Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2016, 5(4), 823-835
Published Online November 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.54095

Periodic Solution for a Class of Higher-Order Cohen-Grossberg-Type BAM Neural Networks with Periodic Coefficients and Time-Varying Delays

Xiaohong Tian, Rui Xu

Department of Basic Courses, Ordnance Engineering College, Shijiazhuang Hebei
Email: tianxh-2008@163.com, rxu88@163.com

Received: Nov. 12th, 2016; accepted: Nov. 26th, 2016; published: Nov. 30th, 2016

Abstract

A class of higher-order Cohen-Grossberg-type BAM neural networks with periodic coefficients and time-varying delays is studied in this paper. By using the continuation theorem of Mawhin's coincidence degree theory, the existence of periodic solutions of networks is discussed, and by constructing appropriate Lyapunov functional, sufficient conditions are established for the global stability of the periodic solution.

Keywords

Time-Varying Delays, Periodic Coefficients, Periodic Solution, Global Stability

具有时变传输时滞的高阶Cohen-Grossberg型BAM神经网络的周期解

田晓红，徐　瑞

军械工程学院基础部，河北　石家庄
Email: tianxh-2008@163.com, rxu88@163.com

收稿日期：2016年11月12日；录用日期：2016年11月26日；发布日期：2016年11月30日

文章引用: 田晓红, 徐瑞. 具有时变传输时滞的高阶 Cohen-Grossberg 型 BAM 神经网络的周期解[J]. 应用数学进展, 2016, 5(4): 823-835. http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.54095

摘　要

本文研究了具有周期系数和时变传输时滞的高阶Cohen-Grossberg型BAM神经网络，利用拓扑度中的Mawhin延拓定理，讨论了系统周期解的存在性，并通过构造适当的Lyapunov泛函，给出了周期解全局稳定的充分条件。

关键词

时变传输时滞，周期系数，周期解，全局稳定

1. 引言

近年来，随着神经网络研究的不断深入，为提高网络的逼近能力和收敛速度，许多学者通过研究高阶神经网络动力学模型以提高网络性能[1] [2]。文献[1]研究了一类具有时滞的高阶 Cohen-Grossberg 神经网络。通过构造 Lyapunov 泛函并利用 LMI 方法给出了保证系统平衡点全局指数稳定的充分条件。文献[2]研究了一类高阶 Cohen-Grossberg 型 BAM 神经网络，并通过构造 Lyapunov 泛函并结合微积分中值定理以及 Poincaré 映射，分别得到了系统存在唯一全局指数稳定的周期解的充分条件。值得注意的是，文献[1]和[2]均假定神经元之间的连接权系数为常数，但事实上，考虑系统的长时间动力行为以及环境的季节性变化时，网络的连接权常会随时间的变化而变化。因此，研究具有周期系数的高阶神经网络更具实际意义。在文[3]中，Ren 和 Cao 研究了一类具有周期系数和常时滞的高阶 BAM 神经网络的周期解的存在性和全局稳定性，但在递归神经网络的实际应用中，受放大器转换速度的限制和电子回路发生故障的影响，时滞常会随时间的变化而变化[4] [5]。

基于文献[2]和[3]的建模思想，本文将研究如下具有周期系数和时变传输时滞的高阶 Cohen-Grossberg 型 BAM 神经网络

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t}=-a_i(u_i(t))\Big[b_i(u_i(t))-\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}(t)f_j(v_j(t))-\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}(t)f_j(v_j(t-\tau_j(t))) \\ \qquad -\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n}b_{ijl}(t)f_j(v_j(t-\tau_j(t)))f_l(v_l(t-\tau_l(t)))+I_i(t)\Big] \\ \dfrac{\mathrm{d}v_j(t)}{\mathrm{d}t}=-c_j(v_j(t))\Big[d_j(v_j(t))-\sum\limits_{i=1}^{n}c_{ji}(t)g_i(u_i(t))-\sum\limits_{i=1}^{n}d_{ji}(t)g_i(u_i(t-\sigma_i(t))) \\ \qquad -\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}d_{jik}(t)g_i(u_i(t-\sigma_i(t)))g_k(u_k(t-\sigma_k(t)))+J_j(t)\Big]\end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,p$，$n(\geq 2)$ 和 $p(\geq 2)$ 为网络中第 I 层和第 J 层中神经元的个数，$u_i(t)$ 和 $v_j(t)$ 分别表示第 I 层和第 J 层中第 i 个神经元和第 j 个神经元在 t 时刻的状态变量，$a_i(\cdot),b_i(\cdot),c_j(\cdot),d_j(\cdot),a_{ij}(\cdot),b_{ij}(\cdot),c_{ji}(\cdot),d_{ji}(\cdot),b_{ijl}(\cdot),d_{jik}(\cdot)$ 和 $I_i(\cdot),J_j(\cdot)$ 均为连续的 ω-周期函数，其中 $a_i(\cdot)$ 和 $c_j(\cdot)$ 表示正的连续有界的放大函数，$b_i(\cdot)$ 和 $d_j(\cdot)$ 为行为函数，f_j 和 g_i 分别为第 i 个和第 j 个神经元在 t 时刻的激励函数，$a_{ij}(\cdot),b_{ij}(\cdot),c_{ji}(\cdot)$ 和 $d_{ji}(\cdot)$ 为网络的一阶连接权，$b_{ijl}(\cdot)$ 和 $d_{jik}(\cdot)$ 为网络的二阶连接权，$\tau_j(t)$ 和 $\sigma_i(t)$ 为轴突信号的传输时滞。在系统(1.1)中，我们作如下假设：

(A1.1) 存在 $\underline{a}_i, \bar{a}_i, a_i > 0$ 和 $\underline{c}_j, \bar{c}_j, c_j > 0$ 使得

$$0 < \underline{a}_i \le \alpha_i(\cdot) \le \bar{a}_i, \quad 0 < \underline{c}_j \le c_j(\cdot) \le \bar{c}_j$$
$$|a_i(u) - a_i(v)| \le a_i |u - v|, \quad |c_j(u) - c_j(v)| \le c_j |u - v|$$

(A1.2) 存在 $0 < \underline{b}_i \le \bar{b}_i$ 和 $0 < \underline{d}_j \le \bar{d}_j$ 使得

$$|b_i(u) - b_i(v)| \le \bar{b}_i |u - v|, \quad b_i'(u) \ge \underline{b}_i > 0, \quad b_i(u) = 0$$
$$|d_j(u) - d_j(v)| \le \bar{d}_j |u - v|, \quad d_j'(u) \ge \underline{d}_j > 0, \quad d_j(u) = 0$$

(A1.3) 存在常数 $L_j, l_j > 0$ 和 $K_i, k_i > 0$ 使得

$$|f_j(u)| < L_j, \quad |f_j(u) - f_j(v)| \le l_j |u - v|$$
$$|g_i(u)| < K_i, \quad |g_i(u) - g_i(v)| \le k_i |u - v|$$

(A1.4) $\tau_j(t)$ 和 $\sigma_i(t)$ 是非负连续可导的 ω -周期函数且满足 $0 \le \tau_j'(t) < 1$ 和 $0 \le \sigma_i'(t) < 1$.

记

$$\tau = \max_{1 \le j \le p} \left\{ \max_{t \in [0,\omega]} \tau_j(t) \right\}, \quad \sigma = \max_{1 \le i \le n} \left\{ \max_{t \in [0,\omega]} \sigma_i(t) \right\}$$

系统(1.1)满足的初始条件为

$$u_i(s) = \varphi_i(s), v_j(s) = \psi_j(s), \quad s \in [-\max\{\tau, \sigma\}, 0] \tag{1.2}$$

这里 $\varphi_i(s)$ 和 $\psi_j(s)$ 是有界的连续函数。

2. 预备知识

在本节，我们先介绍一些下节研究中将要用到的一些符号和结论。

定义 2.1 [6] 令 X 和 Z 是两个实 Banach 空间，$L: \text{Dom}\, L \subset X \to Z$ 为一个线性算子，$N: X \to Z$ 为一个连续映射。若下述条件成立：

(i) $\text{Im}\, L$ 是 Z 中的闭集；

(ii) $\dim \text{Ker}\, L = \text{codim Im}\, L < +\infty$，

则称 L 为具有零指标的 Fredholm 算子。

定义 2.2 [7] 令 L 是具有零指标的 Fredholm 算子。若存在连续投影算子 $P: X \to X$ 和 $Q: Z \to Z$，使得

$$\text{Im}\, P = \text{Ker}\, L, \ \text{Ker}\, Q = \text{Im}\, L = \text{Im}\,(I - Q)$$

则称 $L|_{\text{Dom}\, L \cap \text{Ker}\, P}: (I - P)X \to \text{Im}\, L$ 是可逆的，它的逆映射记为 K_P.令 $\Omega \subset X$ 是一个有界开集，若 $QN(\bar{\Omega})$ 和 $K_P(I - Q)N: \bar{\Omega} \to X$ 分别为 Z 和 X 中的相对紧集，则称 N 在 $\bar{\Omega}$ 上为勒贝格紧的。

引理 2.1 [8] (Mawhin 延拓定理)设 X 是实 Banach 空间，L 是具有零指标的 Fredholm 算子，Ω 是 X 中的有界开集，N 是 $\bar{\Omega}$ 上的勒贝格紧算子。若下述条件

(i) 对任意 $\lambda \in (0,1)$，$x \in \partial\Omega \cap \text{Dom}\, L$，有 $Lx \ne \lambda Nx$；

(ii) 对任意 $x \in \partial\Omega \cap \text{Ker}\, L$，有 $QNx \ne 0$；

(iii) $\deg\{JQN, \Omega \cap \text{Ker}\, L, 0\} \ne 0$，

成立，则方程 $Lx = Nx$ 在 $\bar{\Omega} \cap \text{Dom}\, L$ 中至少存在一个解。

引理 2.2 [9] 设 $K = (k_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是非奇异 M -矩阵且有 $K\omega \le d$，则 $\omega \le K^{-1}d$。

为简便起见，在下面的讨论中，对每个连续的 ω-周期函数 Φ，我们记

$$\Phi^{+}=\max_{t\in[0,\omega]}\left|\Phi(t)\right|$$

$$\xi_j=\left(\max_{t\in[0,\omega]}\frac{1}{1-\tau_j'(t)}\right)^{1/2},\eta_i=\left(\max_{t\in[0,\omega]}\frac{1}{1-\sigma_i'(t)}\right)^{1/2},i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,p$$

3. 周期解的存在性

本节中，我们将应用引理 2.1 讨论系统(1.1)周期解的存在性。

定理 3.1 对系统(1.1)，若(A1.1)~(A1.4)成立，且

$$A=\begin{pmatrix} E_n & -A_{n\times p} \\ -B_{p\times n} & E_p \end{pmatrix}$$

是一个非奇异 M-矩阵，其中

$$A_{n\times p}=\left(A_{ij}\right)_{n\times p},\quad A_{ij}=\frac{\overline{a}_i}{\underline{a}_i\underline{b}_i}l_j\left(a_{ij}^{+}+b_{ij}^{+}\xi_j+\sum_{l=1}^{n}b_{ijl}^{+}L_l\xi_j\right)$$

$$B_{p\times n}=\left(B_{ji}\right)_{p\times n},\quad B_{ji}=\frac{\overline{c}_j}{\underline{c}_j\underline{d}_j}k_i\left(c_{ji}^{+}+d_{ji}^{+}\eta_i+\eta_i\sum_{k=1}^{n}d_{jik}^{+}K_k\right)$$

则系统(1.1)至少存在一个 ω-周期解。

证明： 令 $u(t)=\left(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t)\right)^{\mathrm{T}}$, $v(t)=\left(v_1(t),v_2(t),\cdots,v_p(t)\right)^{\mathrm{T}}$。为应用引理 2.1，我们首先取

$$X=Z=\left\{\left(u^{\mathrm{T}}(t),v^{\mathrm{T}}(t)\right)^{\mathrm{T}}\in C\left(\mathbb{R},\mathbb{R}^{n+p}\right):u(t+\omega)=u(t),v(t+\omega)=v(t),\omega>0\right\}$$

且赋以范数

$$\left\|\left(u^{T}(t),v^{T}(t)\right)^{\mathrm{T}}\right\|=\sum_{i=1}^{n}\max_{t\in[0,\omega]}\left|u_i(t)\right|+\sum_{j=1}^{n}\max_{t\in[0,\omega]}\left|v_j(t)\right|$$

易证 X 和 Z 为 Banach 空间。

对 $z(t)=\left(u_1(t),\cdots,u_n(t),v_1(t),\cdots,v_p(t)\right)^{\mathrm{T}}\in X$，分别定义线性算子 $L:\mathrm{Dom}\,L\cap X\to Z$ 和非线性算子 $N:X\to Z$ 为

$$\left(Lu_i\right)(t)=u_i'(t),\left(Lv_j\right)(t)=v_j'(t),\ \mathrm{Dom}\,L\subset X \tag{3.1}$$

和

$$\begin{aligned}\left(Nu_i\right)(t)=&-a_i\left(u_i(t)\right)\Bigg[b_i\left(u_i(t)\right)-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)f_j\left(v_j(t)\right)-\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(t)f_j\left(v_j\left(t-\tau_j(t)\right)\right)\\&-\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}b_{ijl}(t)f_j\left(v_j\left(t-\tau_j(t)\right)\right)f_l\left(v_l\left(t-\tau_l(t)\right)\right)+I_i(t)\Bigg]\\\left(Nv_j\right)(t)=&-c_j\left(v_j(t)\right)\Bigg[d_j\left(v_j(t)\right)-\sum_{i=1}^{n}c_{ji}(t)g_i\left(u_i(t)\right)-\sum_{i=1}^{n}d_{ji}(t)g_i\left(u_i\left(t-\sigma_i(t)\right)\right)\\&-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}d_{jik}(t)g_i\left(u_i\left(t-\sigma_i(t)\right)\right)g_k\left(u_k\left(t-\sigma_k(t)\right)\right)+J_j(t)\Bigg]\end{aligned} \tag{3.2}$$

另定义两个连续投影算子 $P: X \to \operatorname{Ker} L$ 和 $Q: Z \to Z$ 分别为：

$$(Pu_i)(t) = (Qu_i)(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} u_i(t)\,\mathrm{d}t,\ (Pv_j)(t) = (Qv_j)(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} v_j(t)\,\mathrm{d}t$$

这里 $i = 1,2,\cdots,n;\ j = 1,2,\cdots,p$ 。从而有

$$\operatorname{Ker} L = \mathbb{R}^{n+p},\ \operatorname{Im} L = \left\{ z(t) \mid z(t) \in Z, \int_0^{\omega} z(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$

则 $\operatorname{Im} L$ 为 Z 中的闭集且有 $\dim \operatorname{Ker} L = \operatorname{codim} \operatorname{Im} L = n + p$ ，故由定义 2.1 可知 L 是一个具有零指标的 Fredholm 算子。另外，容易验证算子 P 和 Q 满足

$$\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} L,\ \operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im} L = \operatorname{Im}(I - Q)$$

则由定义 2.2 可知 $L|_{\operatorname{Dom} L \cap \operatorname{Ker} P}$ 的逆映射 $K_P: \operatorname{Im} L \to \operatorname{Dom} L \cap \operatorname{Ker} P$ 存在，且有

$$(K_P z)(t) = \int_0^t z(s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\int_0^t z(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t \tag{3.3}$$

则 $QN: X \to Z$ 和 $K_P(I - Q)N: X \to Z$ 可分别表示为

$$(QNz)(t) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} (Nu_i)(t)\,\mathrm{d}t \right)_{n\times 1} \\ \left(\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} (Nv_j)(t)\,\mathrm{d}t \right)_{p\times 1} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

和

$$K_P(I - Q)Nz = \begin{pmatrix} \int_0^t (Nu_i)(t)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\int_0^t (Nu_i)(t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t - \left(\frac{t}{\omega} - \frac{1}{2} \right)\int_0^{\omega} (Nu_i)(t)\,\mathrm{d}s \\ \int_0^t (Ny_j)(t)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\int_0^t (Ny_j)(t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t - \left(\frac{t}{\omega} - \frac{1}{2} \right)\int_0^{\omega} (Ny_j)(t)\,\mathrm{d}s \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

显然， QN 和 $K_P(I - Q)N$ 均连续，且对 $\Omega \subset X$ ， N 为 $\bar{\Omega}$ 上的勒贝格紧集。

现在来考虑算子方程

$$Lx = \lambda Nx,\quad \lambda \in (0,1) \tag{3.6}$$

易知方程(3.6)等价于如下方程

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda \Big\{ -a_i(u_i(t)) \Big[b_i(u_i(t)) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) f_j(v_j(t)) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t) f_j(v_j(t - \tau_j(t))) \\ \qquad - \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} b_{ijl}(t) f_j(v_j(t - \tau_j(t))) f_l(v_l(t - \tau_l(t))) + I_i(t) \Big] \Big\} \\ \frac{\mathrm{d}v_j(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda \Big\{ -c_j(v_j(t)) \Big[d_j(v_j(t)) - \sum_{i=1}^{n} c_{ji}(t) g_i(u_i(t)) - \sum_{i=1}^{n} d_{ji}(t) g_i(u_i(t - \sigma_i(t))) \\ \qquad - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d_{jik}(t) g_i(u_i(t - \sigma_i(t))) g_k(u_k(t - \sigma_k(t))) + J_j(t) \Big] \Big\} \end{cases} \tag{3.7}$$

其中 $i = 1,2,\cdots,n;\ j = 1,2,\cdots,p, \lambda \in (0,1)$ 。

接下来，首先证明系统(3.7)的所有 ω-周期解所组成的集合是有界集。为方便起见，定义范数

$$\|\Phi\|_2 = \left(\int_0^\omega |\phi(t)|^2 \,\mathrm{d}t\right)^{1/2}, \quad \phi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \tag{3.8}$$

假设对某个 $\lambda \in (0,1)$， $z(t) = \left(u^{\mathrm{T}}(t), v^{\mathrm{T}}(t)\right)^{\mathrm{T}} \in X$ 是系统(3.7)的解，将(3.7)中两个方程分别同乘以 $u_i(t)$ 和 $v_j(t)$，再由 0 到 ω 积分可得

$$\begin{aligned}
0 &= -\lambda \int_0^\omega u_i(t) a_i(u_i(t)) \Bigg[b_i(u_i(t)) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) f_j(v_j(t)) - \sum_{j=1}^n b_{ij}(t) f_j\left(v_j\left(t-\tau_j(t)\right)\right) \\
&\quad - \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijl}(t) f_j\left(v_j\left(t-\tau_j(t)\right)\right) f_l\left(v_l\left(t-\tau_l(t)\right)\right) + I_i(t) \Bigg] \mathrm{d}t \\
0 &= -\lambda \int_0^\omega v_j(t) c_j(v_j(t)) \Bigg[d_j(v_j(t)) - \sum_{i=1}^n c_{ji}(t) g_i(u_i(t)) - \sum_{i=1}^n d_{ji}(t) g_i\left(u_i\left(t-\sigma_i(t)\right)\right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n d_{jik}(t) g_i\left(u_i\left(t-\sigma_i(t)\right)\right) g_k\left(u_k\left(t-\sigma_k(t)\right)\right) + J_j(t) \Bigg] \mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{3.9}$$

由于(A1.1)~(A1.3)成立，将(3.9)移项整理可得

$$\begin{aligned}
\underline{a}_i \underline{b}_i \int_0^\omega u_i^2(t)\,\mathrm{d}t &\le \overline{a}_i \int_0^\omega |u_i(t)| \Bigg[\sum_{j=1}^n a_{ij}^+ \left| f_j(v_j(t)) \right| + \sum_{j=1}^n b_{ij}^+ \left| f_j\left(v_j\left(t-\tau_j(t)\right)\right) \right| \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijl}^+ \left| f_j\left(v_j\left(t-\tau_j(t)\right)\right) f_l\left(v_l\left(t-\tau_l(t)\right)\right) \right| + I_i^+ \Bigg] \mathrm{d}t \\
&\le \overline{a}_i \int_0^\omega |u_i(t)| \Bigg[\sum_{j=1}^n a_{ij}^+ \left(l_j \,| v_j(t) | + \left| f_j(0) \right| \right) + \sum_{j=1}^n b_{ij}^+ \left(l_j \left| y_j\left(t-\tau_j(t)\right) \right| + \left| f_j(0) \right| \right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijl}^+ L_l \left(l_j \left| v_j\left(t-\tau_j(t)\right) \right| + \left| f_j(0) \right| \right) + I_i^+ \Bigg] \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
\underline{c}_j \underline{d}_j \int_0^\omega v_j^2(t)\,\mathrm{d}t &\le \overline{c}_j \int_0^\omega |v_j(t)| \Bigg[\sum_{i=1}^n c_{ji}^+ \left| g_i(u_i(t)) \right| + \sum_{i=1}^n d_{ji}^+ \left| g_i\left(u_i\left(t-\sigma_i(t)\right)\right) \right| \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n d_{jik}^+ \left| g_i\left(u_i\left(t-\sigma_i(t)\right)\right) g_k\left(u_k\left(t-\sigma_k(t)\right)\right) \right| + J_j^+ \Bigg] \mathrm{d}t \\
&\le \overline{c}_j \int_0^\omega |v_j(t)| \Bigg[\sum_{i=1}^n c_{ji}^+ \left(k_i \left| u_i(t) \right| + \left| g_i(0) \right| \right) + \sum_{i=1}^n d_{ji}^+ \left(k_i \left| u_i\left(t-\sigma_i(t)\right) \right| + \left| g_i(0) \right| \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n d_{jik}^+ K_k \left(k_i \left| u_i\left(t-\sigma_i(t)\right) \right| + \left| g_i(0) \right| \right) + J_j^+ \Bigg] \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

应用积分不等式和(A1.4)有

$$\begin{aligned}
\underline{a}_i \underline{b}_i \int_0^\omega u_i^2(t)\,\mathrm{d}t &\le \overline{a}_i \sum_{j=1}^n a_{ij}^+ l_j \int_0^\omega |u_i(t)| |v_j(t)| \,\mathrm{d}t + \overline{a}_i \sum_{j=1}^n b_{ij}^+ l_j \int_0^\omega |u_i(t)| \left| v_j\left(t-\tau_j(t)\right) \right| \mathrm{d}t \\
&\quad + \overline{a}_i \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijl}^+ L_l l_j \int_0^\omega |u_i(t)| \left| v_j\left(t-\tau_j(t)\right) \right| \mathrm{d}t \\
&\quad + \overline{a}_i \sum_{j=1}^n \left\{ I_i^+ + \left(a_{ij}^+ + b_{ij}^+ + \sum_{l=1}^n b_{ijl}^+ L_l \right) \left| f_j(0) \right| \right\} \int_0^\omega |u_i(t)| \,\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{3.10}$$

和

$$\begin{aligned}\underline{c}_j\underline{d}_j\int_0^{\omega}v_j^2(t)\,\mathrm{d}t\le{}&\overline{c}_j\sum_{i=1}^{n}c_{ji}^{+}k_i\int_0^{\omega}|u_i(t)||v_j(t)|\mathrm{d}t+\overline{c}_j\sum_{i=1}^{n}d_{ji}^{+}k_i\int_0^{\omega}|u_i(t-\sigma_i(t))||v_j(t)|\,\mathrm{d}t\\&+\overline{c}_j\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}d_{jik}^{+}K_kk_i\int_0^{\omega}|u_i(t-\sigma_i(t))||v_j(t)|\mathrm{d}t\\&+\overline{c}_j\left\{J_j^{+}+\sum_{i=1}^{n}\left(c_{ji}^{+}+d_{ji}^{+}+\sum_{k=1}^{n}d_{jik}^{+}K_k\right)|g_i(0)|\right\}\int_0^{\omega}|v_j(t)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{3.11}$$

注意到

$$\int_0^{\omega}|u_i(t-\sigma_i(t))|^2\,\mathrm{d}t\le\eta_i^2\int_0^{\omega}|u_i(t)|^2\,\mathrm{d}t,\ \int_0^{\omega}|v_j(t-\tau_j(t))|^2\,\mathrm{d}t\le\xi_j^2\int_0^{\omega}|v_j(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

由(3.10)和(3.11)可得

$$\begin{aligned}\underline{a}_i\underline{b}_i\left(\int_0^{\omega}u_i^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\le{}&\overline{a}_i\sum_{j=1}^{n}l_j\left(a_{ij}^{+}+b_{ij}^{+}\xi_j+\sum_{l=1}^{n}b_{ijl}^{+}L_l\xi_j\right)\left(\int_0^{\omega}v_j^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\\&+\overline{a}_i\left\{I_i^{+}+\sum_{j=1}^{n}\left[a_{ij}^{+}+b_{ij}^{+}+\sum_{l=1}^{n}b_{ijl}^{+}L_l\right]|f_j(0)|\right\}\sqrt{\omega}\end{aligned}\tag{3.12}$$

和

$$\begin{aligned}\underline{c}_j\underline{d}_j\left(\int_0^{\omega}v_j^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\le{}&\overline{c}_j\sum_{i=1}^{n}k_i\left(c_{ji}^{+}+d_{ji}^{+}\eta_i+\sum_{k=1}^{n}d_{jik}^{+}K_k\eta_i\right)\left(\int_0^{\omega}u_i^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\\&+\overline{c}_j\left\{J_j^{+}+\sum_{i=1}^{n}\left(c_{ji}^{+}+d_{ji}^{+}+\sum_{k=1}^{n}d_{jik}^{+}K_k\right)|g_i(0)|\right\}\sqrt{\omega}\end{aligned}\tag{3.13}$$

由(3.8)中范数的定义可知(3.12)和(3.13)分别等价于

$$\|u_i\|_2\le\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\|v_j\|_2+A_i,\quad \|v_j\|_2\le\sum_{i=1}^{n}B_{ji}\|u_i\|_2+B_j\tag{3.14}$$

其中

$$\begin{aligned}&A_{ij}=\frac{\overline{a}_i}{\underline{a}_i\underline{b}_i}l_j\left(a_{ij}^{+}+b_{ij}^{+}\xi_j+\sum_{l=1}^{n}b_{ijl}^{+}L_l\xi_j\right),\ A_i=\frac{\overline{a}_i}{\underline{a}_i\underline{b}_i}\left\{I_i^{+}+\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}^{+}+b_{ij}^{+}+\sum_{l=1}^{n}b_{ijl}^{+}L_l\right)|f_j(0)|\right\}\sqrt{\omega}\\&B_{ji}=\frac{\overline{c}_j}{\underline{c}_j\underline{d}_j}k_i\left(c_{ji}^{+}+d_{ji}^{+}\eta_i+\eta_i\sum_{k=1}^{n}d_{jik}^{+}K_k\right),\ B_j=\frac{\overline{c}_j}{\underline{c}_j\underline{d}_j}\left\{J_j^{+}+\sum_{i=1}^{n}\left(c_{ji}^{+}+d_{ji}^{+}+\sum_{k=1}^{n}d_{jik}^{+}K_k\right)|g_i(0)|\right\}\sqrt{\omega}\end{aligned}\tag{3.15}$$

进一步由(3.14)可得

$$AZ\le B\tag{3.16}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}E_n & -A_{n\times p}\\ -B_{p\times n} & E_p\end{pmatrix},$$

$$Z=\left(\|u_1\|_2,\cdots,\|u_1\|_2,\|v_1\|_2,\cdots,\|v_p\|_2\right)^{\mathrm{T}},\ B=\left(A_1,\cdots,A_n,B_1,\cdots,B_p\right)^{\mathrm{T}}$$

这里 $A_{n\times p}=\left(A_{ij}\right)_{n\times p},B_{p\times n}=\left(B_{ji}\right)_{p\times n}$， A_{ij} 和 B_{ji} 由(3.15)所定义。

注意到 A 是一个非奇异 M -矩阵，于是根据引理 2.2 可知

$$Z\le A^{-1}B=\left(N_1,N_2,\cdots,N_{n+p}\right)^{\mathrm{T}}$$

从而有

$$\|u_i\|_2 \le N_i, \quad \|v_j\|_2 \le N_{n+j} \tag{3.17}$$

即有

$$\left(\int_0^{\omega}|u_i(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \le N_i, \quad \left(\int_0^{\omega}|v_j(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \le N_{n+j} \tag{3.18}$$

由微分中值定理可知，存在 $t_i, t_j \in [0,\omega]$ 使得

$$|u_i(t_i)| \le N_i/\sqrt{\omega} \triangleq N_i^*, \quad |v_j(t_j)| \le N_{n+j}/\sqrt{\omega} \triangleq N_{n+j}^* \tag{3.19}$$

这里 $i=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,p$，进一步由(3.7)可得

$$\begin{aligned}
\int_0^{\omega}|u_i'(t)|\mathrm{d}t &\le \bar{a}_i\bar{b}_i\sqrt{\omega}N_i + \bar{a}_i\omega\left[I_i^+ + \sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}^+ + b_{ij}^+ + \sum_{l=1}^{n}b_{ijl}^+L_l\right)|f_j(0)|\right] \\
&\quad + \bar{a}_i\sqrt{\omega}\sum_{j=1}^{n}l_j\left(a_{ij}^+ + b_{ij}^+\xi_j + \sum_{l=1}^{n}b_{ijl}^+L_l\xi_j\right)N_{n+j} \\
&= \bar{a}_i\bar{b}_i\sqrt{\omega}N_i + \underline{a}_i\underline{b}_i\sqrt{\omega}A_i + \underline{a}_i\underline{b}_i\sqrt{\omega}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}N_{n+j} \triangleq R_i \\
\int_0^{\omega}|v_j'(t)|\mathrm{d}t &\le \bar{c}_j\bar{d}_j\sqrt{\omega}N_{n+j} + \bar{c}_j\omega\left[J_j^+ + \sum_{i=1}^{n}\left(c_{ji}^+ + d_{ji}^+ + \sum_{k=1}^{n}d_{jik}^+K_k\right)|g_i(0)|\right] \\
&\quad + \bar{c}_j\sqrt{\omega}\sum_{i=1}^{n}\left(c_{ji}^+ + d_{ji}^+\eta_i + \sum_{k=1}^{n}d_{jik}^+K_k\eta_i\right)k_iN_i \\
&= \bar{c}_j\bar{d}_j\sqrt{\omega}N_{n+j} + \underline{c}_j\underline{d}_j\sqrt{\omega}B_j + \underline{c}_j\underline{d}_j\sqrt{\omega}\sum_{i=1}^{n}B_{ji}N_i \triangleq W_j
\end{aligned} \tag{3.20}$$

注意到

$$|u_i(t)| \le N_i^* + \int_0^{\omega}|u_i'(t)|\,\mathrm{d}t, \quad |v_j(t)| \le N_{n+j}^* + \int_0^{\omega}|v_j'(t)|\,\mathrm{d}t \tag{3.21}$$

于是结合(3.19)和(3.20)，对任意 $t\in[0,\omega]$，我们有

$$|u_i(t)| < N_i^* + R_i, \quad |v_j(t)| < N_{n+j}^* + W_j \tag{3.22}$$

其中 $i=1,2,\cdots,n; j=1,\cdots,p$。记 $R_i^* = N_i^* + R_i, W_j^* = N_{n+j}^* + W_j$，并取

$$\Omega = \left\{\left(u^{\mathrm{T}}(t), v^{\mathrm{T}}(t)\right)^{\mathrm{T}} \in X : |u_i(t)| \le R_i^*, |v_j(t)| < W_j^*\right\}$$

显然，对每个 $\lambda\in(0,1)$，$z(t)\in\partial\Omega\cap\mathrm{Dom}\,L$ 有 $Lz \ne \lambda Nz$，即引理 2.1 中条件(i)成立。

当 $\left(u^{\mathrm{T}}, v^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \in \partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L = \partial\Omega\cap\mathbb{R}^{n+p}$ 时，$\left(u^{\mathrm{T}}, v^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$ 是 $\mathbb{R}^{n+p}$ 中的一个常向量，且满足 $|u_i(t)| = R_i^*, |v_j(t)| = W_j^*$，于是有

$$\begin{aligned}
u_i(QNu)_i &= -u_ia_i(u_i)b_i(u_i) + u_ia_i(u_i)\sum_{j=1}^{n}f_j(v_j(t))\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}a_{ij}(t)\mathrm{d}t \\
&\quad + u_ia_i(u_i)\sum_{j=1}^{n}f_j(v_j)\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}b_{ij}(t)\mathrm{d}t \\
&\quad + u_ia_i(u_i)\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}f_j(v_j)f_l(v_l)\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}b_{ijl}(t)\mathrm{d}t \\
&\quad - u_ia_i(u_i)\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}I_i(t)\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{3.23}$$

和

$$
\begin{aligned}
v_j(QNv)_j =& -v_j c_j(v_j) d_j(v_j) + v_j c_j(v_j) \sum_{i=1}^{n} g_i(u_i) \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} c_{ji}(t)\mathrm{d}t \\
& + v_j c_j(v_j) \sum_{i=1}^{n} g_i(u_i) \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} d_{ji}(t)\mathrm{d}t \\
& + v_j c_j(v_j) \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} g_i(u_i) g_k(u_k) \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} d_{jik}(t)\mathrm{d}t \\
& + v_j c_j(v_j) \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} J_j(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

以下来证明引理 2.1 中的条件(ii)也成立。为此，不妨设 $u_i(QNw)_i \ge 0, v_j(QNw)_j \ge 0$，即由(3.4)可得

$$
\begin{aligned}
u_i a_i(u_i) b_i(u_i) \le& u_i a_i(u_i) \sum_{j=1}^{n} f_j(v_j(t)) \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} a_{ij}(t)\mathrm{d}t + u_i a_i(u_i) \sum_{j=1}^{n} f_j(v_j) \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} b_{ij}(t)\mathrm{d}t \\
& + u_i a_i(u_i) \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} f_j(v_j) f_l(v_l) \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} b_{ijl}(t)\mathrm{d}t - u_i a_i(u_i) \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} I_i(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

和

$$
\begin{aligned}
v_j c_j(v_j) d_j(v_j) \le& v_j c_j(v_j) \sum_{i=1}^{n} g_i(u_i) \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} c_{ji}(t)\mathrm{d}t + v_j c_j(v_j) \sum_{i=1}^{n} g_i(u_i) \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} d_{ji}(t)\mathrm{d}t \\
& + v_j c_j(v_j) \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} g_i(u_i) g_k(u_k) \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} d_{jik}(t)\mathrm{d}t + v_j c_j(v_j) \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} J_j(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

成立。

由于(A1.1)~(A1.4)成立，因此由(3.25)和(3.26)整理可得

$$
\begin{aligned}
\underline{a}_i \underline{b}_i u_i^2 \le& |u_i| \bar{a}_i \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij}^+ + b_{ij}^+ \xi_j + \sum_{l=1}^{n} L_l b_{ijl}^+ \xi_j \right) l_j |v_j| \\
& + |u_i| \bar{a}_i \left\{ I_i^+ + \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij}^+ + b_{ij}^+ + \sum_{l=1}^{n} L_l b_{ijl}^+ \right) |f_j(0)| \right\} \\
\underline{c}_j \underline{d}_j v_j^2 \le& |v_j| \bar{c}_j \sum_{i=1}^{n} \left(c_{ji}^+ + d_{ji}^+ \eta_i + \sum_{k=1}^{n} \eta_i K_k d_{jik}^+ \right) k_i |u_i| \\
& + |v_j| \bar{c}_j \left\{ J_j^+ + \sum_{i=1}^{n} \left(c_{ji}^+ + d_{ji}^+ + \sum_{k=1}^{n} K_k d_{jik}^+ \right) |g_i(0)| \right\}
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

注意到 $|u_i(t)| = R_i^*, |v_j(t)| = W_j^*$，将其代入到(3.27)中则有

$$
R_i^* \le \sum_{j=1}^{n} A_{ij} W_j^* + \frac{1}{\sqrt{\omega}} A_i, \quad W_j^* \le \sum_{i=1}^{n} B_{ji} R_i^* + B_j \sqrt{\omega} \tag{3.28}
$$

另一方面，由于 $R_i^* = N_i^* + R_i, W_j^* = T_j^* + W_j$，所以存在某个 i 和 j 使得

$$
R_i^* > \sum_{j=1}^{n} A_{ij} W_j^* + \frac{A_i}{\sqrt{\omega}}
$$

或

$$
W_j^* > \sum_{i=1}^{n} B_{ji} R_i^* + \frac{B_j}{\sqrt{\omega}}
$$

显然，这与(3.28)相矛盾，也即存在某个 i 和 j，使得

$$u_i\left(QNw\right)_i<0 \text{ 或 } v_j\left(QNw\right)_j<0 \tag{3.29}$$

从而有

$$\left\|QN\left(u^{\mathrm{T}},v^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\right\|=\sum_{i=1}^{n}\left|\left(QNu_i\right)(t)\right|+\sum_{j=1}^{n}\left|\left(QNv_{n+j}\right)(t)\right|>0$$

因此，当$\left(u^{\mathrm{T}},v^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\in\partial\Omega\cap\operatorname{Ker}L$时，有$QN\left(u^{\mathrm{T}},v^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\neq 0$，即引理2.1中条件(ii)成立。

最后来证明引理2.1中条件(iii)成立。为此，定义连续函数

$$H\left(z,\theta\right)=-\theta z+\left(1-\theta\right)QNz,\ \ \theta\in\left[0,1\right]$$

其中$z=\left(u_1,\cdots,u_n,v_1,\cdots,v_p\right)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{n+p}$。当$z\in\partial\Omega\cap\operatorname{Ker}L$时，由(3.29)可知

$$\left\|H\left(z,\theta\right)\right\|=\sum_{i=1}^{n}\left|-\theta u_i+\left(1-\theta\right)\left(QNz\right)_i\right|+\sum_{j=1}^{n}\left|-\theta v_j+\left(1-\theta\right)\left(QNz\right)_{n+j}\right|>0 \tag{3.30}$$

因此，由同伦不变性可得

$$\deg\left\{JQNz,\Omega\cap\operatorname{Ker}L,0\right\}=\deg\left\{-z,\Omega\cap\operatorname{Ker}L,0\right\}=\left(-1\right)^{n+p}\neq 0$$

综上所述，Ω满足引理2.1中的所有条件，从而由引理2.1可知系统(1.1)至少存在一个ω-周期解。

4. 周期解的稳定性

本节，我们将通过构造适当的Lyapunov泛函研究系统(1.1)的周期解的全局稳定性。

定理4.1 对系统(1.1)，假定(A1.1)~(A1.4)成立且定理3.1中的所有条件均满足。若Γ是一个非奇异M-矩阵，其中

$$\Gamma=\begin{pmatrix}-P_i & -P_{ij}\\ -Q_{ji} & -Q_j\end{pmatrix},\quad w(t)=\left(x_1^2(t),\cdots,x_n^2(t),y_1^2(t),\cdots,y_p^2(t)\right)^{\mathrm{T}}$$

这里

$$P_i=\operatorname{diag}\left(p_1,\cdots,p_n\right),\quad P_{ij}=\left(p_{ij}\right)_{n\times n},\quad Q_{ji}=\left(q_{ji}\right)_{n\times n},\quad Q_j=\operatorname{diag}\left(q_1,q_2,\cdots,q_n\right)$$

其中

$$\begin{aligned}
p_i&=-\underline{a}_i\underline{b}_i+a_i\frac{C_i}{\underline{a}_i}+\frac{\overline{a}_i}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}^{+}+b_{ij}^{+}+\sum_{l=1}^{n}\left(b_{ijl}^{+}+b_{ilj}^{+}\right)L_l\right)l_j\\
p_{ij}&=\frac{\overline{a}_i}{2}\left(a_{ij}^{+}+b_{ij}^{+}\frac{1}{1-\tau_j'^{+}(t)}+\sum_{l=1}^{n}\left(b_{ijl}^{+}+b_{ilj}^{+}\right)\frac{1}{1-\tau_j'^{+}(t)}L_l\right)l_j\\
q_i&=-\underline{c}_j\underline{d}_j+c_j\frac{D_j}{\underline{c}_j}+\frac{\overline{c}_j}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[c_{ji}^{+}+d_{ji}^{+}+\sum_{k=1}^{n}\left(d_{jik}^{+}+d_{jki}^{+}\right)K_k\right]k_i\\
q_{ji}&=\frac{\overline{c}_j}{2}\left[c_{ji}^{+}+d_{ji}^{+}\frac{1}{1-\sigma_i'^{+}(t)}+\sum_{k=1}^{n}\left(d_{jik}^{+}+d_{jki}^{+}\right)K_k\frac{1}{1-\sigma_i'^{+}(t)}\right]k_i
\end{aligned} \tag{4.1}$$

则系统(1.1)的ω-周期解是全局稳定的。

证明： 由定理3.1可知，系统(1.1)至少存在一个ω-周期解，记为$z^*(t)=\left(u_1^*(t),\cdots,u_n^*(t),v_1^*(t),\cdots,v_p^*(t)\right)^{\mathrm{T}}$。假设$z(t)=\left(x_1(t),\cdots,x_n(t),y_1(t),\cdots,y_p(t)\right)^{\mathrm{T}}$是系统(1.1)的任意解。令$x_i(t)=u_i(t)-u_i^*(t)$，$y_j(t)=v_j(t)-v_j^*$和

$$\tilde{f}_j\left(y_j(t)\right)=f_j\left(y_j(t)+v_j^*(t)\right)-f_j\left(v_j^*(t)\right),\quad \tilde{g}_i\left(x_i(t)\right)=g_i\left(x_i(t)+u_i^*(t)\right)-g_i\left(u_i^*(t)\right)$$

则系统(1.1)可化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=-a_i(u_i(t))\Big\{b_i(u_i(t))-b_i(u_i^*(t))-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)\tilde{f}_j(y_j(t))-\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(t)\tilde{f}_j(y_j(t-\tau_j(t))) \\ \qquad -\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\big[b_{ijl}(t)f_l(v_l(t-\tau_l(t)))+b_{ilj}(t)f_l(v_l^*(t-\tau_l(t)))\big]\tilde{f}_j(y_j(t-\tau_j(t)))\Big\} \\ \qquad -\big[a_i(u_i(t))-a_i(u_i^*(t))\big]\Big[b_i(u_i^*(t))-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)f_j(v_j^*(t))-\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(t)f_j(v_j^*(t-\tau_j(t))) \\ \qquad -\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}b_{ijl}(t)f_j(v_j^*(t-\tau_j(t)))f_l(v_l^*(t-\tau_l(t)))+I_i(t)\Big] \\ \dfrac{\mathrm{d}y_j(t)}{\mathrm{d}t}=-c_j(v_j(t))\Big\{d_j(v_j(t))-d_j(v_j^*(t))-\sum_{i=1}^{n}c_{ji}(t)\tilde{g}_i(x_i(t))-\sum_{i=1}^{n}d_{ji}(t)\tilde{g}_i(x_i(t-\sigma_i(t))) \\ \qquad -\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\big[d_{jik}(t)g_k(u_k(t-\sigma_k(t)))+d_{jki}(t)g_k(u_k^*(t-\sigma_k(t)))\big]\tilde{g}_i(x_i(t-\sigma_i(t)))\Big\} \\ \qquad -\big[c_j(v_j(t))-c_j(v_j^*(t))\big]\Big[d_j(v_j^*(t))-\sum_{i=1}^{n}c_{ji}(t)g_i(u_i^*(t))-\sum_{i=1}^{n}d_{ji}(t)g_i(u_i^*(t-\sigma_i(t))) \\ \qquad -\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}d_{jik}(t)g_i(u_i^*(t-\sigma_i(t)))g_k(u_k^*(t-\sigma_k(t)))+J_j(t)\Big]\end{cases} \tag{4.2}$$

构造函数

$$\begin{aligned}V_i(t)&=\frac{x_i^2(t)}{2}+\frac{\overline{a}_i}{2}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^{+}l_j\frac{1}{1-\tau_j'^{+}(t)}\int_{t-\tau_j(t)}^{t}y_j^2(s)\mathrm{d}s \\ &\quad+\frac{\overline{a}_i}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(b_{ijl}^{+}+b_{ilj}^{+}\right)L_l l_j\frac{1}{1-\tau_j'^{+}(t)}\int_{t-\tau_j(t)}^{t}y_j^2(s)\mathrm{d}s \\ V_{n+j}(t)&=\frac{y_j^2(t)}{2}+\frac{\overline{c}_j}{2}\sum_{i=1}^{n}d_{ji}^{+}k_i\frac{1}{1-\sigma_i'^{+}(t)}\int_{t-\sigma_i(t)}^{t}x_i^2(s)\mathrm{d}s \\ &\quad+\frac{\overline{c}_j}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(d_{jik}^{+}+d_{jki}^{+}\right)K_k k_i\frac{1}{1-\sigma_i'^{+}(t)}\int_{t-\sigma_i(t)}^{t}x_i^2(s)\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{4.3}$$

计算 $V_i(t)$ 和 $V_{n+j}(t)$ 沿系统(4.2)的解的全导数可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_i(t)&\le-\underline{a}_i\underline{b}_i x_i^2(t)+\frac{\overline{a}_i}{2}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{+}(t)l_j x_i^2(t)+\frac{\overline{a}_i}{2}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{+}(t)l_j y_j^2(t)+\frac{\overline{a}_i}{2}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^{+}l_j x_i^2(t) \\ &\quad+\frac{\overline{a}_i}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(b_{ijl}^{+}+b_{ilj}^{+}\right)L_l l_j x_i^2(t)+a_i\frac{C_i}{\underline{a}_i}x_i^2(t) \\ &\quad+\frac{\overline{a}_i}{2}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^{+}l_j y_j^2(t-\tau_j(t))+\frac{\overline{a}_i}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(b_{ijl}^{+}+b_{ilj}^{+}\right)L_l l_j y_j^2(t-\tau_j(t)) \\ &\quad+\frac{\overline{a}_i}{2}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^{+}l_j\frac{1}{1-\tau_j'^{+}(t)}\left(y_j^2(t)-y_j^2(t-\tau_j(t))(1-\tau_j'(t))\right) \\ &\quad+\frac{\overline{a}_i}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(b_{ijl}^{+}+b_{ilj}^{+}\right)L_l l_j\frac{1}{1-\tau_j'^{+}(t)}\left(y_j^2(t)-y_j^2(t-\tau_j(t))(1-\tau_j'(t))\right) \\ &\le p_i x_i^2(t)+\sum_{j=1}^{n}p_{ij}y_j^2(t)\end{aligned} \tag{4.4}$$

和

$$\begin{aligned}\dot{V}_{n+j}(t) \le & -\underline{c}_j \underline{d}_j y_j^2(t) + \frac{\overline{c}_j}{2}\sum_{i=1}^{n} c_{ji}^{+} k_i x_i^2(t) + \frac{\overline{c}_j}{2}\sum_{i=1}^{n} c_{ji}^{+} k_i y_j^2(t) + \frac{\overline{c}_j}{2}\sum_{i=1}^{n} d_{ji}^{+} k_i y_j^2(t) \\ & + \frac{\overline{c}_j}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(d_{jik}^{+} + d_{jki}^{+}\right) K_k k_i y_j^2(t) + c_j \frac{D_j}{\underline{c}_j} y_j^2(t) \\ & + \frac{\overline{c}_j}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(d_{jik}^{+} + d_{jki}^{+}\right) K_k k_i x_i^2\left(t-\sigma_i(t)\right) + \frac{\overline{c}_j}{2}\sum_{i=1}^{n} d_{ji}^{+} k_i x_i^2\left(t-\sigma_i(t)\right) \\ & + \frac{\overline{c}_j}{2}\sum_{i=1}^{n} d_{ji}^{+} k_i \frac{1}{1-\sigma_i'^{+}(t)}\left(x_i^2(t) - x_i^2\left(t-\sigma_i(t)\right)\left(1-\sigma_i'(t)\right)\right) \\ & + \frac{\overline{c}_j}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(d_{jik}^{+} + d_{jki}^{+}\right) K_k k_i \frac{1}{1-\sigma_i'^{+}(t)}\left(x_i^2(t) - x_i^2\left(t-\sigma_i(t)\right)\left(1-\sigma_i'(t)\right)\right) \\ \le & \, q_j y_j^2(t) + \sum_{i=1}^{n} q_{ji} x_i^2(t)\end{aligned} \tag{4.5}$$

其中 p_i, p_{ij} 和 q_i, q_{ji} 的定义见(4.1)，C_i 和 D_j 分别表示 $\left|(\nabla u)_i^*(t)\right|$ 和 $\left|(\nabla v)_j^*(t)\right|$ 的界，这里

$$\begin{aligned}(\nabla u)_i^*(t) = & -a_i\left(u_i^*(t)\right)\Bigg[b_i\left(u_i^*(t)\right) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) f_j\left(v_j^*(t)\right) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t) f_j\left(v_j^*\left(t-\tau_j(t)\right)\right) \\ & - \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} b_{ijl}(t) f_j\left(v_j^*\left(t-\tau_j(t)\right)\right) f_l\left(v_l^*\left(t-\tau_l(t)\right)\right) + I_i(t)\Bigg]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\nabla v)_j^*(t) = & -c_j\left(v_j^*(t)\right)\Bigg[d_j\left(v_j^*(t)\right) - \sum_{i=1}^{n} c_{ji}(t) g_i\left(u_i^*(t)\right) - \sum_{i=1}^{n} d_{ji}(t) g_i\left(u_i^*\left(t-\sigma_i(t)\right)\right) \\ & - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d_{jik}(t) g_i\left(u_i^*\left(t-\sigma_i(t)\right)\right) g_k\left(u_k^*\left(t-\sigma_k(t)\right)\right) + J_j(t)\Bigg]\end{aligned}$$

记

$$V(t) = \left(V_{11}(t), \cdots, V_{1n}(t), V_{21}(t), \cdots, V_{2p}(t)\right)^{\mathrm{T}}$$

则由(4.4)和(4.5)可得

$$V'(t) \le -\Gamma w(t) \tag{4.6}$$

其中

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -P_i & -P_{ij} \\ -Q_{ji} & -Q_j \end{pmatrix}, \quad w(t) = \left(x_1^2(t), \cdots, x_n^2(t), y_1^2(t), \cdots, y_p^2(t)\right)^{\mathrm{T}}$$

这里

$$P_i = \mathrm{diag}(p_1, \cdots, p_n), \quad P_{ij} = (p_{ij})_{n\times n}, \quad Q_{ji} = (q_{ji})_{n\times n}, \quad Q_j = \mathrm{diag}(q_1, q_2, \cdots, q_n)$$

由于 Γ 是一个非奇异 M -矩阵，于是由引理 2.1 可得

$$\Gamma^{-1} V'(t) \le -w(t) \tag{4.7}$$

定义向量

$$\overline{V}(t) = \left(\overline{V}_1(t), \cdots, \overline{V}_n(t), \overline{V}_{n+1}(t), \cdots, \overline{V}_{n+p}(t)\right)^{\mathrm{T}} = \Gamma^{-1} V(t) \ge 0 \tag{4.8}$$

对(4.8)关于 t 求导可得

$$\bar{V}'(t)=\left(\bar{V}_1'(t),\cdots,\bar{V}_n'(t),\bar{V}_{n+1}'(t),\cdots,\bar{V}_{n+p}'(t)\right)^{\mathrm{T}}=\Gamma^{-1}V'(t)$$

即有

$$\bar{V}_i'(t)\le -x_i^2(t),\quad \bar{V}_{n+j}'(t)\le -y_j^2(t),\quad i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,p \tag{4.9}$$

对(4.9)中两式两端分别从 0 到 t 积分可得

$$\begin{aligned}&\bar{V}_i(t)+\int_0^t x_i^2(s)\,\mathrm{d}s\le \bar{V}_i(0)<+\infty\\&\bar{V}_{n+j}(t)+\int_0^t y_j^2(s)\,\mathrm{d}s\le \bar{V}_{n+j}(0)<+\infty\end{aligned} \tag{4.10}$$

因此有

$$\int_0^t x_i^2(s)\,\mathrm{d}s\le \bar{V}_i(0)<+\infty,\quad \int_0^t y_j^2(s)\,\mathrm{d}s\le \bar{V}_{n+j}(0)<+\infty \tag{4.11}$$

由(4.3)和(4.9)则有

$$x_i^2(t)\le 2V_i(t),\quad y_j^2(t)\le 2V_{n+j}(t)$$

进一步由(4.8)可知 $w(t)\le 2\Gamma\bar{V}(t)$，从而有

$$\Gamma^{-1}w(t)\le 2\bar{V}(t)\le 2\bar{V}(0)<+\infty$$

即有

$$\left|u_i(t)-u_i^*(t)\right|^2<+\infty,\quad \left|v_j(t)-v_j^*(t)\right|^2<+\infty \tag{4.12}$$

这意味着 $|u_i(t)|$ 和 $|v_j(t)|$ 是有界的。结合(1.1)可知 $u_i'(t)$ 和 $v_j'(t)$ 也有界，因此，由 Barbalat 引理[10]可知

$$\lim_{t\to+\infty}\left|u_i(t)-u_i^*(t)\right|=0,\quad \lim_{t\to+\infty}\left|v_j(t)-v_j^*(t)\right|=0,\quad i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,p$$

定理证毕。

基金项目

国家自然科学基金项目(11371368，61305076)；河北省自然科学基金项目(A2014506015)。

参考文献 (References)

[1] 王阿明, 刘天放, 王绪. 高阶神经网络模型特性研究[J]. 中国矿业大学学报, 2003, 32(2): 177-179.

[2] Chen, Z., Zhao, D. and Ruan, J. (2007) Dynamic Analysis of High-Order Cohen-Grossberg Neural Networks with Time Delay. *Chaos*, *Solitons* & *Fractals*, **32**, 1538-1546. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.11.095

[3] Ke, Y. and Miao, C. (2011) Periodic Solutions for High-Order Cohen-Grossberg-Type BAM Neural Networks with Time-Delays. *Advances in Neural Networks*, **6675**, 375-384. https://doi.org/10.1007/978-3-642-21105-8_44

[4] Ren, F. and Cao, J. (2007) Periodic Oscillation of Higher-Order Bidirectional Associative Memory Neural Networks with Periodic Coefficients and Delays. *Nonlinearity*, **20**, 605-629. https://doi.org/10.1088/0951-7715/20/3/004

[5] 王林山. 时滞递归神经网络[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[6] 许天周. 应用泛函分析[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

[7] 郭大钧, 孙经先, 刘兆理. 非线性常微分方程泛函方法[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2005.

[8] Gaines, R. and Mawhin, J. (1977) Coincidence Degree, and Nonlinear Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/BFb0089537

[9] 陈景良, 陈向晖. 特殊矩阵[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001.

[10] Gopalsamy, K. (1992) Stability and Oscillation in Delay Equation of Population Dynamics. Kluwer Academic Publishers, Dordreeht.

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究