Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2017, 6(3), 338-347
Published Online May 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.63039

Subdirect Sums of *MB*-Matrices

Yi Luo, Yaotang Li*

School of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming Yunnan
Email: 649097377@qq.com, *liyaotang@ynu.edu.cn

Received: May 6th, 2017; accepted: May 21st, 2017; published: May 27th, 2017

Abstract

Several sufficient conditions ensuring that the subdirect sum of *MB*-matrices is in the class of *MB*-matrices are given by using the matrix splitting. And the conclusion is illustrated by a numerical example.

Keywords

***MB*-Matrix, Subdirect Sum, *Z*-Matrix, *M*-Matrix, Matrix Splitting**

MB-矩阵的子直和

骆　毅，李耀堂*

云南大学数学与统计学院，云南　昆明
Email: 649097377@qq.com, *liyaotang@ynu.edu.cn

收稿日期：2017年5月6日；录用日期：2017年5月21日；发布日期：2017年5月27日

摘　要

采用矩阵分裂的方法对*MB*-矩阵的子直和进行了研究，给出了*MB*-矩阵子直和仍为*MB*-矩阵的一些充分条件，最后用数值例子对所给结论进行了验证。

关键词

MB-矩阵，子直和，***Z***-矩阵，***M***-矩阵，矩阵分裂

*通讯作者。

文章引用: 骆毅, 李耀堂. *MB*-矩阵的子直和[J]. 应用数学进展, 2017, 6(3): 338-347.
https://doi.org/10.12677/aam.2017.63039

1. 引言

科学、工程技术和金融管理等领域中的许多数据可以用矩阵的形式表示和存储，因此对这些数据的研究与处理往往可以转化为对矩阵的研究与处理。矩阵子直和的概念正是为适应诸如线性补问题，区域分解法中的重叠子域和有限元法中的总刚度矩阵研究的需求而提出和研究的[1] [2] [3] [4]。在这些研究中，“某特定矩阵类的子直和是否仍属于该类矩阵”成为研究的重要问题之一。文献[5] [6] [7]分别对 *P*-矩阵，Nekrasov 矩阵和 *S*-严格对角占优矩阵的子直和进行了研究。本文将对一类重要的特殊矩阵——*MB*-矩阵的子直和问题进行研究，期望获得 *MB*-矩阵的子直和仍为 *MB*-矩阵的一些充分条件。

2. 预备知识

本节给出一些基本概念、定理与符号，以备后用。

定义 2.1 [8] 设 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$，如果对于所有的$1\le i,j\le n$，$i\ne j$ 都有 $a_{ij}\le 0$，则 A 称为 *Z*-矩阵。如果 A 是 *Z*-矩阵且 $A^{-1}\ge 0$，则称 A 为 *M*-矩阵。

定义 2.2 [5]设 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$，记

$$A^z=\begin{bmatrix} a_{11}-\beta_1^A & a_{12}-\beta_1^A & \cdots & a_{1n}-\beta_1^A \\ a_{21}-\beta_2^A & a_{22}-\beta_2^A & \cdots & a_{2n}-\beta_2^A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}-\beta_n^A & a_{n2}-\beta_n^A & \cdots & a_{nn}-\beta_n^A \end{bmatrix},\quad A^r=\begin{bmatrix} \beta_1^A & \beta_1^A & \cdots & \beta_1^A \\ \beta_2^A & \beta_2^A & \cdots & \beta_2^A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n^A & \beta_n^A & \cdots & \beta_n^A \end{bmatrix} \tag{1}$$

其中 $\beta_i^A=\max\left\{0,a_{ij}\mid\forall j\ne i\right\}$。显然 $A=A^z+A^r$，A^z 是 *Z*-矩阵，A^r 是秩 1 非负矩阵。若 A^z 为 *M*-矩阵，则称 A 为 *MB*-矩阵。

定义 2.3 [1]设 $A\in R^{n_1\times n_1},B\in R^{n_2\times n_2}$，$k$ 是整数且$1\le k\le\min\left\{n_1,n_2\right\}$，$n=n_1+n_2-k$，$A,B$ 分块如下：

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

其中 A_{22}，B_{11} 是 k 阶方阵。定义矩阵

$$M=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22}+B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

为 A 和 B 的 n $\left(n=n_1+n_2-k\right)$ 阶 k-子直和，记为 $M=A\oplus_k B$。

设 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n_1\times n_1}$，$B=\left[b_{ij}\right]\in R^{n_2\times n_2}$ 和 $A\oplus_k B=M=\left[m_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ 按定义 2.2 中的(1)式分别分裂为:

$$A=A^z+A^r=\left[a_{ij}\right]=\left[a_{ij}-\beta_i^A\right]+\left[\beta_i^A\right],$$

$$B=B^z+B^r=\left[b_{i-p,j-p}\right]=\left[b_{i-p,j-p}-\beta_{i-p}^B\right]+\left[\beta_{i-p}^B\right],\quad p=n_1-k,$$

$$M=\left[m_{ij}\right]=A\oplus_k B=M^z+M^r=\left[m_{ij}^z\right]+\left[\beta_i^M\right].$$

记 $N=\{1,2,\cdots,n\}$， $N=S_1\cup S_2\cup S_3$， 其中 $S_1=\{1,2,\cdots,n_1-k\}$， $S_2=\{n_1-k+1,\cdots,n_1\}$， $S_3=\{n_1+1,\cdots,n\}$。于是有由定义 2.3 知

$$m_{ij}^z=\begin{cases}a_{ij}-\beta_i^A & i\in S_1, j\in S_1\cup S_2,\\ -\beta_i^A & i\in S_1, j\in S_3,\\ a_{ij}-\beta_i^A-\beta_{i-p}^B+t_i & i\in S_2, j\in S_1,\\ a_{ij}-\beta_i^A+b_{i-p,j-p}-\beta_{i-p}^B+t_i & i\in S_2, j\in S_2,\\ b_{i-p,j-p}-\beta_{i-p}^B-\beta_i^A+t_i & i\in S_2, j\in S_3,\\ -\beta_{i-p}^B & i\in S_3, j\in S_1,\\ b_{i-p,j-p}-\beta_{i-p}^B & i\in S_3, j\in S_2\cup S_3,\end{cases}\quad ,\ p=n_1-k. \tag{4}$$

其中

$$\beta_i^A=\max\{0,a_{ij}\mid\forall j\neq i\},\ \ \beta_{i-p}^B=\max\{0,b_{i-p,j-p}\mid\forall j\neq i\},\ \ p=n_1-k;$$

$$t_i=\beta_i^A+\beta_{i-p}^B-\max\{0,a_{i1},\cdots,a_{i,p},a_{i,p+1}+b_{i-p,1},\cdots,a_{i,n_1}+b_{ik},b_{i,k+1},\cdots,b_{i-p,j-p}\mid\forall j\neq i,i\in S_2\}.$$

显然 β_i^A， β_{i-p}^B 和 t_i 都是非负的。

设 $\bar{M}=\left[\bar{m}_{ij}\right]\in R^{n\times n}$，其中

$$\bar{m}_{ij}=\begin{cases}a_{ij}-\beta_i^A & i\in S_1, j\in S_1\cup S_2,\\ -\beta_i^A & i\in S_1, j\in S_3,\\ a_{ij}-\beta_i^A-\beta_{i-p}^B & i\in S_2, j\in S_1,\\ a_{ij}-\beta_i^A+b_{i-p,j-p}-\beta_{i-p}^B & i\in S_2, j\in S_2,\\ b_{i-p,j-p}-\beta_{i-p}^B-\beta_i^A & i\in S_2, j\in S_3,\\ -\beta_{i-p}^B & i\in S_3, j\in S_1,\\ b_{i-p,j-p}-\beta_{i-p}^B & i\in S_3, j\in S_2\cup S_3,\end{cases}\quad ,\ p=n_1-k. \tag{5}$$

定义 2.4 [9]设 $A=\left[a_{ij}\right]\in C^{n\times n}$。对任意的 $i\in N$， 记

$$r_i(A)=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\left|a_{ij}\right|,\ \ c_i(A)=\sum_{i=1,i\neq j}^{n}a_{ji}.$$

若

$$\left|a_{ii}\right|\geq r_i(A)(i\in N),\ \left(\left|a_{ii}\right|>r_i(A)(i\in N)\right),$$

则称 A 为(按行)对角(严格对角)占优矩阵；若

$$\left|a_{ii}\right|\geq c_i(A)(i\in N),\ \left(\left|a_{ii}\right|>c_i(A)(i\in N)\right),$$

则称 A 为(按列)对角(严格对角)占优矩阵。

定义 2.5 [10] 设 $A=\left[a_{ij}\right]\in C^{n\times n}$，若 A 满足

$$\left|a_{ii}\right|\left|a_{jj}\right|>r_i(A)r_j(A),\forall i,j\in N,i\neq j,$$

则称 A 为严格双对角占优。

定义 2.6 [9]设 $A=\left[a_{ij}\right]\in C^{n\times n}$，若存在正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$， 使

$$\left|a_{ii}\right|x_i > \sum_{j=1,j\neq i}^{n}\left|a_{ij}\right|x_j\,,\ \ i\in N$$

成立，则称 A 为广义严格对角占优矩阵。

定义 2.7 [9]设 $A=\left[a_{ij}\right]\in C^{n\times n}$ 满足

1) 对角占优，即 $\left|a_{ii}\right|\geq r_i\left(A\right)$， $\forall i\in N$；

2) $N_3=\left\{i\in N\left|\left|a_{ii}\right|>r_i\left(A\right)\right.\right\}$ 非空；

3) 对每一个 $i\notin N_3$，存在非零元素序列 $a_{ii_1},a_{i_1i_2},\cdots,a_{i_rk}$ 使得 $k\in N_3$ (称之为连接 i 和 k 的非零元素链)。

则称 A 为具有非零元素链的对角占优矩阵。

定理 2.1 [9] 若 $A=\left[a_{ij}\right]\in C^{n\times n}$ 为具有非零元素链的对角占优矩阵，则 A 为广义严格对角占优矩阵。

定义 2.8 [9] 设 $A=\left[a_{ij}\right]\in C^{n\times n}$ 满足

1) $\left|a_{ii}\right|\geq r_i\left(A\right),\forall i\in N$；

2) $\left|a_{ii}\right|>\sum_{j<i}\left|a_{ij}\right|,\forall i\in N$。

则称 A 为下半强对角占优矩阵。如果存在置换矩阵 P 使得矩阵 $P^{\mathrm{T}}AP$ 为下半强对角占优矩阵，则称 A 为半强对角占优矩阵。

定理 2.2 [9] $A=\left[a_{ij}\right]\in C^{n\times n}$ 为半强对角占优矩阵的充分必要条件是 A 为具有非零元素链的对角占优矩阵。

推论 2.1 [9] 设 A 为非奇异 M-矩阵， B 为 Z-矩阵且 $B\geq A$，则 B 为非奇异 M-矩阵。

定义 2.9 [9] 若 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ 为主对角元为正的 Z-矩阵，则称 A 为 L-矩阵。

定理 2.3 [9] 设 $A=\left[a_{ij}\right]\in C^{n\times n}$ 为 L-矩阵且为广义的严格对角占优矩阵，则 A 为非奇异 M-矩阵。

定理 2.4 [5] 设 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$，若 A 为主对角线元为正的严格双对角占优矩阵，则 A 为非奇异 M-矩阵。

定理 2.5 [9] 设矩阵 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ 满足

$$a_{ii}>0\,,\ \ a_{ij}\leq 0\,,\ \ i\neq j\,,$$

并且 $B=A+A^{\mathrm{T}}$ (其中 A^{T} 为 A 的转置矩阵)为严格对角占优，则 A 为非奇异 M-矩阵。

定理 2.6 [11] 设 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$，则 A 为非奇异 M-矩阵的充要条件是 A 为 Z-矩阵且 A 的每一个实特征值为正数。

定理 2.7 [11] 设 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$， $\sigma\left(A\right)$为 A 的谱，则

$$\sigma\left(A\right)\subseteq Q\left(A\right)=\bigcap_{0\leq\alpha\leq 1}\bigcup_{i=1}^{n}G_i^{\alpha}\left(A\right),$$

其中 $G_i^{\alpha}\left(A\right)=\left\{\lambda\in R:\left|\lambda-a_{ii}\right|\leq\left(r_i\left(A\right)\right)^{\alpha}\left(r_i\left(A^T\right)\right)^{1-\alpha}\right\},i\in N$。

3. *MB*-矩阵的 *k*-子直和

首先我们看一个例子。

例 3.1 设矩阵 A 及其按定义 2.2 的分裂为

$$A=\begin{bmatrix}4 & -1 & -1\\ -1 & 4 & 1\\ 1 & -10 & 4\end{bmatrix}=A^Z+A^r=\begin{bmatrix}4 & -1 & -1\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & -11 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

容易验证上述矩阵为 MB-矩阵，由定义 2.3 得 A 与 A 的 2-子直和 $M=A\oplus_2 A$ 为：

$$A\oplus_2 A=M=\begin{bmatrix}4 & -1 & -1 & 0\\ -1 & 8 & 0 & -1\\ -1 & -11 & 8 & 1\\ 0 & 1 & -10 & 4\end{bmatrix}=M^z+M^r=\begin{bmatrix}4 & -1 & -1 & 0\\ -1 & 8 & 0 & -1\\ 0 & -12 & 7 & 0\\ -1 & 0 & -11 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

计算得

$$\left(M^z\right)^{-1}=\begin{bmatrix}0.2195 & -0.0915 & 0.0793 & -0.0305\\ 0.1707 & 0.5122 & -0.2439 & 0.1707\\ -0.2927 & -0.8780 & 0.5610 & -0.2927\\ 1.1463 & 3.1890 & -2.0305 & 1.3963\end{bmatrix}.$$

故 M^z 不是 M-矩阵.由定义 2.1 及定义 2.2 知 $M=A\oplus_2 A$ 不是 MB-矩阵。

例 3.1 表明 MB-矩阵的子直和不一定是 MB-矩阵。下面我们讨论 MB-矩阵的子直和仍为 MB-矩阵的条件。为此，我们先给出如下引理。

引理 3.1 设 $A\in R^{n_1\times n_1}, B\in R^{n_2\times n_2}$ 为 MB-矩阵，且满足

$$a_{ii}>\beta_i^A,\ i\in S_1\cup S_2;\ b_{i-p,i-p}>\beta_{i-p}^B,\ i\in S_2\cup S_3,\ p=n_1-k,$$

则 $\bar{M}$ 为 L-矩阵。

证明： 因为 $a_{ii}>\beta_i^A$，$b_{i-p,i-p}>\beta_{i-p}^B$，即 $a_{ii}-\beta_i^A>0$，$b_{i-p,i-p}-\beta_{i-p}^B>0$。由定义 2.1 知 A^z,B^z 的主对角元为正，再由(5)式和定义 2.9 知 $\bar{M}$ 为 L-矩阵。

定理 3.1 设 $A\in R^{n_1\times n_1}, B\in R^{n_2\times n_2}$ 为 MB-矩阵，若

1) $i\in S_1\cup S_2$，$a_{ii}>\beta_i^A$；$i\in S_2\cup S_3$，$p=n_1-k$，$b_{i-p,i-p}>\beta_{i-p}^B$；

2) $i\in S_1$，$a_{ii}-\beta_i^A>r_i\left(A^z\right)+\left(n-n_1\right)\beta_i^A$；

3) $i\in S_2$，$\left(a_{ii}-\beta_i^A\right)+\left(b_{i-p,i-p}-\beta_{i-p}^B\right)>r_i\left(A^z\right)+\left(n-n_1\right)\beta_i^A+r_{i-p}\left(B^z\right)+\left(n_1-k\right)\beta_{i-p}^B$；

4) $i\in S_3$，$b_{i-p,i-p}-\beta_{i-p}^B>r_{i-p}\left(B^z\right)+\left(n_1-k\right)\beta_{i-p}^B$。

则 A,B 的 k-子直和 $M=A\oplus_k B$ 为 MB-矩阵。

证明： 由条件(1)和引理 3.1 知 $\bar{M}$ 为 L-矩阵，由条件(2)-(4)知 $\bar{M}$ 为严格对角占优矩阵，再由定理 2.3 得 $\bar{M}$ 为 M-矩阵。由(4)和(5)式知 $M^z\geq\bar{M}$ 且 M^z 为 Z-矩阵，再由推论 2.1 知 M^z 为 M-矩阵。从而由定义 2.2 得 $M=A\oplus_k B$ 为 MB-矩阵。

引理 3.2 设 $A=\left(a_{ij}\right)\in R^{n\times n}\left(n\geq 2\right)$，若

1) $a_{kk}>\beta_k^A,\forall k\in N$，

2) $\left(a_{ii}-\beta_i^A\right)\left(a_{jj}-\beta_j^A\right)>\sum_{i\neq k}\left(\beta_i^A-a_{ik}\right)\sum_{j\neq k}\left(\beta_j^A-a_{jk}\right),\forall i,j\in N;i\neq j$。

则 A 为 MB-矩阵。

证明： 由条件(1)知矩阵 A^z 是主对角线元为正的 Z-阵，由条件(2)知矩阵 A^z 为严格双对角占优矩阵.于是由定理 2.4 知 A^z 为 M-矩阵，再由定义 2.2 知 A 为 MB-矩阵。

定理 3.2 设 $A\in R^{n_1\times n_1}, B\in R^{n_2\times n_2}$ 为 MB-矩阵，满足引理 3.1 的条件且 $\bar{M}$ 为严格双对角占优矩阵，则

A,B 的 k-子直和 $M=A\oplus_k B$ 为 MB-矩阵。

证明： 由引理 3.1 知矩阵 $\bar{M}$ 是主对角线元为正的 Z-阵，由 $\bar{M}$ 为严格双对角占优矩阵知

$$\begin{aligned}\overline{m_{ii}}\,\overline{m_{jj}}&=\left(a_{ii}-\beta_i^A\right)\left(a_{jj}-\beta_j^A\right)\\&>\left[r_i\left(A^z\right)+\left(n-n_1\right)\beta_i^A\right]\left[r_j\left(A^z\right)+\left(n-n_1\right)\beta_j^A\right]\\&=r_i\left(\bar{M}\right)r_j\left(\bar{M}\right),\ \forall i,j\in S_1,i\neq j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{m_{ii}}\,\overline{m_{jj}}&=\left(a_{ii}-\beta_i^A\right)\left[\left(a_{jj}-\beta_j^A\right)+\left(b_{j-p,j-p}-\beta_{j-p}^B\right)\right]\\&>\left[r_i\left(A^z\right)+\left(n-n_1\right)\beta_i^A\right]\left[r_j\left(A^z\right)+r_{j-p}\left(B^z\right)+\left(n_1-k\right)\beta_{j-p}^B+\left(n-n_1\right)\beta_j^A\right]\\&=r_i\left(\bar{M}\right)r_j\left(\bar{M}\right),\ \forall i\in S_1,\ j\in S_2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{m_{ii}}\,\overline{m_{jj}}&=\left(a_{ii}-\beta_i^A\right)\left(b_{j-p,j-p}-\beta_{j-p}^B\right)\\&>\left[r_i\left(A^z\right)+\left(n-n_1\right)\beta_i^A\right]\left[r_{j-p}\left(B^z\right)+\left(n_1-k\right)\beta_{j-p}^B\right]\\&=r_i\left(\bar{M}\right)r_j\left(\bar{M}\right),\ \forall i\in S_1,\ j\in S_3.\end{aligned}$$

再由(4)式和(5)式知 M^z 与 $\bar{M}$ 的元素在 $i,j\in S_1\cup S_3$ 部分的元素是相同的，则当 $i\in S_1, j\in S_1\cup S_3$ 时 M^z 也满足

$$\begin{aligned}m_{ii}^z m_{jj}^z&=\overline{m_{ii}}\,\overline{m_{jj}}\\&=\left(a_{ii}-\beta_i^A\right)\left(a_{jj}-\beta_j^A\right)\\&>\left[r_i\left(A^z\right)+\left(n-n_1\right)\beta_i^A\right]\left[r_j\left(A^z\right)+\left(n-n_1\right)\beta_j^A\right]\\&=r_i\left(\bar{M}\right)r_j\left(\bar{M}\right)\\&=r_i\left(M^z\right)r_j\left(M^z\right),\ \forall i,j\in S_1,\ i\neq j,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m_{ii}^z m_{jj}^z&=\overline{m_{ii}}\,\overline{m_{jj}}\\&=\left(a_{ii}-\beta_i^A\right)\left(b_{j-p,j-p}-\beta_{j-p}^B\right)\\&>\left[r_i\left(A^z\right)+\left(n-n_1\right)\beta_i^A\right]\left[r_{j-p}\left(B^z\right)+\left(n_1-k\right)\beta_{j-p}^B\right]\\&=r_i\left(\bar{M}\right)r_j\left(\bar{M}\right)\\&=r_i\left(M^z\right)r_j\left(M^z\right),\ \forall i\in S_1,\ j\in S_3.\end{aligned}$$

下面证明当 $i\in S_1, j\in S_2$ 时，有 $m_{ii}^z m_{jj}^z>r_i\left(M^z\right)r_j\left(M^z\right)$ 成立.由于当 $i\in S_1, j\in S_2$ 时

$$m_{ii}^z=\overline{m_{ii}}=a_{ii}-\beta_i^A>0,$$

$$m_{jj}^z=\left(a_{jj}-\beta_j^A\right)+\left(b_{j-p,j-p}-\beta_{j-p}^B\right)+t_j\geq\overline{m_{jj}}=\left(a_{jj}-\beta_j^A\right)+\left(b_{j-p,j-p}-\beta_{j-p}^B\right)>0,$$

$$r_i\left(M^z\right)=r_i\left(\bar{M}\right)=r_i\left(A^z\right)+\left(n-n_1\right)\beta_i^A,$$

$$\begin{aligned}r_j\left(M^z\right)&=r_j\left(A^z\right)+r_{j-p}\left(B^z\right)+\left(n_1-k\right)\beta_{j-p}^B+\left(n-n_1\right)\beta_j^A-nt_j\\&\leq r_j\left(\bar{M}\right)=r_j\left(A^z\right)+r_{j-p}\left(B^z\right)+\left(n_1-k\right)\beta_{j-p}^B+\left(n-n_1\right)\beta_j^A\end{aligned}$$

其中 $t_j\geq 0$，故

$$m_{ii}^{z}m_{jj}^{z}\ge\overline{m_{ii}m_{jj}}，\ r_i\left(M^z\right)r_j\left(M^z\right)\le r_i\left(\bar{M}\right)r_j\left(\bar{M}\right),$$

即

$$m_{ii}^{z}m_{jj}^{z}\ge\overline{m_{ii}m_{jj}}\ge r_i\left(\bar{M}\right)r_j\left(\bar{M}\right)\ge r_i\left(M^z\right)r_j\left(M^z\right)$$

从而可以得出

$$m_{ii}^{z}m_{jj}^{z}>r_i\left(M^z\right)r_j\left(M^z\right).$$

类似可得 $i\in S_2, j\in N$，及 $i\in S_3, j\in N,\left(N=S_1\cup S_2\cup S_3\right)$ 的情况同样成立.综上可得 M^z 为主对角元为正的严格双对角占优矩阵，于是由定理 2.4 知 M^z 为 M-矩阵，再由定义 2.2 知 A 为 MB-矩阵。

定理 3.3 设 $A\in R^{n_1\times n_1}, B\in R^{n_2\times n_2}$ 为 MB-矩阵，若

1) $i\in S_1\cup S_2$，$a_{ii}>\beta_i^A$；$i\in S_2\cup S_3$，$p=n_1-k$，$b_{i-p,i-p}>\beta_{i-p}^B$；

2) $i\in S_1$，$a_{ii}-\beta_i^A>\frac{1}{2}\left\{\left[r_i\left(A^z\right)+\left(n-n_1\right)\beta_i^A\right]+\left[c_i\left(A^z\right)+\sum\limits_{j=n_1-k+1}^{n}\beta_{j-p}^B\right]\right\}$；

3) $i\in S_2$，$\left(a_{ii}-\beta_i^A\right)+\left(b_{i-p,i-p}-\beta_{i-p}^B\right)>\frac{1}{2}\left\{\left[r_i\left(A^z\right)+r_{i-p}\left(B^z\right)+\left(n_1-k\right)\beta_{i-p}^B+\left(n-n_1\right)\beta_i^A\right]+\left[c_i\left(A^z\right)+c_{i-p}\left(B^z\right)\right]\right\}$；

4) $i\in S_3$，$b_{i-p,i-p}-\beta_{i-p}^B>\frac{1}{2}\left\{\left[r_{i-p}\left(B^z\right)+\left(n_1-k\right)\beta_{i-p}^B\right]+\left[c_{i-p}\left(B^z\right)+\sum\limits_{j=1}^{n_1}\beta_j^A\right]\right\}$；

则 A,B 的 k-子直和 $M=A\oplus_k B$ 为 MB-矩阵。

证明：由条件(1-4)及定义 2.5 知 $\bar{M}+\left(\bar{M}\right)^{\mathrm{T}}$ 为严格对角占优矩阵，由引理 3.1 及定理 2.5 知 $\bar{M}$ 为 M-矩阵。再由(4)和(5)式知 $M^z\ge\bar{M}$ 且 M^z 为 Z-矩阵。于是由推论 2.1 知 M^z 为 M-矩阵。从而由定义 2.2 得 $M=A\oplus_k B$ 为 MB-矩阵。

定理 3.4 设 $A\in R^{n_1\times n_1}, B\in R^{n_2\times n_2}$ 为 MB-矩阵，若

1) $i\in S_1\cup S_2$，$a_{ii}>\beta_i^A$；$i\in S_2\cup S_3$，$p=n_1-k$，$b_{i-p,i-p}>\beta_{i-p}^B$；

2) $i\in S_1$，$a_{ii}-\beta_i^A>\left[r_i\left(A^z\right)+\left(n-n_1\right)\beta_i^A\right]^{\frac{1}{2}}\left[c_i\left(A^z\right)+\sum\limits_{j=n_1-k+1}^{n}\beta_{j-p}^B\right]^{\frac{1}{2}}$；

3) $i\in S_2$，$\left(a_{ii}-\beta_i^A\right)+\left(b_{i-p,i-p}-\beta_{i-p}^B\right)>\left[r_i\left(A^z\right)+r_{i-p}\left(B^z\right)+\left(n_1-k\right)\beta_{i-p}^B+\left(n-n_1\right)\beta_i^A\right]^{\frac{1}{2}}\left[c_i\left(A^z\right)+c_{i-p}\left(B^z\right)\right]^{\frac{1}{2}}$；

4) $i\in S_3$，$b_{i-p,i-p}-\beta_{i-p}^B>\left[r_{i-p}\left(B^z\right)+\left(n_1-k\right)\beta_{i-p}^B\right]^{\frac{1}{2}}\left[c_{i-p}\left(B^z\right)+\sum\limits_{j=1}^{n_1}\beta_j^A\right]^{\frac{1}{2}}$。

则 A,B 的 k-子直和 $M=A\oplus_k B$ 为 MB-矩阵。

证明：由条件(1)知 $\bar{M}$ 为 L-矩阵，故 $\bar{M}$ 的主对角元 m_{ii} 为正。设 λ 为 $\bar{M}$ 的实特征值，由定理 2.7 知，存在 $i\in N$，使得

$$\left|\lambda-m_{ii}\right|\le\left(r_i\left(\bar{M}\right)\right)^{1/2}\left(r_i\left(\bar{M}^{\mathrm{T}}\right)\right)^{1/2},$$

即

$$m_{ii}-\left(r_i\left(\bar{M}\right)\right)^{1/2}\left(r_i\left(\bar{M}^{\mathrm{T}}\right)\right)^{1/2}\le\lambda\le m_{ii}+\left(r_i\left(\bar{M}\right)\right)^{1/2}\left(r_i\left(\bar{M}^{\mathrm{T}}\right)\right)^{1/2}.$$

于是由条件(2)知，当 $i \in S_1$ 时，

$$0 < \left(a_{ii} - \beta_i^A\right) - \left[r_i\left(A^z\right) + \left(n - n_1\right)\beta_i^A\right]^{\frac{1}{2}} \left[c_i\left(A^z\right) + \sum_{j=n_1-k+1}^{n} \beta_{j-p}^B\right]^{\frac{1}{2}} \le \lambda .$$

由条件(3)知，当 $i \in S_2$ 时，

$$0 < \left(a_{ii} - \beta_i^A\right) + \left(b_{i-p,i-p} - \beta_{i-p}^B\right) - \left[r_i\left(A^z\right) + r_{i-p}\left(B^z\right) + \left(n_1 - k\right)\beta_{i-p}^B + \left(n - n_1\right)\beta_i^A\right]^{\frac{1}{2}} \left[c_i\left(A^z\right) + c_{i-p}\left(B^z\right)\right]^{\frac{1}{2}} \le \lambda .$$

由条件(4)知，当 $i \in S_3$ 时，

$$0 < \left(b_{i-p,i-p} - \beta_{i-p}^B\right) - \left[r_{i-p}\left(B^z\right) + \left(n_1 - k\right)\beta_{i-p}^B\right]^{\frac{1}{2}} \left[c_{i-p}\left(B^z\right) + \sum_{j=1}^{n_1} \beta_j^A\right]^{\frac{1}{2}} \le \lambda .$$

综上知 $\bar{M}$ 的实特征值 λ 为正，由定理 2.6 得 $\bar{M}$ 为 M-矩阵。由(4)和(5)式知 $M^z \ge \bar{M}$，又由推论 2.1 得 M^z 为 M-矩阵，再由定义 2.2 得 A, B 的 k-子直和 $M = A \oplus_k B$ 为 MB-矩阵。

定理 3.5 设 $A \in R^{n_1 \times n_1}, B \in R^{n_2 \times n_2}$ 为 MB-矩阵，若

1) $i \in S_1 \cup S_2$，$a_{ii} > \beta_i^A$；$i \in S_2 \cup S_3$，$p = n_1 - k$，$b_{i-p,i-p} > \beta_{i-p}^B$；

2) $i \in S_1 \cup S_2$，$a_{ii} - \beta_i^A \ge r_i\left(A^z\right) + \left(n - n_1\right)\beta_i^A$，$a_{ii} - \beta_i^A > \sum_{j<i} \left|a_{ij} - \beta_i^A\right|$；

3) $i \in S_2 \cup S_3$，$b_{i-p,i-p} - \beta_{i-p}^B \ge r_{i-p}\left(B^z\right) + \left(n_1 - k\right)\beta_{i-p}^B$，

$$b_{i-p,i-p} - \beta_{i-p}^B > \left(n_1 - k\right)\beta_{i-p}^B + \sum_{j-p<i-p} \left|b_{i-p,j-p} - \beta_{i-p}^B\right| \ge \sum_{j-p<i-p} \left|b_{i-p,j-p} - \beta_{i-p}^B\right| ;$$

则 $M = A \oplus_k B$ 为 MB-矩阵。

证明： 由 A, B 满足条件(1-3)及 A^z, B^z 与 $\bar{M}$ 间元素的关系可得 $\bar{M}$ 满足：

当 $i \in S_1$ 时，

$$\overline{m_{ii}} = a_{ii} - \beta_i^A \ge r_i\left(A^z\right) + \left(n - n_1\right)\beta_i^A，\ a_{ii} - \beta_i^A > \sum_{j<i} \left|a_{ij} - \beta_i^A\right| ;$$

当 $i \in S_2$ 时，

$$\overline{m_{ii}} = \left(a_{ii} - \beta_i^A\right) + \left(b_{i-p,i-p} - \beta_{i-p}^B\right) \ge r_i\left(A^z\right) + r_{i-p}\left(B^z\right) + \left(n_1 - k\right)\beta_{i-p}^B + \left(n - n_1\right)\beta_i^A ,$$

$$\overline{m_{ii}} = \left(a_{ii} - \beta_i^A\right) + \left(b_{i-p,i-p} - \beta_{i-p}^B\right) > \sum_{j<i} \left|a_{ij} - \beta_i^A\right| + \sum_{j-p<i-p} \left|b_{i-p,j-p} - \beta_{i-p}^B\right| ;$$

当 $i \in S_3$ 时，

$$\overline{m_{ii}} = b_{i-p,i-p} - \beta_{i-p}^B \ge r_{i-p}\left(B^z\right) + \left(n_1 - k\right)\beta_{i-p}^B ,$$

$$\overline{m_{ii}} = b_{i-p,i-p} - \beta_{i-p}^B > \left(n_1 - k\right)\beta_{i-p}^B + \sum_{j-p<i-p} \left|b_{i-p,j-p} - \beta_{i-p}^B\right| .$$

故 $\bar{M}$ 为下半强对角占优矩阵.由引理 3.1 及推论 3.4 知 $\bar{M}$ 为非奇异 M-矩阵.由(4)和(5)式及推论 2.1 得 M^z 为 M-矩阵，再由定义 2.2 知 $M = A \oplus_k B$ 为 MB-矩阵。

下面我们用例子对所获理论结果进行说明。

例 3.2 设

$$A=\begin{bmatrix}4 & -2 & -2\\ -1 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}5 & -2 & -3\\ -2 & 6 & 1\\ 1 & -1 & 5\end{bmatrix}.$$

容易验证 A,B 均为 MB-矩阵。取 $k=2$，由 $n_1=n_2=3$ 得 $n=4$，$p=1$；$S_1=\{1\}$，$S_2=\{2,3\}$，$S_3=\{4\}$。考虑 A,B 的 2-子直和

$$M=A\oplus_2 B=\begin{bmatrix}4 & -2 & -2 & 0\\ -1 & 9 & -1 & -3\\ 1 & -3 & 10 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 5\end{bmatrix}.$$

计算可得，当 $i\in S_1\cup S_2$ 时

$$a_{11}-\beta_1^A=4>0,\quad a_{22}-\beta_2^A=3>0,\quad a_{33}-\beta_3^A=3>0$$

$$r_1\left(A^z\right)+\left(n-n_1\right)\beta_1^A=4,\quad r_2\left(A^z\right)+\left(n-n_1\right)\beta_2^A=3,\quad r_3\left(A^z\right)+\left(n-n_1\right)\beta_3^A=3$$

$$\sum_{j<2}\left|a_{2j}-\beta_2^A\right|=2,\quad \sum_{j<3}\left|a_{3j}-\beta_3^A\right|=2$$

$$a_{11}>\beta_1^A,\quad a_{22}>\beta_2^A,\quad a_{33}>\beta_3^A$$

$$a_{11}-\beta_1^A=r_1\left(A^z\right)+\left(n-n_1\right)\beta_1^A,$$

$$a_{22}-\beta_2^A=r_2\left(A^z\right)+\left(n-n_1\right)\beta_2^A,$$

$$a_{33}-\beta_3^A=r_3\left(A^z\right)+\left(n-n_1\right)\beta_3^A;$$

$$a_{22}-\beta_2^A>\sum_{j<2}\left|a_{2j}-\beta_2^A\right|,$$

$$a_{33}-\beta_3^A>\sum_{j<3}\left|a_{3j}-\beta_3^A\right|;$$

当 $i\in S_2\cup S_3$ 时

$$b_{11}-\beta_1^B=5>0,\quad b_{22}-\beta_2^B=5>0,\quad b_{33}-\beta_3^B=4>0,$$

$$r_1\left(B^z\right)+\left(n_1-k\right)\beta_1^B=5,\quad r_2\left(B^z\right)+\left(n_1-k\right)\beta_2^B=4,\quad r_3\left(B^z\right)+\left(n_1-k\right)\beta_3^B=3,$$

$$\left(n_1-k\right)\beta_2^B+\sum_{j-p<2}\left|b_{2,j-p}-\beta_2^B\right|=4,\quad \left(n_1-k\right)\beta_3^B+\sum_{j-p<3}\left|b_{3,j-p}-\beta_3^B\right|=3,$$

$$b_{11}>\beta_1^B,\quad b_{22}>\beta_2^B,\quad b_{33}>\beta_3^B,$$

$$b_{11}-\beta_1^B=r_1\left(B^z\right)+\left(n_1-k\right)\beta_1^B,$$

$$b_{22}-\beta_2^B>r_2\left(B^z\right)+\left(n_1-k\right)\beta_2^B,$$

$$b_{33}-\beta_3^B>r_3\left(B^z\right)+\left(n_1-k\right)\beta_3^B;$$

$$b_{22}-\beta_2^B>\left(n_1-k\right)\beta_2^B+\sum_{j-p<2}\left|b_{2,j-p}-\beta_2^B\right|,$$

$$b_{33}-\beta_3^B>\left(n_1-k\right)\beta_3^B+\sum_{j-p<3}\left|b_{3,j-p}-\beta_3^B\right|.$$

故矩阵 A,B 满足定理 3.5 的条件(1)-(3)，于是由定理 3.5 知 A,B 的 2-子直和 M 为 MB-矩阵。

参考文献 (References)

[1] Fallat, S.M. and Johnson, C.R. (1999) Sub-Direct Sum Sand Positivity Classes of Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **288**, 149-173.

[2] Bru, R., Pedroche, F. and Szyld, D.B. (2005) Subdirect Sums of Nonsingular *M*-Matrices and of Their Inverse. *Electronic Journal of Linear Algebra*, **13**, 162-174. https://doi.org/10.13001/1081-3810.1159

[3] Bru, R., Pedroche, F., Szyld, D.B. (2005) Additive Schwarz Iterations for Markov Chains. *The SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **27**, 445-458. https://doi.org/10.1137/040616541

[4] Frommer, A. and Szyld, D.B. (1999) Weighted Max Norms, Splittings, and Overlapping Additive Schwarz Iterations. *Numerische Mathematik*, **83**, 259-278. https://doi.org/10.1007/s002110050449

[5] Li, H.-B., Huang, T.-Z. and Li, H. (2007) On Some Subclasses of *P*-Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **14**, 391-405. https://doi.org/10.1002/nla.524

[6] Li, C.Q., Liu, Q.L., Gao, L. and Li, Y.T. (2016) Subdirect Sums of Nekrasov Matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, **64**, 208-218. https://doi.org/10.1080/03081087.2015.1032198

[7] Bru, R., Pedroche, F. and Szyld, D.B. (2006) Subdirect Sums of *S*-Strictly Diagonally Dominant Matrices. *Electronic Journal of Linear Algebra*, **15**, 201-209. https://doi.org/10.13001/1081-3810.1230

[8] Berman, A. and Plemmons, R.-J. (1994) Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. SIAM Publisher, Philadelphia.

[9] 徐仲, 陆全, 张凯院, 安小红. H-矩阵类的理论及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2013.

[10] 王静. P-矩阵子类的一些推广及应用[J]. 广西科学院学报. 2009, 25(2): 83- 85, 91.

[11] 陈公宁. 矩阵理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.