(C_3 \times P_2) = 2$ 得证。■

设 M 为图 G 的一个完美匹配。一个圈称为 G 的 M -交替圈是指圈中的边由 M 和非 M 的边交替组成。因为通过交换交替圈中的匹配边和非匹配边, 我们可以得到 G 的另一个完美匹配, 所以我们有以下结论:

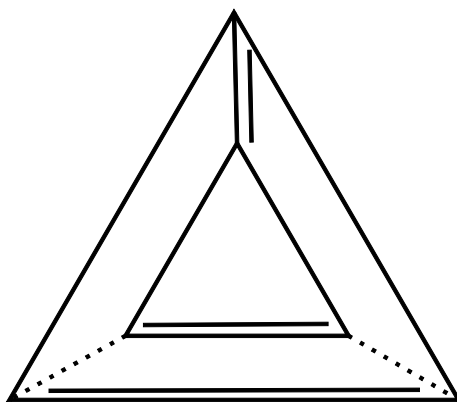


Figure 1. The dashed lines form an anti-forcing set
图 1. 虚线所示边构成一个反强迫集

引理 2.3 设 S 为图 G 的一个边子集。若 $G - S$ 只包含 G 的唯一完美匹配 M , 则 $G - S$ 没有 M -交替圈。

为了后面讨论方便, 我们先给 $C_3 \times P_{2k}$ 的点和边进行标记(见图 2), 我们称 $\{u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1}, w_i w_{i+1}\}$ 为 $C_3 \times P_{2k}$ 的第 i 层 ($1 \leq i \leq 2k-1$), 记为 L_i 。当 i 为奇(偶)数时, 我们称 L_i 为 $C_3 \times P_{2k}$ 的奇(偶)层。我们称属于 $C_3 \times P_{2k}$ 某层的边为路边, 不属于任一层的边称为圈边。

利用数学归纳法, 我们可以证明以下结论:

定理 2.4 $af(C_3 \times P_{2k}) = k + 1$ ($k \geq 1$)

证明 令 $S = \{u_1 u_2, w_1 w_2, u_2 w_2, u_4 w_4, \dots, u_{2k-2} w_{2k-2}\}$ (见图 2 虚线标记的边), 下证 S 为 $C_3 \times P_{2k}$ 的一个反强迫集。因为 $C_3 \times P_{2k}$ 的奇数层之间必须有奇数条匹配边, 所以第一层 L_1 中剩余的边 $v_1 v_2$ 必须是匹配边。则 $u_1 w_1$ 此时也可确定为匹配边。又因为在 L_2 中去掉了 $u_2 w_2$, 所以 L_2 中只有 $u_1 u_2, w_1 w_2$ 可作为匹配边。依次匹配下去, 可知 $C_3 \times P_{2k} - S$ 的唯一完美匹配(见图 2)为

$M_0 = \{u_1 w_1, v_1 v_2, u_2 u_3, w_2 w_3, \dots, v_{2k-3} v_{2k-2}, u_{2k-2} u_{2k-1}, w_{2k-2} w_{2k-1}, v_{2k-1} v_{2k}, u_{2k} w_{2k}\}$, 由 $|S| = k + 1$ 知 $af(C_3 \times P_{2k}) \leq k + 1$ 。

下面对 k 用数学归纳法证明 $af(C_3 \times P_{2k}) \geq k + 1$ 。

当 $k = 1$ 时, 由定理 2.2 知结论成立。假设结论对所有小于 k 的情形成立, 下面对 $C_3 \times P_{2k}$ 进行讨论。设 S 是 $C_3 \times P_{2k}$ 的一个最小的反强迫集, 则 $C_3 \times P_{2k} - S$ 只有唯一完美匹配, 记为 M 。下面我们分两种情况进行讨论:

情形 1. 存在某个 l , 使得 $\{u_{2l} u_{2l+1}, v_{2l} v_{2l+1}, w_{2l} w_{2l+1}\} \notin M$, 即偶层 L_{2l} 不含匹配边。

此时 $C_3 \times P_{2k} - \{u_{2l} u_{2l+1}, v_{2l} v_{2l+1}, w_{2l} w_{2l+1}\}$ 可分解为两个三长圈和路的卡什积图, 分别记为 $C_3 \times P_{2l}$ 和 $C_3 \times P_{2m}$, 其中 $2l + 2m = 2k$ 。根据假设, M 也分解为两部分 M_1 和 M_2 , 分别为 $C_3 \times P_{2l}$ 和 $C_3 \times P_{2m}$ 的完美匹配。记 $S_1 = S \cap E(C_3 \times P_{2l})$, $S_2 = S \cap E(C_3 \times P_{2m})$ 。因为 $M = M_1 \cup M_2$ 是 $C_3 \times P_{2k} - S$ 的唯一完美匹配, 故 M_1 和 M_2 也分别为 $C_3 \times P_{2l} - S_1$ 和 $C_3 \times P_{2m} - S_2$ 中的唯一完美匹配。于是 S_1 和 S_2 分别为 $C_3 \times P_{2l}$ 和 $C_3 \times P_{2m}$ 的反强迫集。根据归纳假设, $|S_1| \geq l + 1$, $|S_2| \geq m + 1$ 。从而 $|S| \geq |S_1| + |S_2| \geq l + m + 2 = k + 2 > k + 1$ 。

情形 2. $C_3 \times P_{2k}$ 的每个偶层都至少有一条边是匹配边。

因为 $C_3 \times P_{2k}$ 的每个完美匹配只能包含每个偶层的偶数条边, 所以 M 与每个偶层都交于恰好 2 条边。不妨假设 $\{u_{2l} u_{2l+1}, w_{2l} w_{2l+1}\} \subseteq M$, 则 $v_{2l} v_{2l+1} \notin M$, 故 $v_{2l-1} v_{2l}, v_{2l+1} v_{2l+2} \in M$, 依此类推, 我们可确定 $M = \{u_1 w_1, v_1 v_2, u_2 u_3, w_2 w_3, \dots, v_{2k-3} v_{2k-2}, u_{2k-2} u_{2k-1}, w_{2k-2} w_{2k-1}, v_{2k-1} v_{2k}, u_{2k} w_{2k}\}$ 为(见图 2) $C_3 \times P_{2k} - S$ 的唯一完美匹配, 交每个偶层恰好两条边, 每个奇层一条边。

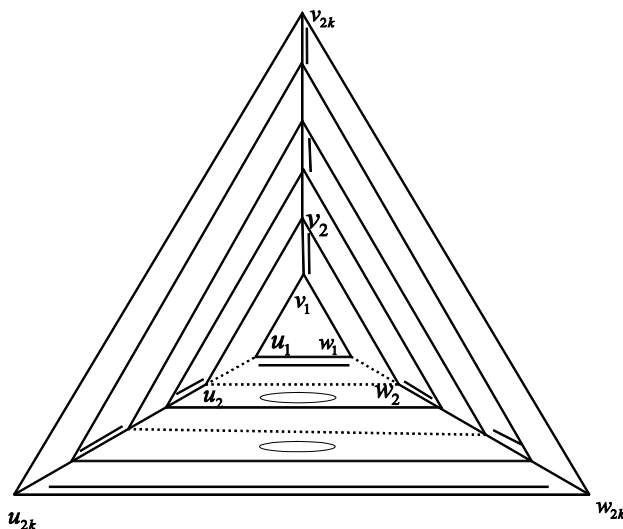


Figure 2. Illustration for the proof of Theorem 2.4
图 2. 定理 2.4 的证明示意图

注意到匹配边 $u_{2l}u_{2l+1}, w_{2l}w_{2l+1}$ 所在的四边形是一个 M 交替圈, 根据引理 2.3, 该四边形的两条圈边 $\{u_{2l}w_{2l}, u_{2l+1}w_{2l+1}\}$ 至少有一条属于反强迫集 S 。因为 $C_3 \times P_{2k}$ 共有 $k-1$ 个偶层, 故 $C_3 \times P_{2k}$ 共有 $k-1$ 个这样的 M 交替四边形。每个交替四边形至少有一条圈边属于 S 。在每个交替四边形各取一条圈边, 记这些圈边构成的集合为 S' , 则 $S' \subseteq S$ 且 $|S'| = k-1$ 。进一步, 因为 $C_3 \times P_{2k} - S$ 只有唯一完美匹配, 根据引理 2.1, $C_3 \times P_{2k} - S$ 有一条割边。而 $C_3 \times P_{2k} - S'$ 的最小边割是 3, 故至少还需要去掉 $C_3 \times P_{2k} - S'$ 的两条边才能产生一条割边。于是 $|S| \geq |S'| + 2 = k+1$ 。

综上, $|S| = k+1$ 。证毕。■

对于一般奇长圈的卡什积图, 我们给出了结论:

定理 2.5 $af(C_{2k+1} \times P_2) = k+1 (k \geq 2)$

证明 标记 $C_{2k+1} \times P_2$ 的点和边(见图 3(a))。令 $S = \{u_1u_2, u_1v_1, u_2v_2, u_4v_4, \dots, u_{2k-2}v_{2k-2}\}$, 则 $C_{2k+1} \times P_2 - S$ 有两条悬挂边(一条边称为一个图的悬挂边是指该边恰有一个端点度数为 1) u_1u_{2k+1}, u_2u_3 可先确定为匹配边, 接着可确定 u_4u_5 为匹配边, 依次匹配下去, 直到点 u_{2k} , 它只能与 v_{2k} 匹配。接着确定匹配边 $v_{2k-1}v_{2k-2}$, 依次匹配下去可确定 $C_{2k+1} \times P_2 - S$ 中的唯一完美匹配

$M = \{u_1u_{2k+1}, u_2u_3, u_4u_5, \dots, u_{2k-2}u_{2k-1}, u_{2k}v_{2k}, v_{2k-1}v_{2k-2}, v_{2k-3}v_{2k-4}, \dots, v_2v_1, v_1v_{2k+1}\}$ 。则 S 是一个反强迫集, $af(C_{2k+1} \times P_2) \leq k+1$ 。

下证 $af(C_{2k+1} \times P_2) \geq k+1$: 设 S 是 $C_{2k+1} \times P_2$ 的一个最小反强迫集, M 是 $C_{2k+1} \times P_2 - S$ 的唯一完美匹配。设 $C_{2k+1} \times P_2$ 恰有 t 条路边为匹配边(t 为奇数)。除这 t 条边, 其余匹配边都是圈边并且包含在 $\frac{2k+1-t}{2}$ 个不交的 M -交替 4 边形中。根据引理 2.3, 这些 M -交替 4 边形至少有一条路边属于 S 。在每个交替 4 边形各取一条路边, 记这些路边构成的集合为 S' , 则 $S' \subseteq S$ 且 $|S'| = \frac{2k+1-t}{2}$ 。另外, 当 $t \geq 3$ 时, 任两条相邻的匹配路边和它们之间的所有圈边也构成一个 M -交替圈。根据引理 2.3, 这些 M -交替圈至少有一条非匹配的圈边属于 S (见图 3(b)), 于是 $|S| \geq |S'| + t = k + \frac{t+1}{2} \geq k+1$ 。而当 $t=1$ 时, 该匹配路边和 $C_{2k+1} \times P_2$ 的所有匹配圈边也确定一个 M -交替圈, 且该圈不交于 S' (见图 3(c))。根据引理 2.3, 该 M -交替圈至少有一条非匹配的边属于 S , 于是 $|S| \geq |S'| + 1 = k+1$ 。■

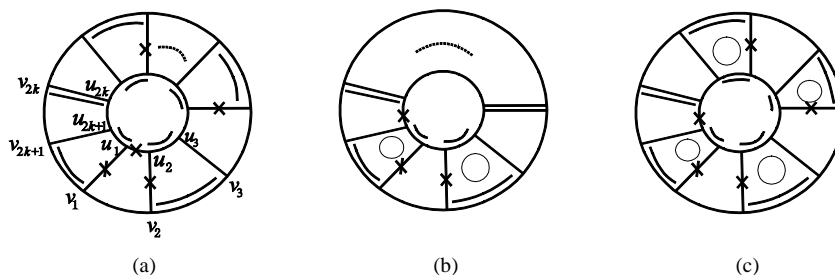


Figure 3. Illustration for the proof of Theorem 2.5
图 3. 定理 2.5 的证明示意图

3. 偶长圈和路的卡什积图的反强迫数

此部分主要基于以下关于一个二部图有唯一完美匹配的必要条件。

引理 3.1 [10] 设 $G=(U,V)$ 是一个只有唯一完美匹配的二部图, 则 G 的点可标记为

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \text{ 使得每条边 } u_i v_j, i \geq j.$$

推论 3.2 若一个连通二部图 G 恰好有一个完美匹配, 则 G 有两个一度点。

证明 设 $G=(U,V)$ 。因为恰好有一个完美匹配, 根据引理 3.1, G 的点可标记为 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ 使得每条边 $u_i v_j, i \geq j$ 。于是 v_m 的邻点只有 u_m , u_1 的邻点只有 v_1 , 即 v_m 和 u_1 为 G 的两个一度点。■

因为 C_4 是一个偶长圈, 恰有两个完美匹配, 故其反强迫集至少包含一条边。另外, 去掉其任意一条边, 剩余子图只有一个完美匹配, 故我们可得以下结论:

定理 3.3 $af(C_4 \times P_1) = 1$

定理 3.4 $af(C_4 \times P_2) = 3$

证明 易见, 去掉图 4 中所示的三条虚线标记边后, $C_4 \times P_2$ 的余子图只有唯一完美匹配, 于是 $af(C_4 \times P_2) \leq 3$ 。另外, 设 S 是 $C_4 \times P_2$ 的一个最小的反强迫集, 则 $C_4 \times P_2 - S$ 只有唯一完美匹配, 记为 M 。因为 $C_4 \times P_2 - S$ 是二部图, 根据推论 3.2, $C_4 \times P_2 - S$ 有两个一度点, 而 $C_4 \times P_2$ 是 3-正则图, 为产生两个一度点, $C_4 \times P_2$ 至少需要去掉三条边, 即 $|S| \geq 3$ 。于是 $af(C_4 \times P_2) = 3$ 得证。■

下面我们开始讨论 $C_4 \times P_k$ 的反强迫数。为了讨论方便, 我们先给 $C_4 \times P_k$ 的点和边进行标记(见图 5), 我们称 $\{u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1}, w_i w_{i+1}, x_i x_{i+1}\}$ 为 $C_4 \times P_k$ 的第 i 层, 记为 L_i ($1 \leq i \leq k-1$)。类似地, 我们可定义 $C_4 \times P_k$ 的奇层, 偶层和路边, 圈边。

定理 3.5 $af(C_4 \times P_k) = k+1$ ($k \geq 2$)

证明 若 k 为偶数, 令 $S = \{x_1 w_1, w_1 w_2, u_1 x_1, w_2 v_2, u_2 x_2, w_3 v_3, \dots, u_{k-3} x_{k-3}, w_{k-2} v_{k-2}, u_{k-1} x_{k-1}\}$ 。则可知 $C_4 \times P_k - S$ 中的悬挂边 $w_1 v_1$ 和 $x_1 x_2$ 为匹配边, 依次匹配下去, 知

$M_1 = \{w_1 v_1, x_1 x_2, u_1 u_2, w_2 w_3, v_2 v_3, \dots, w_{k-2} w_{k-1}, v_{k-2} v_{k-1}, x_{k-1} x_k, u_{k-1} u_k, w_k v_k\}$ 是唯一完美匹配(见图 5(a))。

若 k 为奇数, 则令 $S = \{x_1 w_1, w_1 w_2, u_1 x_1, w_2 v_2, u_2 x_2, w_3 v_3, \dots, u_{k-2} x_{k-2}, w_{k-1} v_{k-1}\}$, 同样可得

$M_2 = \{w_1 v_1, x_1 x_2, u_1 u_2, w_2 w_3, v_2 v_3, \dots, x_{k-2} x_{k-1}, u_{k-2} u_{k-1}, w_{k-1} w_k, v_{k-1} v_k, u_k x_k\}$ 是唯一完美匹配(见图 5(b))。

不论哪种情况, 都有 $|S| = k+1$, 故 $af(C_4 \times P_k) \leq k+1$ 。下面对 k 用归纳证明 $af(C_4 \times P_k) \geq k+1$ ($k \geq 2$)。

当 $k=2$ 时, 由定理 3.4 知结论成立。假设结论对所有大于 2 且小于 k 的情形都成立, 下面对 $C_4 \times P_k$ 进行讨论。设 S 是 $C_4 \times P_k$ 的一个最小的反强迫集, 则 $C_4 \times P_k - S$ 只有唯一完美匹配, 记为 M 。下面我们分情况进行讨论:

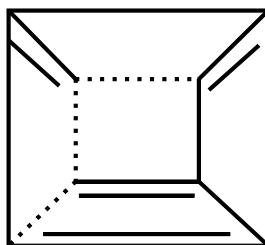


Figure 4. Illustration for the proof of Theorem 3.4
图 4. 定理 3.4 的证明示意图

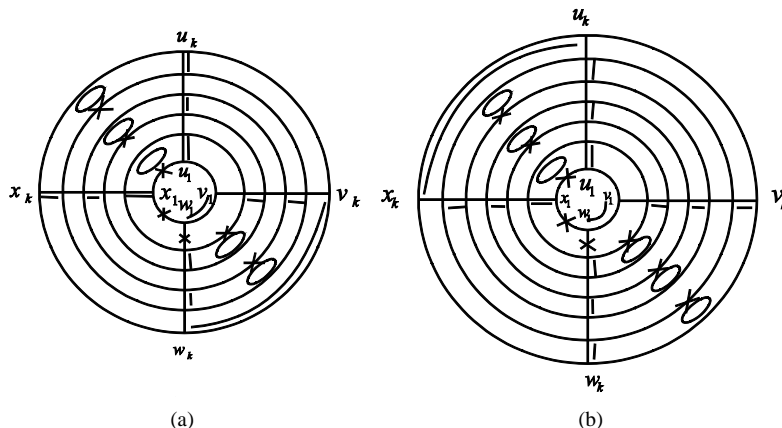


Figure 5. Illustration for the proof of Theorem 3.5
图 5. 定理 3.5 的证明示意图

情形 1. 存在某个 i , 使得 $|L_i \cap M| = 0$, 即 $C_4 \times P_k$ 的第 i 层的四条边都不在 M 中。

$C_4 \times P_k - \{u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1}, w_i w_{i+1}, x_i x_{i+1}\}$ 可分解为两个四长圈和路的卡什积图, 分别记为 G_1 和 G_2 。

根据假设, M 也可分解为两部分 M_1 和 M_2 , 分别为 G_1 和 G_2 的完美匹配。记 $S_1 = S \cap E(G_1)$, $S_2 = S \cap E(G_2)$ 。因为 $M = M_1 \cup M_2$ 是 $C_3 \times P_{2k} - S$ 的唯一完美匹配, 故 M_1 和 M_2 也分别为 $G_1 - S_1$ 和 $G_2 - S_2$ 中的唯一完美匹配。这说明 S_1 和 S_2 分别为 G_1 和 G_2 的反强迫集。

当 $i=1$ 或 $i=k-1$ 时, G_1, G_2 中有一个四边形。不妨设 G_1 为四边形。根据定理 3.3, $|S_1| \geq 1$ 。又 $G_2 = C_4 \times P_{k-1}$, 根据归纳假设, $|S_2| \geq k$ 。从而 $|S| \geq |S_1| + |S_2| \geq 1+k$ 。

当 $i \neq 1$ 且 $i \neq k-1$ 时, 设 $G_1 = C_4 \times P_i$, $G_2 = C_4 \times P_{k-i}$ 。根据归纳假设, $|S_1| \geq i+1$, $|S_2| \geq k-i+1$ 。于是 $|S| \geq |S_1| + |S_2| \geq k+2 > k+1$ 。

情形 2. 存在某个 i , 使得 $|L_i \cap M| = 4$, 即 $C_4 \times P_k$ 的第 i 层的四条边都不在 M 中。这时与 L_i 的相邻的层只能有 0 条匹配边, 该情形即为情形 1。

情形 3. 对每个 i , $|L_i \cap M| \neq 0$, 且 $|L_i \cap M| \neq 4$ 。

因为 $C_4 \times P_k$ 的每个完美匹配只能与每层交于偶数条边, 则 M 与每层都交于恰好 2 条边。根据这两条匹配边的位置, 下面分两种子情形进行讨论:

1) 若存在某一层, 其两条匹配边位于该层的相对位置(见图 6)。

不妨设 L_i 中 $\{u_i u_{i+1}, w_i w_{i+1}\} \subseteq M$ 。因为 L_i 只有两条匹配边, 则 $v_i v_{i+1} \notin M, x_i x_{i+1} \notin M$ 。于是 $v_i v_{i-1} \in M, x_i x_{i-1} \in M$ 。而 L_{i-1} 只能有两条匹配边 $v_i v_{i-1}, x_i x_{i-1}$, 且这两条匹配边也是位于相对位置。类似地, 我们可推出 M 在每层的 2 条匹配边都位于相对位置。但进行到第一层时, 会产生两个不相邻的点(见图 6), 其邻点已跟其它点匹配, 这与 M 是完美匹配矛盾。

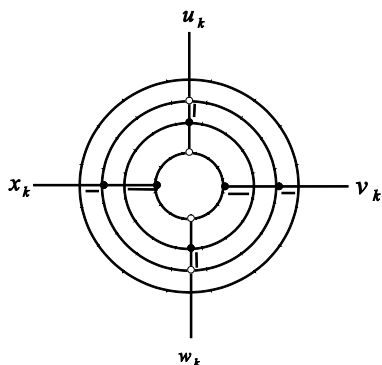


Figure 6. Illustration for the proof of Case 3(1) of Theorem 3.5

图 6. 定理 3.5 情形 3(1)的证明示意图

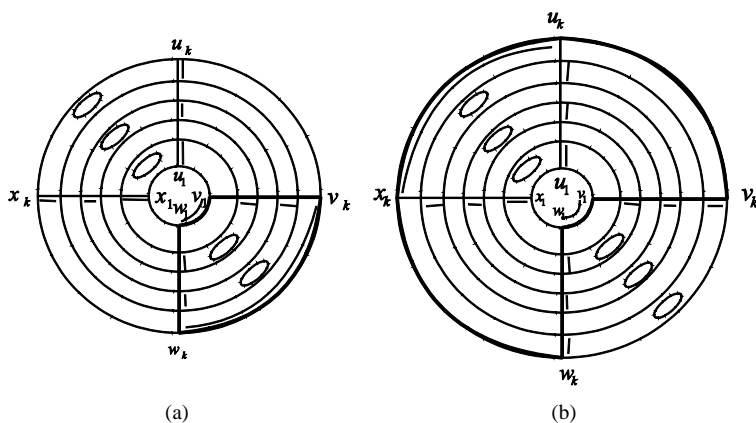


Figure 7. Illustration for the proof of Case 3(2) of Theorem 3.5

图 7. 定理 3.5 情形 3(2)的证明示意图

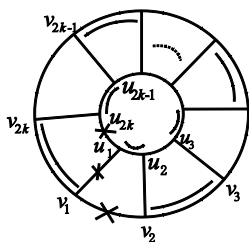


Figure 8. Illustration for the proof of Theorem 3.6

图 8. 定理 3.6 的证明示意图

2) M 与任意一层的两条匹配边都位于相近位置(见图 7)。

不妨设 L_1 中 $\{u_1 u_2, x_1 x_2\} \subseteq M$ 。因为 L_1 只有两条匹配边, 则 $v_1 v_2 \notin M, w_1 w_2 \notin M$ 。于是 $v_2 v_3, w_2 w_3$ 是 L_2 仅有的两条匹配边。依次类推, 可知在奇数层 L_i , 我们有 $\{u_i u_{i+1}, x_i x_{i+1}\} \subseteq M$ 。而在偶数层 L_i , 我们有 $\{v_i v_{i+1}, w_i w_{i+1}\} \subseteq M$ 。于是当 k 为偶数时, 我们可确定 $C_4 \times P_k - S$ 中的唯一完美匹配为 $M = \{w_1 v_1, x_1 x_2, u_1 u_2, w_2 w_3, v_2 v_3, \dots, x_{k-1} x_k, u_{k-1} u_k, w_k v_k\}$ (见图 7(a)); 而当 k 为奇数时, $C_4 \times P_k - S$ 中的唯一完美匹配为 $M = \{w_1 v_1, x_1 x_2, u_1 u_2, w_2 w_3, v_2 v_3, \dots, w_{k-1} w_k, v_{k-1} v_k, u_k x_k\}$ (见图 7(b))。

注意到 $C_4 \times P_k$ 的第 1 层的两条匹配边 $u_1 u_2, x_1 x_2$ 所在的四边形是一个 M 交替圈, 根据引理 2.3, 该四边形的两条圈边 $\{u_1 x_1, u_2 x_2\}$ 至少有一条属于反强迫集 S 。 $C_4 \times P_k$ 的每层都有一个这样的 M 交替四边形,

而每个交替四边形至少有一条圈边属于 S , 我们在每个交替四边形各取一条圈边, 记这些圈边构成的集合为 S' , 则 $S' \subseteq S$ 且 $|S'| = k - 1$ 。

当 k 为偶数时, 令 $C = v_1 w_1 w_2 \cdots w_k v_k v_{k-1} \cdots v_1$ (见图 7(a))。而当 k 为奇数时, 令 $C = v_1 w_1 w_2 \cdots w_k x_k u_k v_k v_{k-1} \cdots v_1$ (见图 7(b))。可见 C 是一个 $C_4 \times P_k - S'$ 中的 M 交替圈, 根据引理 2.3, C 中至少有一条非匹配边属于 S 。任取 C 中属于 S 的一条非匹配边, 记为 e 。但不论 e 取 C 上哪一条非匹配边, 都有 $e \notin S'$ 且 $C_4 \times P_k - S' - \{e\}$ 中顶点的最小度仍为 2。根据推论 3.2, $C_4 \times P_k - S$ 有两个一度点。因为在 $C_4 \times P_k - S' - \{e\}$ 中至少还要去掉一条边才能产生一度点, 从而 S 除了包含 $S' \cup \{e\}$, 还包含另外一条边。于是 $|S| \geq |S'| + 2 = k + 1$ 。

综上, $|S| = k + 1$ 。证毕。■

对于一般的偶圈的卡什积图, 我们得到其反强迫数如下:

定理 3.6 $af(C_{2k} \times P_2) = 3$ ($k \geq 2$)

证明 先证 $af(C_{2k} \times P_2) \leq 3$: 将 $C_{2k} \times P_2$ 的点和边进行标记(见图 8)。令 $S = \{u_{2k}u_1, u_1v_1, v_1v_2\}$, 则 $C_{2k} \times P_2 - S$ 有两条悬挂边 u_1u_2, v_1v_{2k} 可先确定为匹配边, 依次匹配下去, 可确定完美匹配 $M = \{u_1u_2, v_2v_3, u_3u_4, \dots, u_{k-1}u_k, v_k v_1\}$ 。再证 $af(C_{2k} \times P_2) \geq 3$: 根据推论 3.2, $C_4 \times P_k$ 去掉一个反强迫集后要有两个一度点。因为 $C_{2k} \times P_2$ 是 3-正则的简单图, 所以至少需要去掉 3 条边才可能产生两个一度点, 因此 $af(C_{2k} \times P_2) \geq 3$ 。综上, $af(C_{2k} \times P_2) = 3$ ($k \geq 2$)。■

基金项目

海南省自然科学基金资助项目(114001), 海南省自然科学基金资助项目(2016CXTD004)。

参考文献 (References)

- [1] Klein, D. and Randic, M. (1987) Innate Degree of Freedom of a Graph. *Journal of Computational Chemistry*, **8**, 516-521. <http://dx.doi.org/10.1002/jcc.540080432>
- [2] Randic, M. and Klein, D. (1985) Kekule Valence Structures Revisited. Innate Degrees of Freedom of π -Electron Couplings. In: Trinajstic, N., Ed., *Mathematics and Computational Concepts in Chemistry*, Horwood/Wiley, New York, 274-282.
- [3] Harary, F., Klein, D. and Zivkovic, T. (1991) Graphical Properties of Polyhexes: Perfect Matching Vector and Forcing. *Journal of Mathematical Chemistry*, **6**, 295-306. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01192587>
- [4] Vukicevic, D. and Trinajstic, N. (2007) On the Anti-Forcing Number of Benzenoids. *Journal of Mathematical Chemistry*, **42**, 575-583. <http://dx.doi.org/10.1007/s10910-006-9133-6>
- [5] Deng, H. (2007) The Anti-Forcing Number of Hexagonal Chains. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **58**, 675-682.
- [6] Deng, H. (2008) The Anti-Forcing Number of Double Hexagonal Chains. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **60**, 183-192.
- [7] Zhang, Q., Bian, H. and Vumar, E. (2011) On the Anti-Kekule and Anti-Forcing Number of Cata-Condensed phenylenes. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **65**, 799-806.
- [8] 杨琴. 富勒烯图的反凯库勒数和反强迫数[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 兰州大学, 2010.
- [9] 蒋晓艳, 程晓胜. 硼氮富勒烯图的反强迫数[J]. 湖北师范学院学报(自然科学版), 2013, 33(3): 28-30.
- [10] Lovasz, L. and Plummer, M.D. (1986) Matching Theory. *Annals of Discrete Mathematics* Vol. 29, North-Holland, Amsterdam.

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>