Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2017, 6(3), 376-381
Published Online May 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.63043

Hans汉斯

New Inclusion Sets of Eigenvalue Different from 1 for a Stochastic Matrix

Xiaoxiao Wang

School of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming Yunnan
Email: m18213961720@163.com

Received: May 5th, 2017; accepted: May 24th, 2017; published: May 27th, 2017

Abstract

Two new inclusion sets are given to localize all eigenvalues different from 1 for stochastic matrices by using the double α-eigenvalue inclusion theorem and the theory of modified matrices, and then two new nonsingular sufficient conditions of stochastic matrices are obtained. Numerical examples are given to illustrate that the proposed sets are better than the sets were obtained from the existing literatures.

Keywords

Stochastic Matrix, Double α_1-Matrices, Eigenvalue Inclusion Set

随机矩阵非1特征值的新包含集

王笑笑

云南大学，数学与统计学院，云南 昆明
Email: m18213961720@163.com

收稿日期：2017年5月5日；录用日期：2017年5月24日；发布日期：2017年5月27日

摘　要

利用双α-型特征值包含定理及修正矩阵理论，给出随机矩阵两个新的非1特征值包含集，并由此得到随机矩阵非奇异的两个新的充分条件。数值算例表明，所得结果优于几个现有结果。

关键词

随机矩阵，双α_1-矩阵，特征值包含集

文章引用: 王笑笑. 随机矩阵非 1 特征值的新包含集[J]. 应用数学进展, 2017, 6(3): 376-381.
https://doi.org/10.12677/aam.2017.63043

1. 引言

随机矩阵及其特征值定位在人口流动模型、计算机辅助设计等领域都有着重要应用[1] [2]，其定义如下：

定义 1：设 $A=\left[a_{ij}\right]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为非负矩阵。若它的所有行和都为 1，即

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=1,\ \ \forall i\in N=\{1,2,\cdots,n\},$$

则称 A 为(行)随机矩阵。

由非负矩阵的 Perron-Frobenius 定理知，1 是随机矩阵模的最大特征值，称为占优特征值，且 $e=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{n}$ 是其对应的一个特征向量。故对于随机矩阵特征值的定位问题，只需对其所有非 1 特征值定位即可。为研究该问题，L. J. Cvetković 等在[3]中引入修正矩阵的概念，并将 Gersgorin 圆盘定理[4]应用于修正矩阵，得到如下结果：

定理 2 [3]：设 $A=\left[a_{ij}\right]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为随机矩阵，$\sigma(A)$ 表示 A 的谱，$trace(A)$ 为 A 的迹，$l_i(A)=\min\limits_{k\neq i}a_{ki}$，$\gamma=\max\limits_{1\le i\le n}\left(a_{ii}-l_i(A)\right)$，若 $\lambda\in\sigma(A)\setminus\{1\}$，则

$$\lambda\in\Theta^{\mathrm{sto}}(A)=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-\gamma\right|\le 1-trace(A)+(n-1)\gamma\right\}.$$

Shen 等在[5]中通过给出随机矩阵非奇异的三个充分条件，得到了随机矩阵非 1 实特征值的三个包含集。Li 等在[6]中推广了 Shen 的结果，又得到了如下定理：

定理 3 [6]：设 $A=\left[a_{ij}\right]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为随机矩阵，若 $\lambda\in\sigma(A)\setminus\{1\}$，则

$$\lambda\in\mathrm{B}^{stol}(A)=\bigcup_{\substack{i,j\in N\\ j\neq i}}\left\{z\in\mathbb{C}:\left|a_{ii}-z-l_i(A)\right|\left|a_{jj}-z-l_j(A)\right|\le Cl_i(A)Cl_j(A)\right\},$$

其中

$$Cl_i(A)=\sum_{k\neq i}\left|a_{ki}-l_i(A)\right|=C_i(A)-(n-1)l_i(A).$$

对于随机矩阵的特征值定位问题，人们总是力求用尽可能少的计算量得到尽可能精确的特征值包含区域，但现有的结果还远远未达到人们的期望。因此有必要对其继续进行研究。本文利用修正矩阵及双 α-型特征值包含定理得到随机矩阵非 1 特征值的两个新包含集，且由此得到随机矩阵非奇异的两个充分条件。

2. 随机矩阵非 1 特征值包含集

为下文讨论方便，首先给出如下定义、引理、定理：

定义 4 [7]：设 $A=\left[a_{ij}\right]\in\mathbb{C}^{n\times n}$，若存在 $\alpha\in[0,1]$ 使得

$$\left|a_{ii}\right|\left|a_{jj}\right|>\alpha r_i(A)r_j(A)+(1-\alpha)C_i(A)C_j(A),\ \forall i,j\in N,i\neq j,$$

其中

$$r_i(A)=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\quad C_i(A)=\sum_{j\neq i}|a_{ji}|.$$

则称 A 为双α_1-型矩阵。

定理 5 [8]：若 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$ $(n\geq 2)$ 为双α_1-矩阵，则 A 是非奇异的。

定理 6 [8]：(双α-型特征值包含定理) 设 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则

$$\sigma(A)\subseteq \mathrm{T}(A)=\bigcap_{0\leq\alpha\leq 1}\bigcup_{\substack{i,j\in N\\ i\neq j}}\mathrm{T}_{ij}^{\alpha}(A),$$

其中

$$\mathrm{T}_{ij}^{\alpha}(A)=\left\{z\in\mathbb{C}:|z-a_{ii}||z-a_{jj}|\leq\alpha r_i(A)r_j(A)+(1-\alpha)C_i(A)C_j(A)\right\}.$$

引理 7 [3]：设 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为随机矩阵，对任意的 $d=[d_1,d_2,\cdots,d_n]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$，若 $\lambda\in\sigma(A)\setminus\{1\}$，则 λ 是修正矩阵 $B=A-ed^{\mathrm{T}}$ 的特征值。

下面给出随机矩阵非 1 特征值的两个新包含集。

定理 8：设 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为随机矩阵，若 $\lambda\in\sigma(A)\setminus\{1\}$，则

$$\lambda\in \mathrm{T}_1(A)=\bigcap_{0\leq\alpha\leq 1}\bigcup_{\substack{i,j\in N\\ i\neq j}}\overline{\mathrm{T}}_{ij}^{\alpha}(A),$$

其中

$$\overline{\mathrm{T}}_{ij}^{\alpha}(A)=\left\{z\in\mathbb{C}:|a_{ii}-q_i(A)-z||a_{jj}-q_j(A)-z|\leq\alpha rq_i(A)rq_j(A)+(1-\alpha)Cq_i(A)Cq_j(A)\right\},$$

$$q_i(A)=\frac{1}{n-1}\sum_{k\neq i}a_{ki},\quad rq_i(A)=\sum_{k\neq i}|a_{ik}-q_k(A)|,\quad Cq_i(A)=\sum_{k\neq i}|a_{ki}-q_i(A)|.$$

证明：令 $B=A-ed^{\mathrm{T}}$，其中 $d=[q_1(A),q_2(A),\cdots,q_n(A)]^{\mathrm{T}}$，则

$$b_{ij}=a_{ij}-q_j(A),\quad \forall i,j\in N.$$

设 $\lambda\in\sigma(A)\setminus\{1\}$，由引理 7 知 $\lambda\in\sigma(B)$，再由定理 6 得

$$\lambda\in\bigcap_{0\leq\alpha\leq 1}\bigcup_{\substack{i,j\in N\\ i\neq j}}\mathrm{T}_{ij}^{\alpha}(B),$$

其中

$$\mathrm{T}_{ij}^{\alpha}(B)=\left\{z\in\mathbb{C}:|z-b_{ii}||z-b_{jj}|\leq\alpha r_i(B)r_j(B)+(1-\alpha)C_i(B)C_j(B)\right\}.$$

又由于

$$r_i(B)=\sum_{j\neq i}|b_{ij}|=\sum_{j\neq i}|a_{ij}-q_j(A)|=rq_i(A),$$

$$C_i(B)=\sum_{j\neq i}|b_{ji}|=\sum_{j\neq i}|a_{ji}-q_i(A)|=Cq_i(A).$$

故

$$\mathrm{T}_{ij}^{\alpha}(B)=\left\{z\in\mathbb{C}:|a_{ii}-q_i(A)-z||a_{jj}-q_j(A)-z|\leq\alpha rq_i(A)rq_j(A)+(1-\alpha)Cq_i(A)Cq_j(A)\right\}=\overline{\mathrm{T}}_{ij}^{\alpha}(A).$$

故结论成立。

定理 9：设 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为随机矩阵，若 $\lambda\in\sigma(A)\setminus\{1\}$，则

$$\lambda \in \mathrm{T}_2(A) = \bigcap_{0\le\alpha\le 1} \bigcup_{\substack{i,j\in N \\ i\ne j}} \tilde{\mathrm{T}}_{ij}^{\alpha}(A),$$

其中

$$\tilde{\mathrm{T}}_{ij}^{\alpha}(A) = \left\{ z\in\mathbb{C} : |a_{ii}-w(A)-z||a_{jj}-w(A)-z| \le \alpha rw_i(A)\alpha rw_j(A) + (1-\alpha)Cw_i(A)Cw_j(A) \right\},$$

$$w(A) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}}{n},\quad rw_i(A) = \sum_{k\ne i} |a_{ik}-w(A)|,\quad Cw_i(A) = \sum_{k\ne i} |a_{ki}-w(A)|.$$

证明： 令 $\tilde{B} = A - e\tilde{d}^{\mathrm{T}}$，其中 $\tilde{d} = (w(A),\cdots,w(A))^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$，则

$$\tilde{b}_{ij} = a_{ij} - w(A),\ \forall i,j\in N,$$

设 $\lambda\in\sigma(A)\setminus\{1\}$，由引理 7 知 $\lambda\in\sigma(\tilde{B})$，再由定理 6 得

$$\lambda \in \bigcap_{0\le\alpha\le 1} \bigcup_{\substack{i,j\in N \\ i\ne j}} \mathrm{T}_{ij}^{\alpha}(\tilde{B}),$$

其中

$$\mathrm{T}_{ij}^{\alpha}(\tilde{B}) = \left\{ z\in\mathbb{C} : |z-\tilde{b}_{ii}||z-\tilde{b}_{jj}| \le \alpha r_i(\tilde{B}) r_j(\tilde{B}) + (1-\alpha) C_i(\tilde{B}) C_j(\tilde{B}) \right\},$$

又由于

$$r_i(\tilde{B}) = \sum_{j\ne i} |a_{ij}-w(A)| = rw_i(A),$$

$$C_i(\tilde{B}) = \sum_{j\ne i} |a_{ji}-w(A)| = Cw_i(A).$$

故

$$\mathrm{T}_{ij}^{\alpha}(\tilde{B}) = \left\{ z\in\mathbb{C} : |a_{ii}-w(A)-z||a_{jj}-w(A)-z| \le \alpha rw_i(A)\alpha rw_j(A) + (1-\alpha)Cw_i(A)Cw_j(A) \right\} = \tilde{\mathrm{T}}_{ij}^{\alpha}(A).$$

故结论成立。

3. 随机矩阵非奇异的两个新充分条件

本节利用定理 8 和定理 9 给出随机矩阵非奇异的两个新的充分条件。

定理 10： 设 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为随机矩阵，若存在 $\alpha\in[0,1]$ 使

$$|a_{ii}-q_i||a_{jj}-q_j| > \alpha rq_i(A) rq_j(A) + (1-\alpha) Cq_i(A) Cq_j(A),\ \forall i,j\in N, i\ne j,$$

则 A 是非奇异的。

证明： (反证法)假设 A 是奇异的，则 $0\in\sigma(A)$，由定理 8 得 $0\in\mathrm{T}_1(A)$，故对任意的 $\alpha\in[0,1]$，存在 $i_0, j_0\in N, i_0\ne j_0$ 使得

$$0 \in \overline{\mathrm{T}}_{i_0 j_0}^{\alpha}(A),$$

即

$$|a_{i_0 i_0} - q_{i_0}(A)||a_{j_0 j_0} - q_{j_0}(A)| \le \alpha rq_{i_0}(A) rq_{j_0}(A) + (1-\alpha) Cq_{i_0}(A) Cq_{j_0}(A).$$

这与条件矛盾，故 A 是非奇异的。

Table 1. The comparisons of $\mathrm{T}_1(A)$ and $\mathrm{T}_2(A)$

表 1. $\mathrm{T}_1(A)$ 与 $\mathrm{T}_2(A)$ 比较表

$\mathrm{T}_1(A)$ 与 $\mathrm{T}_2(A)$ 包含关系	$\mathrm{T}_1(A)\subseteq\mathrm{T}_2(A)$	$\mathrm{T}_2(A)\subseteq\mathrm{T}_1(A)$	$\mathrm{T}_2(A)\not\subset\mathrm{T}_1(A)$ $\mathrm{T}_1(A)\not\subset\mathrm{T}_2(A)$
矩阵个数	46	0	4

Table 2. The comparisons of $\mathrm{T}_1(A)$ and $\mathrm{B}^{stol}(A)$

表 2. $\mathrm{T}_1(A)$ 与 $\mathrm{B}^{stol}(A)$ 比较表

$\mathrm{T}_1(A)$ 与 $\mathrm{B}^{stol}(A)$ 包含关系	$\mathrm{T}_1(A)\subseteq\mathrm{B}^{stol}(A)$	$\mathrm{B}^{stol}(A)\subseteq\mathrm{T}_1(A)$	$\mathrm{T}_1(A)\not\subset\mathrm{B}^{stol}(A)$ $\mathrm{B}^{stol}(A)\not\subset\mathrm{T}_1(A)$
矩阵个数	50	0	0

定理 11： 设 $A=\left[a_{ij}\right]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为随机矩阵，若存在 $\alpha\in[0,1]$，使得

$$\left|a_{ii}-w(A)\right|\left|a_{jj}-w(A)\right|\le\alpha rw_i(A)rw_j(A)+(1-\alpha)Cw_i(A)Cw_j(A),\forall i,j\in N,i\ne j,$$

则 A 是非奇异的。

证明： (反证法)假设 A 是奇异的，则 $0\in\sigma(A)$，由定理 9 得 $0\in\mathrm{T}_2(A)$，故对任意的 $\alpha\in[0,1]$，存在 $i_0,j_0\in N,i_0\ne j_0$ 使得

$$0\in\tilde{\mathrm{T}}_{i_0j_0}^{\alpha}(A).$$

即

$$\left|a_{i_0i_0}-w(A)\right|\left|a_{j_0j_0}-w(A)\right|\le\alpha rq_{i_0}(A)rq_{j_0}(A)+(1-\alpha)Cq_{i_0}(A)Cq_{j_0}(A).$$

这与条件矛盾，故 A 是非奇异的。

4. 数值算例

本节应用数值算例对本文所得结果与[6]中结果进行比较，下例中统一取 $\alpha=0.5$。

首先比较定理 7 和定理 8。

例 1： 利用 MATLAB 代码

$$k=10;\ A=rand(k,k);\ A=inv\left(diag\left(sum(A')\right)\right)*A,$$

生成 50 个随机矩阵，并对 $\mathrm{T}_1(A)$ 和 $\mathrm{T}_2(A)$ 作图，得到两者的包含关系(见表 1)，表 1 表明绝大部分情况下定理 8 比定理 9 得到的特征值包含集更精确。

下面比较定理 8 所给的特征值包含集 $\mathrm{T}_1(A)$ 与[6]中 $\mathrm{B}^{stol}(A)$ 的包含关系。

例 2： 利用 MATLAB 代码

$$k=10;\ A=rand(k,k);\ A=inv\left(diag\left(sum(A')\right)\right)*A,$$

产生 50 个随机矩阵，并对 $\mathrm{T}_1(A)$ 和 $\mathrm{B}^{stol}(A)$ 作图，得到两者的包含关系(见表 2)，表 2 表明定理 8 比[6]中所给的特征值包含集更精确。

参考文献 (References)

[1] Karlin, S. and Mcgregor, J. (1959) A Characterization of Birth and Death Processes. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **45**, 375-379. https://doi.org/10.1073/pnas.45.3.375

[2] Pena, J.M. (1999) Shape Preserving Representations in Computer Aided-Geometric Design. Nova Science Publishers, Hauppage, NY.

[3] Cvetković, L.J., Kostić, V. and Peña, J.M. (2011) Eigenvalue Localization Refinements for Matrices Related to Positivity. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **32**, 771-784. https://doi.org/10.1137/100807077

[4] Varga, R.S. (2004) Gersgorin and His Circles. Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17798-9

[5] Shen, S.Q., Yu, J. and Huang, T.Z. (2014) Some Classes of Nonsingular Matrices with Applications to Localize the Real Eigenvalues of Real Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **44**, 74-87.

[6] Li, C.Q., Liu, Q.B. and Li, Y.T. (2015) Geršgorin-Type and Brauer-Type Eigenvalue Localization Sets of Stochastic Matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, **63**, 2159-2170. https://doi.org/10.1080/03081087.2014.986044

[7] Li, C.Q. and Li, Y.T. (2011) Generalizations of Brauer's Localization Theorem. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, **22**, 1168-1178. https://doi.org/10.13001/1081-3810.1500

[8] Cvetkovic, L. (2006) *H*-Matrix Theory vs. Eigenvalue Localization. *Numerical Algorithms*, **42**, 229-245. https://doi.org/10.1007/s11075-006-9029-3