

The 1-Good-Neighbor Connectivity and Diagnosability of Möbius Cubes

Can Bai¹, Shiyong Wang^{1,2*}, Zhenhua Wang¹

¹School of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang Henan

²Henan Engineering Laboratory for Big Data Statistical Analysis and Optimal Control, Henan Normal University, Xinxiang Henan

Email: *wangshiyong@htu.edu.cn

Received: Nov. 10th, 2016; accepted: Nov. 25th, 2016; published: Nov. 29th, 2016

Copyright © 2016 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

In the field of computers, the diagnosability of a multiprocessor is an important study topic. The traditional diagnosability allows that all neighbors of some vertices are faulty at the same time. However, in the processor system, the probability of this kind of situation is very small. Therefore, in 2012, Peng *et al.* proposed the g -good-neighbor diagnosability. It restrains every fault-free node containing at least g fault-free neighbors. As hypercube variants, the n -dimensional Möbius cube MQ_n has some better properties than hypercubes. This paper shows that the 1-good-neighbor connectivity of MQ_n is $2n-2$ ($n \geq 4$), and the 1-good-neighbor diagnosability of MQ_n is $2n-1$ under the PMC model ($n \geq 4$) and under the MM* model ($n \geq 5$).

Keywords

Interconnection Network, Möbius Cube, 1-Good-Neighbor Diagnosability

Möbius立方体的1好邻连通度和诊断度

白 灿¹, 王世英^{1,2*}, 王贞化¹

¹数学与信息科学学院, 河南师范大学, 河南 新乡

²河南省大数据统计分析与优化控制工程实验室, 河南师范大学, 河南 新乡

Email: *wangshiyong@htu.edu.cn

*通讯作者。

收稿日期：2016年11月10日；录用日期：2016年11月25日；发布日期：2016年11月29日

摘要

在计算机领域，多处理器系统的诊断度是一项重要的研究课题。在传统的诊断度中，任一处理器的所有相邻处理器可以同时出现故障。但是，在处理器系统中，出现这种情况的概率极小。因此，peng等在2012年提出了 g 好邻诊断度，它限制每个非故障顶点至少有 g 个非故障邻点。作为超立方体的变形， n 维Möbius立方体 MQ_n 有着比超立方体更好的性质。本文证明了 MQ_n 的1好邻连通度是 $2n-2$ ，又证明了 MQ_n 在PMC模型下($n \geq 4$)和在MM*模型下($n \geq 5$)的1好邻诊断度是 $2n-1$ 。

关键词

互连网络，Möbius立方体，1好邻诊断度

1. 前言

近些年来，随着多处理器规模的扩大，处理器的稳定性对系统的正常运行起着至关重要的作用。为了保证系统的稳定性，一个处理器无论何时发生故障，它都应该及时地被非故障处理器所识别，我们把识别故障处理器的过程叫做系统的诊断。在一个系统中，如果所有的故障处理器能够被自我诊断出来，并且所诊断出的故障处理器的数量不超过 t ，那么我们说这个系统是 t 可诊断的。一个系统 G 的诊断度 $t(G)$ 指的是 G 是 t 可诊断的 t 的最大值。

为了识别系统中的故障处理器，一些诊断模型被提出，如PMC模型和MM*模型。PMC模型[1]是由Preparata等首次提出，它是通过两个相邻的处理器之间相互测试来实现的。Maeng和Malek提出了另一种比较诊断模型(MM*模型)[2]。在MM*模型下，一个顶点分别给它的两个邻点发出相同的任务，然后比较它们反馈的结果。2005年，Lai等提出了多处理器系统的一种限制诊断度，命名为条件诊断度[3]。2012年，Peng等通过限制每个非故障顶点至少有 g 个非故障邻点，提出了 g 好邻诊断度[4]，并且他们证明了超立方体在PMC模型下的 g 好邻诊断度是 $2^g(n-g)+2^g-1$ ($0 \leq g \leq n-3$)。王世英，韩威萍在文[5]中证明了 n 维超立方体在MM*模型下的 g 好邻诊断度。原军等在文[6]中证明出了 k 元 n 立方体在PMC模型和MM*模型下的 g 好邻诊断度是 $(2n-g+1)2^g-1$ ($k \geq 4, n \geq 3, 0 \leq g \leq n$)。他们在文[7]中还证明了3元 n 立方体的 g 好邻诊断度。对于条件诊断度来说，其假设故障和非故障点的邻域中均至少有一个是非故障的。而对于1好邻诊断度来说，其仅假设非故障点的邻域中至少有一个是非故障的。在实际中，为节约资源和提高运算效率，大规模多处理器系统中多采用模块化设计方式。局部处理器多共享如电源、存储空间等软硬件资源且相对地数据交换频率较高。这就意味着非故障点的邻域中至少存在一个非故障点的概率远大于故障点邻域中至少存在一个非故障点的概率。鉴于此种情况，1好邻诊断度较条件诊断度更为贴合实际。马晓蕾等在文[8]中证明了交叉立方体的1好邻连通度和诊断度。在文[9]中，王牟江山等证明了网络的1好邻诊断度不超过条件诊断度。我们在这篇文章中研究Möbius立方体的1好邻连通度和诊断度。本文第二部分是预备知识，第三部分证明了Möbius立方体的1好邻连通度是 $2n-2$ ($n \geq 4$)，第四部分又证明了Möbius立方体在PMC模型下($n \geq 4$)和在MM*模型下($n \geq 5$)的1好邻诊断度是 $2n-1$ ，第五部分是结论。

2. 预备知识

在这部分，我们将给出文中需要的一些基本符号和概念，Möbius 立方体、PMC 模型、MM*模型在这部分将给出介绍。

互网络的拓扑结构我们用图 $G=(V,E)$ 来表示，其中顶点表示处理器，边表示两处理器之间的通信链路。对于一个顶点 v ， $d_G(v)$ 是 v 在 G 中的度，表示在 G 中与 v 相关联的边数。对于任意一点 $v \in V(G)$ ，与 v 相邻的所有顶点的集合称作 v 的邻集，记作 $N_G(v)$ 。假设 $S \subseteq V(G)$ ，那么 S 的邻集表示为 $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N(v) \setminus S$ 。设 F_1 和 F_2 是 $V(G)$ 中两个不同的子集。我们将对称差记作 $F_1 \Delta F_2 = (F_1 \setminus F_2) \cup (F_2 \setminus F_1)$ 。一条路 $P = v_0 v_1 \cdots v_k$ 是一个所有顶点互不相同的相邻的顶点序列。如果 M 是图 G 的边子集，且 M 中的任意两条边没有公共顶点，则称 M 是 G 的一个匹配。如果 M 是图 G 中包含边数最多的匹配，称 M 是 G 的一个最大匹配。特别地，若最大匹配饱和了 G 的所有顶点，称它是 G 的一个完美匹配。任意一个故障集 $F \subset V$ ，对于任意一点 $v \in V \setminus F$ ，如果 $|N(v) \cap (V \setminus F)| \geq g$ ，那么 F 称作 G 的 g 好邻故障集。如果 g 好邻故障集 F 使得 $G - F$ 不连通，那么 F 是一个 g 好邻割。 G 的所有 g 好邻割中的最小顶点数称为 G 的 g 好邻连通度，记作 $\kappa^{(g)}(G)$ 。文中其它未定义而直接使用的基本符号和概念参见文献[10]。

在 PMC 模型中，为了诊断系统 G ，在 G 中相邻的两点之间可以相互测试。在 $V(G)$ 中，两个相邻的顶点 u 和 v ， (u,v) 表示从 u 到 v 的测试，其中 u 是测试者， v 是被测试者，我们用 $\sigma(u,v)$ 表示测试结果。在 PMC 模型下，所有的测试结果如表 1 所示。在 MM*模型下，结点 w 给它相邻的两个结点 u, v 分配同一个的任务，再把测试结果反馈给结点 w ， w 对这两个结点反馈的结果进行比较。全部的测试结果叫做这个系统的比较症候，记作 σ^* 。我们用 $\sigma^*((u,v)_w)$ 来表示测试结果。在 MM*模型下，所有可能出现的比较结果如表 2 所示。

n 维超立方体 Q_n 是一种很受欢迎的拓扑结构，Möbius 立方体作为超立方体的一种重要变形，它有着比超立方体更好的性质。在文献[11]中已经给出了 n 维 Möbius 立方体的概念， n 维 Möbius 立方体 MQ_n 是一个有 2^n 个顶点和 $n2^n$ 条边的 n 正则图。 MQ_n 的直径大约是 n 维超立方体的一半。在 MQ_n 中，点之间的平均通信步大约是超立方体的 $2/3$ ， MQ_n 比超立方体有着更强的动态性能。因此 MQ_n 也是一种很好的网络拓扑结构，值得我们研究。

n 维 Möbius 立方体作为超立方体的变形，其有两种形式，0 型 n 维 Möbius 立方体和 1 型 n 维 Möbius 立方体，分别记作 $0-MQ_n$ 和 $1-MQ_n$ 。

定义 1 n 维 Möbius 立方体，表示为 $0-MQ_n$ 和 $1-MQ_n$ ，它的顶点集是 $\{x_{n-1}x_{n-2} \cdots x_0 : x_i \in \{0,1\}, 0 \leq i \leq n-1\}$ 。在 $0-MQ_n$ 中，两个顶点 $x = x_{n-1}x_{n-2} \cdots x_1x_0$ ， $y = y_{n-1}y_{n-2} \cdots y_1y_0$ 相邻当且仅当(a)存在 i ($0 \leq i \leq n-2$) 满足：

- (1) 如果 $x_{i+1} = 0$ ，那么 $y = x_{n-1} \cdots x_{i+1} \overline{x_i} \cdots x_0$ 。
- (2) 如果 $x_{i+1} = 1$ ，那么 $y = x_{n-1} \cdots x_{i+1} x_i \cdots x_0$ 。
- (b) $i = n-1$ 满足 $y = \overline{x_{n-1}x_{n-2}} \cdots x_0$ 。

在 $1-MQ_n$ 中，两个结点 $x = x_{n-1}x_{n-2} \cdots x_1x_0$ ， $y = y_{n-1}y_{n-2} \cdots y_1y_0$ 相邻当且仅当(a)存在 i ($0 \leq i \leq n-2$) 满足：

- (1) 如果 $x_{i+1} = 0$ ，那么 $y = x_{n-1} \cdots x_{i+1} \overline{x_i} \cdots x_0$ 。
- (2) 如果 $x_{i+1} = 1$ ，那么 $y = x_{n-1} \cdots x_{i+1} x_i \cdots x_0$ 。
- (b) $i = n-1$ 满足 $y = \overline{x_{n-1} \cdots x_0}$ 。

图 1 给出了 4 维的 0 型 Möbius 立方体，图 2 给出了 4 维的 1 型 Möbius 立方体。

Table 1. The test results in the PMC model

表 1. 在 PMC 模型下测试结果

测试者 u	被测试者 v	$\sigma(u, v)$
u 是故障的	任意情况均可	0 或 1 (结果不可靠)
u 是非故障的	v 是故障的	1
u 是非故障的	v 是非故障的	0

Table 2. The test results in the MM* model

表 2. 在 MM* 模型下测试结果

测试顶点 w	被测试顶点 u 和 v	$\sigma^*((u, v)_w)$
非故障	u 和 v 都是非故障的	0
非故障	u 和 v 至少一个是故障的	1
故障	任意情况均可	0 或 1

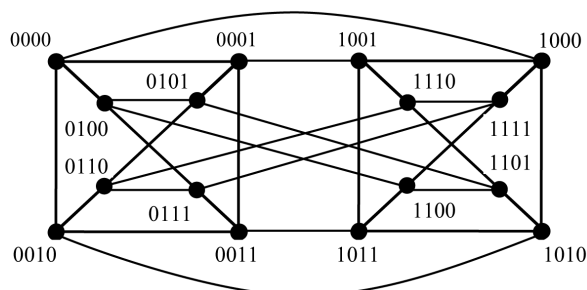


Figure 1. 4 dimensional 0 type Möbius cube

图 1. 4 维 0 型 Möbius 立方体

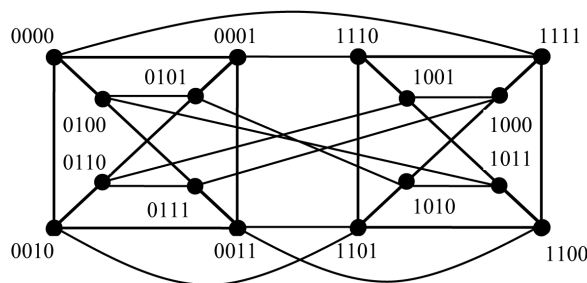


Figure 2. 4 dimensional 1 type Möbius cube

图 2. 4 维 1 型 Möbius 立方体

$0-MQ_n$ 和 $1-MQ_n$ 都是 n 维 Möbius 立方体, 本文只讨论 $0-MQ_n$, 并把它记为 MQ_n 。

3. n 维 Möbius 立方体的 1 好邻连通度

引理 3.1 [12] 当 $n \geq 3$ 时, MQ_n 不包含三圈。

根据定义 1, 两个顶点 $x = x_{n-1}x_{n-2} \cdots x_1x_0$, $y = y_{n-1}y_{n-2} \cdots y_1y_0$ 相邻当且仅当条件(b)成立, 即, 当 $i = n-1$ 时满足 $y = \overline{x_{n-1}}x_{n-2} \cdots x_0$, 此时我们称顶点 x 和 y 之间的连边是 MQ_n 的第 $n-1$ 维边。我们将 MQ_n 沿着最高维分解, 是通过删除 MQ_n 中所有第 $n-1$ 维的边, 将其分解成两个 $n-1$ 维子图 MQ_n^0 和 MQ_n^1 , 显然他们都

同构于 MQ_{n-1} 。我们称 MQ_n^0 和 MQ_n^1 之间的连边为交叉边，这些交叉边的集合是 MQ_n 的一个完美匹配。

引理 3.2 n 维 Möbius 立方体 MQ_n 中任意两个顶点之间至多有两个公共邻点。

证明 根据引理 3.1，任意两个相邻的顶点没有公共邻点。设 u, v 是 MQ_n 中任意两个不相邻的顶点。用归纳法证明。当 $n=2$ 时， MQ_2 是一个四圈，此时结论成立。我们假设 $n-1$ 时结论都成立，即， MQ_{n-1} 中任意两个顶点之间至多有两个公共邻点当 $n \geq 3$ 。将 MQ_n 沿最高维分解成两个 $n-1$ 维子图 MQ_n^0 和 MQ_n^1 ，它们同构于 MQ_{n-1} ， MQ_n^0 和 MQ_n^1 之间存在完美匹配。若 u 和 v 在同一个 $n-1$ 维的子图中，不失一般性，假设 $u, v \in V(MQ_n^0)$ 。由归纳假设 u 和 v 在 MQ_n^0 中至多有两个公共邻点。因为 MQ_n^0 和 MQ_n^1 之间交叉边是一个完美匹配，所以 u 和 v 在 MQ_n^1 中没有公共邻点。若 u 和 v 分别在两个 $n-1$ 维的子图中，不失一般性，假设 $u \in V(MQ_n^0)$ 和 $v \in V(MQ_n^1)$ 。因为 MQ_n^0 和 MQ_n^1 之间交叉边是一个完美匹配，所以 u 与 v 在 MQ_n^0 和 MQ_n^1 中均至多有一个公共邻点。因此， u 和 v 在 MQ_n 中至多有两个公共邻点。由 u 和 v 的任意性， MQ_n 中任意两个不相邻的顶点至多有两个公共邻点。

引理 3.3 [12] n 维 Möbius 立方体 MQ_n 的连通度 $\kappa(MQ_n) = n$ ($n \geq 1$)。

引理 3.4 当 $n \geq 3$ 时，对任意的 $uv \in E(MQ_n)$ ，设 $A = \{u, v\}$ 且 $F = N_{MQ_n}(A)$ ，则 $\delta(MQ_n - (A \cup F)) \geq 1$ 。

证明 要证 $\delta(MQ_n - (A \cup F)) \geq 1$ ，我们只需证明 $MQ_n - (A \cup F)$ 不含孤立点。当 $n=3$ 或 4 时，结论显然成立。当 $n \geq 5$ 时，用反证法证明。假设 w 是 $MQ_n - (A \cup F)$ 中的孤立点，则 $N_{MQ_n}(w) \subset F$ 。因为 $A = \{u, v\}$ 和 $F = N_{MQ_n}(A)$ ，所以 $N_{MQ_n}(u) \subset F$ 和 $N_{MQ_n}(v) \subset F$ 。根据引理 3.2，可得 $|N_{MQ_n}(w) \cap N_{MQ_n}(u)| \leq 2$ 和 $|N_{MQ_n}(w) \cap N_{MQ_n}(v)| \leq 2$ 。于是， $|N_{MQ_n}(w) \cap F| \leq 4$ 。因为 MQ_n 是 n 正则图，所以 $|N_{MQ_n}(w)| = n \geq 5$ 。因此， w 至少存在一个邻点不在 F 中，这与 $N_{MQ_n}(w) \subset F$ 矛盾。所以 $MQ_n - (A \cup F)$ 不含孤立点。故 $\delta(MQ_n - (A \cup F)) \geq 1$ 。

引理 3.5 n 维 Möbius 立方体 MQ_n 的 1 好邻连通度 $\kappa^{(1)}(MQ_n) \leq 2n-2$ ($n \geq 3$)。

证明 令 A 和 F 的定义与引理 3.4 相同，则 F 是 MQ_n 的一个割。因为 MQ_n 没有三圈，可以得到 $|F| = 2n-2$ 。根据引理 3.4，可以推出 $\delta(MQ_n - (A \cup F)) \geq 1$ ，又因为 $\delta(MQ_n[A]) = 1$ 。因此， F 是一个 1 好邻割。故可以推出 $\kappa^{(1)}(MQ_n) \leq |F| = 2n-2$ 。

引理 3.6 令 F 是 MQ_n ($n \geq 3$) 的一个点割。当 $|F| = n$ 时， $MQ_n - F$ 恰有两个分支，一个是平凡分支，另一个是非平凡分支。

证明 将 MQ_n 沿最高维分解成两个 $(n-1)$ 维的子图 MQ_n^0 和 MQ_n^1 ，它们同构于 MQ_{n-1} 。设 $F_0 = F \cap V(MQ_n^0)$ ， $F_1 = F \cap V(MQ_n^1)$ ，则 $F = F_0 \cup F_1$ 且 $F_0 \cap F_1 = \emptyset$ 。不失一般性，我们假设 $|F_0| \leq n-1$ 。

情形 1 $|F_0| = \emptyset$ 或者 $|F_1| = \emptyset$ 。

不失一般性，我们假设 $|F_0| = \emptyset$ 。此时 $|F_1| = n$ 。因为 MQ_n^0 和 MQ_n^1 之间的交叉边是 MQ_n 的一个完美匹配，所以 $MQ_n - F$ 是连通的。这与 F 是 MQ_n 的一个点割矛盾。

情形 2 $|F_0| \neq \emptyset$ 且 $|F_1| \neq \emptyset$ 。

情形 2.1 $|F_0| \leq n-2$ 。

根据引理 3.3， $\kappa(MQ_n^0) = n-1 > n-2$ ，所以 $MQ_n^0 - F_0$ 是连通的。

情形 2.1.1 $|F_1| \leq n-2$ 。

根据引理 3.3， $\kappa(MQ_n^1) = n-1 > n-2$ ，所以 $MQ_n^1 - F_1$ 是连通的。因为

$|V(MQ_n^0 - F_0)| - |F_1| = |V(MQ_n^0)| - |F| = 2^{n-1} - n > 0$ ($n \geq 3$) 以及 MQ_n^0 和 MQ_n^1 之间的交叉边是 MQ_n 的一个完

美匹配, 所以 $MQ_n[V(MQ_n^0 - F_0) \cup V(MQ_n^1 - F_1)]$ 是连通的, 即, $MQ_n - F$ 是连通的。这与 F 是 MQ_n 的一个点割矛盾。

情形 2.1.2 $|F_1| = n - 1$ 。

此时 $|F_0| = 1$ 。假设 $MQ_n^1 - F_1$ 是连通的, 证明同情形 2.1.1。因此 $MQ_n^1 - F_1$ 是不连通。注意到 $|F_0| = 1$, 又因为 MQ_n^0 和 MQ_n^1 之间的交叉边是 MQ_n 的一个完美匹配, 所以 $MQ_n^1 - F_1$ 中除孤立点外的分支一定与 $MQ_n^0 - F_0$ 连通。因此, $MQ_n - F$ 恰有两个分支, 一个是平凡分支, 另一个是非平凡分支。

情形 2.2 $|F_0| = n - 1$ 。

此时 $|F_1| = 1$ 。此情形证明同情形 2.1.2。

综上所述, 结论成立。

引理 3.7 令 F 是 MQ_n ($n \geq 3$) 的一个点割。当 $n \leq |F| \leq 2n - 3$ 时, $MQ_n - F$ 恰有两个分支, 一个是平凡的, 另一个是非平凡的。

证明 将 MQ_n 沿最高维分解成两个 $(n-1)$ 维的子图 MQ_n^0 和 MQ_n^1 。显然, 它们同构于 MQ_{n-1} 。设 $F_0 = F \cap V(MQ_n^0)$, $F_1 = F \cap V(MQ_n^1)$, 则 $F = F_0 \cup F_1$ 且 $F_0 \cap F_1 = \emptyset$ 。我们采用归纳法证明。当 $n = 3$ 时, $|F| = 3$ 。根据引理 3.6, $MQ_3 - F$ 恰有两个分支, 一个是平凡的, 另一个是非平凡的。假设 $n-1$ ($n-1 \geq 3$) 时结论也成立, 即, F 是 MQ_{n-1} 的一个点割且当 $n-1 \leq |F| \leq 2n-5$ 时, $MQ_{n-1} - F$ 恰有两个分支, 一个是平凡的, 另一个是非平凡的。下面证明 n 时结论也成立。不失一般性, 假设 $|F_0| \leq |F_1|$, 因为 $|F_0| + |F_1| = |F| \leq 2n - 3$, 所以 $|F_0| \leq n - 2$ 。

情形 1 $|F_1| \leq n - 2$ 。

根据引理 3.3, $\kappa(MQ_n^1) = n - 1 > n - 2$, 则 $MQ_n^0 - F_0$ 和 $MQ_n^1 - F_1$ 都连通。因为 $|V(MQ_n^0 - F_0)| - |F_1| = 2^{n-1} - |F| = 2^{n-1} - (2n - 3) > 0$ ($n \geq 4$) 且 MQ_n^0 和 MQ_n^1 之间的交叉边是 MQ_n 的一个完美匹配, 所以 $MQ_n[V(MQ_n^0 - F_0) \cup V(MQ_n^1 - F_1)]$ 是连通的, 即, $MQ_n - F$ 是连通的。这与 F 是 MQ_n 的一个点割矛盾。

情形 2 $|F_1| \geq n - 1$ 。

根据引理 3.3, $\kappa(MQ_{n-1}) = n - 1 > n - 2 \geq |F_0|$ 。则 $MQ_n^0 - F_0$ 连通。

情形 2.1 $n - 1 \leq |F_1| \leq 2n - 5$ 。

若 $MQ_n^1 - F_1$ 连通, 证明同情形 1。故 $MQ_n^1 - F_1$ 不连通。由归纳假设, $MQ_n^1 - F_1$ 恰有两个分支, 一个是平凡分支 u , 另一个是非平凡分支 S 。因此, $|V(S)| = |V(MQ_n^1)| - |F_1| - 1 = 2^{n-1} - |F_1| - 1$ 。注意到 $|V(S)| = 2^{n-1} - |F_1| - 1$, $|F_0| \leq n - 2$ 。又因为 MQ_n^0 和 MQ_n^1 之间的交叉边是 MQ_n 的一个完美匹配, 所以 $|V(S)| = 2^{n-1} - |F_1| - 1 > |F_0|$ ($n \geq 4$)。因此, $MQ_n^0 - F_0$ 中至少有一点与 $V(S)$ 中的点相连。则 $MQ_n[V(MQ_n^0 - F_0) \cup V(S)]$ 连通。若 u 与 $MQ_n^0 - F_0$ 中的任意一点相连, 那么 $MQ_n - F$ 连通, 这与 F 是 MQ_n 的一个点割矛盾。故 $MQ_n - F$ 恰有两个分支, 一个是平凡分支, 另一个是非平凡分支。

情形 2.2 $|F_1| \geq 2n - 4$ 。

情形 2.2.1 $|F_1| = 2n - 4$ 。

在这种情况下, $|F_0| = 1$ 。根据引理 3.3, $MQ_n^0 - F_0$ 连通。若 $MQ_n^1 - F_1$ 连通, 证明同情形 1。故 $MQ_n^1 - F_1$ 不连通。注意到 $|F_0| = 1$, 又因为 MQ_n^0 和 MQ_n^1 之间的交叉边是 MQ_n 的一个完美匹配, 所以 $MQ_n^1 - F_1$ 中除孤立点外的分支一定与 $MQ_n^0 - F_0$ 连通。因此, $MQ_n - F$ 恰有两个分支, 一个是平凡分支, 另一个是非平凡分支。

情形 2.2.2 $|F_1| = 2n - 3$ 。

在这种情况下, $|F_0| = 0$ 。因为 MQ_n^0 和 MQ_n^1 之间的交叉边是 MQ_n 的一个完美匹配, 所以 $MQ_n - F$ 连通。这与 F 是 MQ_n 的一个点割矛盾。

综上所述, 结论成立。

引理 3.8 n 维 Möbius 立方体 MQ_n 的 1 好邻连通度 $\kappa^{(1)}(MQ_n) \geq 2n - 2$ ($n \geq 4$)。

证明 我们用反证法证明, 假设 $F \subseteq V(MQ_n)$ 是一个 1 好邻割且 $|F| \leq 2n - 3$ 。则 $MQ_n - F$ 没有孤立点且不连通。根据引理 3.7, 当 $n \leq |F| \leq 2n - 3$, $MQ_n - F$ 恰有两个分支, 一个是平凡的, 另一个是非平凡的。这与 $MQ_n - F$ 没有孤立点矛盾。因此, 结论成立。

结合引理 3.5 和引理 3.8 可得以下定理:

定理 3.9 n 维 Möbius 立方体 MQ_n 的 1 好邻连通度 $\kappa^{(1)}(MQ_n) = 2n - 2$ ($n \geq 4$)。

4. MQ_n 在 PMC 模型下和 MM*模型下的 1 好邻诊断度

定理 4.1 [6] 在一个系统 $G = (V, E)$ 中, 对于任意两个不同的且顶点个数不超过 t 的 g 好邻故障集 F_1, F_2 , 若 F_1, F_2 是可区分的, 则 G 是 g 好邻条件 t -可诊断的, 使得 G 是 g 好邻条件 t -可诊断的最大值 t 叫做 G 的 g 好邻诊断度, 记作 $t_g(G)$ 。

定理 4.2 [6] 一个系统 $G = (V, E)$ 在 PMC 模型下是 g 好邻 t -可诊断的当且仅当对于 V 中任意两个不同的顶点数至多为 t 的 g 好邻故障集 F_1, F_2 , 存在 $u \in V \setminus (F_1 \cup F_2)$ 和 $v \in F_1 \Delta F_2$, 使得 $uv \in E$ (如图 3)。

定理 4.3 [6] 一个系统 $G = (V, E)$ 在 MM*模型下是 g 好邻 t -可诊断的当且仅当对 V 中任意两个不同的顶点数不超过 t 的 g 好邻故障集 F_1, F_2 , 满足以下其中一个条件(如图 4):

- (1) 存在 $u, w \in V \setminus (F_1 \cup F_2)$ 和 $v \in F_1 \Delta F_2$ 满足 $uw, vw \in E$ 。
- (2) 存在 $u, v \in F_1 \setminus F_2$ 和 $w \in V \setminus (F_1 \cup F_2)$ 满足 $uw, vw \in E$ 。
- (3) 存在 $u, v \in F_2 \setminus F_1$ 和 $w \in V \setminus (F_1 \cup F_2)$ 满足 $uw, vw \in E$ 。

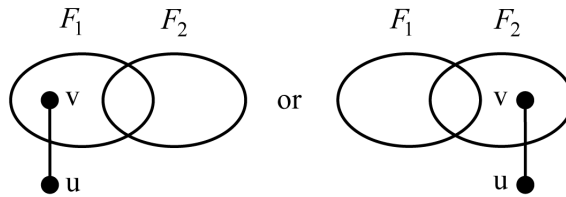


Figure 3. A distinguishable pair (F_1, F_2) under the PMC model

图 3. 在 PMC 模型下可区分的对 (F_1, F_2)

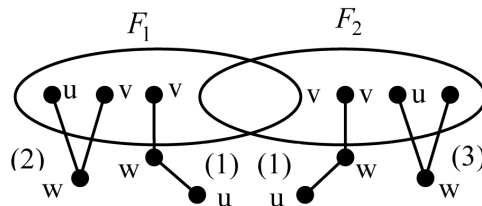


Figure 4. A distinguishable pair (F_1, F_2) under the MM* model

图 4. 在 MM*模型下可区分的对 (F_1, F_2)

引理 4.4 n 维 Möbius 立方体 MQ_n 在 PMC 模型下和 MM*模型下的 1 好邻诊断度 $t_1(MQ_n) \leq 2n-1$ ($n \geq 4$)。

证明 对任意的 $uv \in E(MQ_n)$, 设 $A = \{u, v\}$, $F_1 = N_{MQ_n}(A)$ 和 $F_2 = A \cup F_1$ 。因为 MQ_n 没有三圈, 所以 $|F_1| = 2n-2$ 和 $|F_2| = 2n$ 。根据引理 3.4, $\delta(MQ_n - F_1) \geq 1$ 和 $\delta(MQ_n - F_2) \geq 1$ 。因此, F_1, F_2 是 MQ_n 的两个 1 好邻故障集。因为 $F_1 \Delta F_2 = A$ 和 $N_{MQ_n}(A) = F_1 \subset F_2$, 所以在 $V(MQ_n) \setminus (F_1 \cup F_2)$ 和 $F_1 \Delta F_2$ 之间没有边。由定理 4.2 定理 4.3, 我们可以推出 MQ_n 在 PMC 模型下和 MM*模型下不是 1 好邻 $2n$ -可诊断的。因此, 由 1 好邻诊断度的定义可知 MQ_n 的 1 好邻诊断度小于 $2n$, 即 $t_1(MQ_n) \leq 2n-1$ 。

引理 4.5 n 维 Möbius 立方体 MQ_n 在 PMC 模型下的 1 好邻诊断度 $t_1(MQ_n) \geq 2n-1$ ($n \geq 4$)。

证明 由 1 好邻诊断度的定义, 需要证明 MQ_n 是 1 好邻 $(2n-1)$ -可诊断的。根据定理 4.2, 证明 MQ_n 是 1 好邻 $(2n-1)$ -可诊断的等价于证明任意两个不同的且顶点个数不超过 $2n-1$ 的 1 好邻故障集 F_1, F_2 , 存在 $u \in V(MQ_n) \setminus (F_1 \cup F_2)$ 和 $v \in F_1 \Delta F_2$, 使得 $uv \in E(MQ_n)$ 。

采用反证法证明。假设在 MQ_n 中有两个不同的且顶点个数不超过 $2n-1$ 的 1 好邻故障集 F_1, F_2 , 根据定理 4.2, 对任意的 $u \in V(MQ_n) \setminus (F_1 \cup F_2)$ 和 $v \in F_1 \Delta F_2$ 使得 $uv \notin E(MQ_n)$ 。不失一般性, 假设 $F_2 \setminus F_1 \neq \emptyset$ 。可以分以下两种情况进行讨论:

情形 1 $V(MQ_n) = F_1 \cup F_2$ 。

因为 $n \geq 4$ 和 $V(MQ_n) = F_1 \cup F_2$, 我们可以推出

$2^n = |V(MQ_n)| = |F_1 \cup F_2| = |F_1| + |F_2| - |F_1 \cap F_2| \leq |F_1| + |F_2| \leq 2n-1 + 2n-1 = 4n-2$ 。当 $n \geq 4$ 时, 上述不等式矛盾。

情形 2 $V(MQ_n) \neq F_1 \cup F_2$ 。

根据假设 $V(MQ_n) \setminus (F_1 \cup F_2)$ 与 $F_1 \Delta F_2$ 之间没有边和 F_1 是 1 好邻故障集, 可得 $\delta(MQ_n[F_2 \setminus F_1]) \geq 1$ 。同理, 若 $F_1 \setminus F_2 \neq \emptyset$, 则 $\delta(MQ_n[F_1 \setminus F_2]) \geq 1$ 。因为 F_1, F_2 都是 1 好邻故障集, 所以 $F_1 \cap F_2$ 也是一个 1 好邻故障集。又因为在 $V(MQ_n) \setminus (F_1 \cup F_2)$ 和 $F_1 \Delta F_2$ 之间没有边, 所以 $MQ_n - F_1 \cap F_2$ 不连通。故 $F_1 \cap F_2$ 是 MQ_n 的 1 好邻割。根据引理 3.8, 可得 $|F_1 \cap F_2| \geq 2n-2$ 。因此, $|F_2| = |F_2 \setminus F_1| + |F_1 \cap F_2| \geq 2 + 2n-2 = 2n$ 。这与 $|F_2| \leq 2n-1$ 相矛盾。因为以上两种情况都产生矛盾, 所以 MQ_n 是 1 好邻 $(2n-1)$ -可诊断的。由 $t_1(MQ_n)$ 的定义可得, $t_1(MQ_n) \geq 2n-1$ 。

结合引理 4.4 和引理 4.5, 可得以下定理:

定理 4.6 n 维 Möbius 立方体 MQ_n 在 PMC 模型下的 1 好邻诊断度 $t_1(MQ_n) = 2n-1$ ($n \geq 4$)。

引理 4.7 n 维 Möbius 立方体 MQ_n 在 MM*模型下的 1 好邻诊断度 $t_1(MQ_n) \geq 2n-1$ ($n \geq 5$)。

证明 根据 1 好邻诊断度的定义, 等价于证明 MQ_n 是 1 好邻 $(2n-1)$ -可诊断的。采用反证法证明。根据定理 4.3, 假设 $V(MQ_n)$ 中存在两个不同的且顶点个数不超过 $2n-1$ 的 1 好邻故障集 F_1, F_2 , F_1 和 F_2 不满足定理 4.3 中的(1)-(3)。不失一般性, 假设 $F_2 \setminus F_1 \neq \emptyset$ 。分以下两种情况进行讨论:

情形 1 $V(MQ_n) = F_1 \cup F_2$ 。

证明同引理 4.5 的情形 1。

情形 2 $V(MQ_n) \neq F_1 \cup F_2$ 。

断言 1 $MQ_n - F_1 - F_2$ 没有孤立点。

为了证明结论成立我们采用反证法。设 $MQ_n - F_1 - F_2$ 至少有一个孤立点 w 。因为 F_1 是一个 1 好邻故障集, 所以至少存在一点 $u \in F_2 \setminus F_1$ 使得 u 与 w 相邻。另一方面, 因为 F_1, F_2 不满足定理 4.3 中的(1)-(3)中的任意一种条件, 所以至多存在一点 $u \in F_2 \setminus F_1$ 使得 $uw \in E(MQ_n)$ 。因此仅有一点 $u \in F_2 \setminus F_1$ 使得 $uw \in E(MQ_n)$ 。因为 F_2 是一个 1 好邻故障集, 所以 w 在 $F_1 \setminus F_2$ 至少有一个邻点, 即 $F_1 \setminus F_2 \neq \emptyset$ 。同理,

仅有一点 $v \in F_1 \setminus F_2$ 使得 $vw \in E(MQ_n)$ 。设 W 是 $MQ_n[V(MQ_n) \setminus (F_1 \cup F_2)]$ 中的孤立点集, 令 H 是由点集 $V(MQ_n - F_1 - F_2 - W)$ 导出的子图。因此, 对任意的 $w \in W$, 存在 $(n-2)$ 个邻点在 $F_1 \cap F_2$ 中。由于 $|F_2| \leq 2n-1$, 故

$$\sum_{w \in W} |N_{MQ_n[(F_1 \cap F_2) \cup W]}(w)| \leq |W|(n-2) \leq \sum_{v \in F_1 \cap F_2} d_{MQ_n}(v) \leq |F_1 \cap F_2|n \leq (|F_2|-1)n \leq (2n-2)n = 2n^2 - 2n$$
。因为 $n \geq 5$, 所以 $|W| \leq 2n+3$ 。假设 $V(H) = \emptyset$, 有

$2^n = |V(MQ_n)| = |F_1 \cup F_2| + |W| = |F_1| + |F_2| - |F_1 \cap F_2| + |W| < 2(2n-1) - (n-2) + 2n+3 \leq 5n+3$ 。当 $n \geq 5$ 时, 上式矛盾, 故 $V(H) \neq \emptyset$ 。因为 F_1, F_2 不满足定理 4.3 中的(1)且 $V(H)$ 的任意一点是不孤立的, 所以可以推出 $V(H)$ 与 $F_1 \Delta F_2$ 之间不存在边相连。因此, $F_1 \cap F_2$ 是 MQ_n 的点割且 $\delta(MQ_n - (F_1 \cap F_2)) \geq 1$, 即 $F_1 \cap F_2$ 是 MQ_n 的一个 1 好邻割。根据定理 3.8, $|F_1 \cap F_2| \geq 2n-2$ 。因为 $|F_1| \leq 2n-1$, $|F_2| \leq 2n-1$ 并且 $F_1 \setminus F_2$ 和 $F_2 \setminus F_1$ 都是非空的, 所以 $|F_1 \setminus F_2| = |F_2 \setminus F_1| = 1$ 。于是, 设 $F_1 \setminus F_2 = \{v_1\}$ 和 $F_2 \setminus F_1 = \{v_2\}$ 。所以对于任意的 $w \in W$ 满足 $wv_1, wv_2 \in E(MQ_n)$ 。根据引理 3.2, v_1 与 v_2 在 MQ_n 中至多有两个公共邻点。因此, $MQ_n - F_1 - F_2$ 至多有两个孤立点。

假设 $MQ_n - F_1 - F_2$ 中恰有一个孤立点 v , 则 v_1, v_2 在 $MQ_n \setminus (F_1 \cup F_2)$ 中与 v 相邻。显然, $N_{MQ_n}(v_1) \setminus \{v\} \subseteq F_1 \cap F_2$, $N_{MQ_n}(v_2) \setminus \{v\} \subseteq F_1 \cap F_2$, $[N_{MQ_n}(v) \setminus \{v_1, v_2\}] \cap [N_{MQ_n}(v_1) \setminus \{v\}] = \emptyset$ 和 $[N_{MQ_n}(v) \setminus \{v_1, v_2\}] \cap [N_{MQ_n}(v_2) \setminus \{v\}] = \emptyset$ 。根据引理 3.2, v_1 与 v_2 在 MQ_n 至多有两个公共邻点, 所以 $[N_{MQ_n}(v_1) \setminus \{v\}] \cap [N_{MQ_n}(v_2) \setminus \{v\}] \leq 1$ 。因此,

$|F_1 \cap F_2| \geq |N_{MQ_n}(v) \setminus \{v_1, v_2\}| + |N_{MQ_n}(v_1) \setminus \{v\}| + |N_{MQ_n}(v_2) \setminus \{v\}| - 1 = (n-2) + (n-1) + (n-1) - 1 = 3n-5$ 。于是, $|F_2| = |F_2 \setminus F_1| + |F_1 \cap F_2| \geq 1 + 3n-5 = 3n-4 > 2n-1 (n \geq 5)$ 。这与 $|F_2| \leq 2n-1$ 矛盾。

假设在 $MQ_n \setminus F_1 \cup F_2$ 中还有另外一个孤立点 v' , 则 $vv_1, vv_2, v'v_1, v'v_2 \in E(MQ_n)$, $N_{MQ_n}(v) \setminus \{v_1, v_2\} \subseteq F_1 \cap F_2$ 和 $N_{MQ_n}(v') \setminus \{v_1, v_2\} \subseteq F_1 \cap F_2$ 。根据引理 3.1, 可以得到 $N_{MQ_n}(v_1) \setminus \{v, v'\} \subseteq F_1 \cap F_2$ 和 $N_{MQ_n}(v_2) \setminus \{v, v'\} \subseteq F_1 \cap F_2$ 。又因为在 MQ_n 中任意两点至多有两个公共邻点, 所以 $N_{MQ_n}(v) \setminus \{v_1, v_2\}$, $N_{MQ_n}(v') \setminus \{v_1, v_2\}$, $N_{MQ_n}(v_1) \setminus \{v, v'\}$ 和 $N_{MQ_n}(v_2) \setminus \{v, v'\}$ 中任意两个集合在 $F_1 \cap F_2$ 中都没有公共点。因此 $|F_1 \cap F_2| \geq |N_{MQ_n}(v) \setminus \{v_1, v_2\}| + |N_{MQ_n}(v') \setminus \{v_1, v_2\}| + |N_{MQ_n}(v_1) \setminus \{v, v'\}| + |N_{MQ_n}(v_2) \setminus \{v, v'\}| = 4(n-2) = 4n-8$ 。于是, $|F_2| = |F_2 \setminus F_1| + |F_1 \cap F_2| \geq 1 + 4n-8 = 4n-7 > 2n-1 (n \geq 5)$, 这与 $|F_2| \leq 2n-1$ 矛盾。断言 1 证明完毕。

设 $u \in V(MQ_n) \setminus (F_1 \cup F_2)$ 。根据断言 1, u 在 $MQ_n - F_1 - F_2$ 中至少有一个邻点。因为 F_1, F_2 不满足定理 4.3 中的(1)~(3)中的任意一种条件, 根据定理 4.3(1), 所以对于任意一对相邻的点 $u, w \in V(MQ_n) \setminus (F_1 \cup F_2)$, 不存在 $v \in F_1 \Delta F_2$ 使得 $uw \in E(MQ_n)$ 和 $wv \in E(MQ_n)$ 。因此, 我们可以得到 u 在 $F_1 \Delta F_2$ 中没有邻点。由 u 的任意性, $V(MQ_n) \setminus (F_1 \cup F_2)$ 与 $F_1 \Delta F_2$ 之间没有边。因为 F_1 是一个 1 好邻故障集且 $F_2 \setminus F_1 \neq \emptyset$, 所以 $\delta(MQ_n[F_2 \setminus F_1]) \geq 1$, 则 $|F_2 \setminus F_1| \geq 2$ 。因为 F_1 和 F_2 都是 1 好邻故障集并且 $V(MQ_n) \setminus (F_1 \cup F_2)$ 与 $F_1 \Delta F_2$ 之间没有边, 所以 $F_1 \cap F_1$ 是 MQ_n 的一个 1 好邻割。根据引理 3.6, 有 $|F_1 \cap F_2| \geq 2n-2$ 。因此, $|F_2| = |F_2 \setminus F_1| + |F_1 \cap F_2| \geq 2 + 2n-2 = 2n$ 。这与 $|F_2| \leq 2n-1$ 矛盾。于是, MQ_n 是 1 好邻 $(2n-1)$ -可诊断的。故 $t_1(MQ_n) \geq 2n-1$ 。

结合引理 4.4 和引理 4.7 可得以下定理:

定理 4.8 n 维 Möbius 立方体 MQ_n 在 MM*模型下的 1 好邻诊断度 $t_1(MQ_n) = 2n-1 (n \geq 5)$ 。

5. 结论

在这篇文章中, 我们研究了 n 维 Möbius 立方体 MQ_n 在两种模型下的 1 好邻诊断度问题。本文证明

了 Möbius 立方体的 1 好邻连通度是 $2n-2$ ($n \geq 4$), 又证明了 Möbius 立方体在 PMC 模型下的 1 好邻诊断度是 $2n-1$ ($n \geq 4$) 和在 MM* 模型下的 1 好邻诊断度是 $2n-1$ ($n \geq 5$)。1 好邻诊断度是假设每个非故障点至少有 1 个好的邻点, g 好邻诊断度是假设每个非故障点至少有 g 个好的邻点。这项工作将对后面研究 Möbius 立方体网络的 g 好邻连通度、诊断度和相关诊断算法提供很好的帮助。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(61370001), 教育部博士点基金(博导类)资助项目(20111401110005)。

参考文献 (References)

- [1] Preparata, F., Metze, G. and Chien, R.T. (1968) On the Connection Assignment Problem of Diagnosable Systems. *IEEE Transactions on Electronic Computers*, **12**, 848-854.
- [2] Joon, M. and Mirosław, M. (1981) A Comparison Connection Assignment for Self-Diagnosis of Multiprocessor Systems. *Proceeding of 11th International Symposium on Fault-Tolerant Computing*, 173-175.
- [3] Lai, P.-L., Tan, J.J.M., Chang, C.-P. and Hsu, L.-H. (2005) Conditional Diagnosability Measures for Large Multiprocessor Systems. *IEEE Transactions on Computers*, **54**, 165-175. <https://doi.org/10.1109/TC.2005.19>
- [4] Peng, S.-L., Lin, C.-K., Tan, J.J.M. and Hsu, L.-H. (2012) The g -Good-Neighbor Conditional Diagnosability of Hypercube under the PMC Model. *Applied Mathematics Computation*, **218**, 10406-10412. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.03.092>
- [5] Wang, S.Y. and Han, W.P. (2016) The g -Good-Neighbor Conditional Diagnosability of n -Dimensional Hypercubes under the MM* Model. *Information Processing Letters*, **116**, 574-577. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2016.04.005>
- [6] Yuan, J., Liu, A.X., Ma, X., Liu, X.L., Qin, X. and Zhang, J.F. (2015) The g -Good-Neighbor Conditional Diagnosability of k -Ary n -Cubes under the PMC Model and MM* Model. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **26**, 1165-1177. <https://doi.org/10.1109/TPDS.2014.2318305>
- [7] Yuan, J., Liu, A.X., Qin, X., Zhang, J.F. and Li, J. (2016) g -Good-Neighbor Conditional Diagnosability Measure of 3-Ary n -Cube Networks. *Theoretical Computer Science*, **626**, 144-162
- [8] Ma, X.L., Wang, S.Y. and Wang, Z.H. (2016) The 1-Good-Neighbor Connectivity and Diagnosability of Crossed Cube. *Advance in Applied Mathematics*, **5**, 282-290.
- [9] Wang, M., Guo, Y.B. and Wang, S.Y. (2015) The 1-Good-Neighbor Diagnosability of Cayley Graphs Generated by Transposition Trees under the PMC Model and MM* Model. *International Journal of Computer Mathematics*, 1-12. <https://doi.org/10.1080/00207160.2015.1119817>
- [10] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (2007) *Graph Theory*. Springer, New York.
- [11] Cull, P. and Larson, S.M. (1995) The Möbius Cubes. *IEEE Transactions on Computers*, **44**, 647-659. <https://doi.org/10.1109/12.381950>
- [12] Fan, J.X. (1998) Diagnosability of Möbius Cubes. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **9**, 923-928. <https://doi.org/10.1109/71.722224>

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：aam@hanspub.org