Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2017, 6(4), 504-507
Published Online July 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.64060

Hans汉斯

On the Maximal Eccentric Distance Sum of Tree

Xiaofei Wu, Xuegang Chen

Department of Mathematics, North China Electric Power University, Beijing
Email: 1731107702@qq.com, gxcxdm@163.com

Received: Jun. 24th, 2017; accepted: Jul. 15th, 2017; published: Jul. 18th, 2017

Abstract

Let G be a connected graph. The eccentric distance sum of graph G is defined as $\xi^{d}(G)=\sum_{v\in V(G)}\varepsilon_{G}(v)D_{G}(v)$, where $\varepsilon_{G}(v)$ is the eccentricity of the vertex v and $D_{G}(v)$ is the sum of all distances from the vertex v. In this paper, we characterize the tree with domination number γ and the maximal eccentric distance sum. Some known results have been extended.

Keywords

Tree, Eccentricity, The Eccentric Distance Sum

树的最大离心距离和

吴晓菲，陈学刚

华北电力大学数理学院，北京
Email: 1731107702@qq.com, gxcxdm@163.com

收稿日期：2017年6月24日；录用日期：2017年7月15日；发布日期：2017年7月18日

摘　要

设图G是一个简单连通图，图G的离心距离和定义为$\xi^{d}(G)=\sum_{v\in V(G)}\varepsilon_{G}(v)D_{G}(v)$，其中$\varepsilon_{G}(v)$表示顶点$v$的离心率，$D_{G}(v)$表示在图$G$中顶点$v$到其它所有顶点的距离和。本文刻画了控制数为$\gamma$且具有最大离心距离和的树的结构。该结论是若干已有成果的推广。

文章引用：吴晓菲，陈学刚．树的最大离心距离和[J]．应用数学进展, 2017, 6(4): 504-507.
https://doi.org/10.12677/aam.2017.64060

关键词

树，离心率，离心距离和

1. 引言

本文所有的图 $G=(V,E)$ 都是简单，有限，无向图。$d_G(u,v)$ 是指图 G 中从顶点 u 到 v 的最短路长度。$D_G(v)=\sum_{u\in V} d_G(u,v)$ 是指在图 G 中顶点 v 到其它所有顶点的距离之和。顶点 v 的离心率 $\varepsilon_G(v)$ 是指顶点 v 到其它所有顶点的最大距离。$d(v)$ 表示图 G 中顶点 v 度数。度为 1 的点被称为叶点。与叶点相邻的顶点称为支撑点。令 $L(G)$ 和 $S(G)$ 分别表示图 G 的叶点和支撑点的集合。若 $uv\in E$ 且 $\min(d(u),d(v))\geq 2$，则称 uv 是 G 的一条非悬挂边。设 $uv\in E(G)$，$G-\{uv\}$ 是指在去掉边 uv 所得到的子图。$G-\{u\}$ 是指删去图 G 中的顶点 u 以及所有和 u 相关联的边而得到的子图。$\lfloor x\rfloor$ 指的是不大于 x 的最大整数，$\lceil x\rceil$ 为不小于 x 的最小整数。

2. 引理

引理 2.1 [1].设 $P=v_0v_1\cdots v_rv_{r+1}\cdots v_{d-1}v_d$ 是树 T 的一条最长路，且它的端点满足 $d_T(v_1)\leq d_T(v_{d-1})$，$r=\min\{i\,|\,d_T(v_i)\geq 3, i=2,3,\cdots,d-2\}$，现构造一个新的树 T'（如图 1)，令

$T'=T-\{v_ru\,|\,u\in N_T(v_r)\backslash\{v_{r-1},v_{r+1}\}\}+\{v_1u\,|\,u\in N_T(v_r)\backslash\{v_{r-1},v_{r+1}\}\}$，则有 $\xi^d(T')>\xi^d(T)$。

树 $P_l(a,b)$ 是通过在路 $P_l=v_1v_2\cdots v_l\ (l\geq 2)$ 的两个顶点 v_1 和 v_l 上分别粘贴上 a 个叶点和 b 个叶点得到的 $l+a+b$ 阶树。

引理 2.2 [1]. $\xi^d(P_l(1,n-l-1))<\xi^d(P_l(2,n-l-2))<\cdots<\xi^d\left(P_l\left(\left\lfloor\frac{n-l}{2}\right\rfloor,\left\lceil\frac{n-l}{2}\right\rceil\right)\right)$。

设 T 是一个 $n(n\geq 3)$ 阶树，$e=uv$ 是 T 的一条非悬挂边，设 $T-e=T_1\cup T_2$ 且 $u\in T_1, v\in T_2$，将 T_1 中顶点 u 与 T_2 中的顶点 v 粘在一起，并在顶点 $u(=v)$ 上粘贴一个叶子，得到一个新树 T'，则称 T' 是对 T 中的边 $e=uv$ 做了一次边替换变换得到的。

设 T 是一个 n 阶树，$e=uv$ 是 T 的一条悬挂边，满足 $d_T(v)=1, d_T(u)\geq 3$，设边 $uw\in E(T)\ (w\neq v)$，令 $T'=T-\{uw\}+\{vw\}$。则称 T' 是 T 对边 uw 的逆边替换变换得到的。

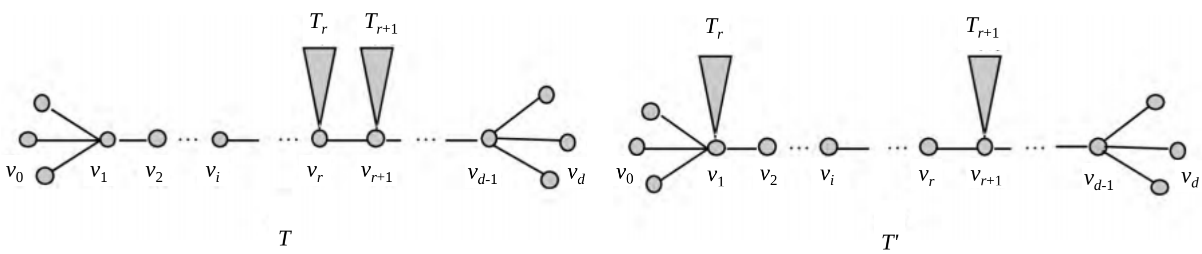

Figure 1. Tree T and T'
图 1. 树 T 和 T'

引理 2.3 [2]. 设 T 是一个 $n(n\ge 3)$ 阶树， $e=uv$ 是一条非悬挂边， T' 是由 T 对边 $e=uv$ 做边替换变换而得到的，那么就有 $\xi^d(T')<\xi^d(T)$。

3. 主要结论

令 $T_{n,\gamma}$ 表示控制数为 γ 的 n 阶树组成的集合。

引理 3.1 [1]. 在 $T_{n,2}(n\ge 4)$ 中，树 $P_4\left(\left\lfloor\frac{n-4}{2}\right\rfloor,\left\lceil\frac{n-4}{2}\right\rceil\right)$ 有最大的离心距离和。

引理 3.2 [3]. 在 $T_{n,3}(n\ge 10)$ 中，树 $P_7\left(\left\lfloor\frac{n-7}{2}\right\rfloor,\left\lceil\frac{n-7}{2}\right\rceil\right)$ 有最大的离心距离和。

引理 3.3 [4]. 在 $T_{n,4}(n\ge 13)$ 中，树 $P_{10}\left(\left\lfloor\frac{n-10}{2}\right\rfloor,\left\lceil\frac{n-10}{2}\right\rceil\right)$ 有最大的离心距离和。

定理 1. 在 $T_{n,\gamma}$ 的 n 阶树中， $P_{3\gamma-2}\left(\left\lfloor\frac{n-(3\gamma-2)}{2}\right\rfloor,\left\lceil\frac{n-(3\gamma-2)}{2}\right\rceil\right)$ 有最大的离心距离和。

证明：当 $\gamma=2$， $\gamma=3$， $\gamma=4$ 时，分别由引理 3.1，引理 3.2 和引理 3.3 知，结论成立。

当 $\gamma\ge 5$ 时，对任意的 n 阶树 T，设树中最长的路为 $P=v_0v_1\cdots v_d$，且设 $d(v_1)\le d(v_{d-1})$。若从顶点 v_2 到顶点 v_{d-2} 中存在度数大于等于 3 的顶点，则令第一个度大于等于 3 的点为 v_r，即

$$r=\min\{i\mid d_T(v_i)\ge 3, i=2,3,\cdots,d-2\}.$$

现构造新的树

$$T'=T-\{v_ru\mid u\in N_T(v_r)\setminus\{v_{r-1},v_{r+1}\}\}+\{v_1u\mid u\in N_T(v_r)\setminus\{v_{r-1},v_{r+1}\}\}$$

则由引理 2.1 得 $\xi^d(T')>\xi^d(T)$。然后再从 T' 中找出最长的路 P'，按照上述方法构造新的树 T''，则由引理 2.1 得 $\xi^d(T'')>\xi^d(T')$。一直进行下去，直到得到新树，满足对任意非叶点和非支撑点均为二度点。不妨设两个支撑点分别与 a,b 个叶点相邻，该新树记为 $P_l(a,b)$，其中 $l+a+b=n$。不妨假设 $a\le b$。若 $b-a>1$，则由引理 2 得，

$$\xi^d(P_l(a,b))<\xi^d(P_l(a+1,b-1))<\cdots<\xi^d\left(P_l\left(\left\lfloor\frac{n-l}{2}\right\rfloor,\left\lceil\frac{n-l}{2}\right\rceil\right)\right)$$

即 $P_l\left(\left\lfloor\frac{n-l}{2}\right\rfloor,\left\lceil\frac{n-l}{2}\right\rceil\right)$ 有最大的离心距离和。

当树 $P_l\left(\left\lfloor\frac{n-l}{2}\right\rfloor,\left\lceil\frac{n-l}{2}\right\rceil\right)$ 的控制数为 γ，易得 $3\gamma-4\le l\le 3\gamma-2$。当 $l=3\gamma-4$ 或 $3\gamma-3$ 时，设顶点 u 是与 v_l 相邻的叶点，对边 $v_{l-1}v_l$ 及点 u 用逆边替换变换得到 T'，则 $T'\in T_{n,\gamma}$。由引理 2.3 得，$\xi^d(T')>\xi^d(T)$。因此 $l=3\gamma-2$。

综上所述，在所有顶点数为 n 且控制数为 γ 的树中， $P_{3\gamma-2}\left(\left\lfloor\frac{n-(3\gamma-2)}{2}\right\rfloor,\left\lceil\frac{n-(3\gamma-2)}{2}\right\rceil\right)$ 的离心距离和最大，即定理 1 成立。

致　谢

本论文是在陈老师的悉心指导下完成的。老师渊博的专业知识，严谨的治学态度和精益求精的工作作风都对我影响深远。不仅使我树立了远大的学术目标、掌握了基本的研究方法，还使我明白了许多待

人接物与人处事的道理。本论文从选题到完成，每一步都是在陈老师的指导下完成，倾注了老师大量的心血。在此，谨向陈老师表示衷心的感谢!

参考文献 (References)

[1] Geng, X.Y., Li, S.C. and Zhang, M. (2013) Extremal Values of the Eccentric Distance Sum of Trees. *Discrete Applied Mathematics*, **161**, 2427-2439. https://doi.org/10.1016/j.dam.2013.05.023

[2] Hua, H.B., Xu, K.X. and Shu, W.N. (2011) A Short and Unified Proof of Yu et al's Two Results on the Eccentric Distance Sum. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **382**, 364-366. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.04.054

[3] Miao, L.Y., Cao, Q.Q. and Cui, N. (2015) On the Extremal Values of the Eccentric Distance Sum of Trees. *Discrete Applied Mathematics*, **186**, 199-206. https://doi.org/10.1016/j.dam.2015.01.042

[4] 朱晓颖, 逄世友. 控制数给定的树的最大离心距离和[J]. 山东大学学报(理学版), 2017, 52(2): 30-36.