Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2017, 6(4), 619-626**
Published Online July 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.64072

Hans汉斯

New Explicit Traveling Wave Solutions of RLW-Burgers Equation

Xin Wang

College of Information Science and Technology, Hainan University, Haikou Hainan
Email: xinwang80@126.com

Received: Jul. 7th, 2017; accepted: Jul. 24th, 2017; published: Jul. 27th, 2017

Abstract

We studied the RLW-Burgers equation by using a class of parametric G expansion method, and obtained many new explicit traveling wave solutions for the various functional forms of the equation. In fact, the parameters of the G expansion method can not only obtain the exact solutions of nonlinear partial differential equations, but also because of the arbitrariness of parameters, we can obtain more explicit traveling wave solutions for nonlinear partial differential equations.

Keywords

RLW-Burgers Equation, Explicit Traveling Wave Solutions, Parameters, G Expansion Method

RLW-Burgers方程的新显式行波解

王　鑫

海南大学信息科学技术学院，海南　海口
Email: xinwang80@126.com

收稿日期：2017年7月7日；录用日期：2017年7月24日；发布日期：2017年7月27日

摘　要

通过运用一类含参数的G展开法对RLW-Burgers方程进行了研究，求得了该方程的多种函数形式的新显式行波解。事实证明，此类含参数的G展开法不仅可以得到非线性偏微分方程的精确解，而且由于所含参数的任意性，可以得到非线性偏微分方程更多类型的显式行波解。

文章引用: 王鑫. RLW-Burgers 方程的新显式行波解[J]. 应用数学进展, 2017, 6(4): 619-626.
https://doi.org/10.12677/aam.2017.64072

关键词

RLW-Burgers方程，显式行波解，参数，*G*展开法

1. 引言

求解非线性偏微分方程，尤其是求得非线性偏微分方程的精确解是当前非线性问题研究的关键。近年来，已经出现了许多求解非线性偏微分方程精确解的方法，例如 Backlund 变换法、Jacobi 椭圆函数展开法、tanh 函数展开法、变量分离法、首次积分法等等。近期，由文献[1]提出的(G'/G)展开法，是通过假设非线性偏微分方程的解可以由一类线性常微分方程的解来表示的一种简单有效的求解非线性偏微分方程显式行波解的方法。

考虑可以描述河渠中水波表面传播性态的 RLW-Burgers 方程

$$u_t + u_x - \theta u_{xx} + uu_x - \delta u_{xxt} = 0 \tag{1}$$

其中$\theta > 0, \delta > 0$。文献[2]和文献[3]研究了该方程行波解的存在性及行波解的性质；文献[4]得到了该方程的振荡激波解；文献[5]通过未知函数的变换及待定系数法得到了方程的显式行波解；文献[6]研究了该方程的古典对称和势对称，并利用推广的 Tanh 函数法和 Lie 变换群得到了该方程的一系列精确解。

本文借由(G'/G)展开法的基本思想[7] [8] [9] [10] [11]，构造了一类含参数的G展开法，即假设非线性偏微分方程的解具有$\left(\dfrac{mG+nG'}{G+G'}\right)$的多项式的形式，其中$m,n$为任意不等的自由参数，$G$是由一类非线性的常微分方程的显式行波解得到。运用此类展开法，得到了 RLW-Burgers 方程的多种函数形式的新显式行波解。

2. 含参数的 *G* 展开法

将非线性偏微分方程

$$P(u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\cdots) = 0 \tag{2}$$

作行波变换，令$u(x,t) = u(\xi)$，$\xi = x - ct$，则上式化为常微分方程

$$P(u,u',u'',\cdots) = 0 \tag{3}$$

设方程(2)的解为

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^{l} a_i \left(\frac{mG+nG'}{G+G'}\right)^i \tag{4}$$

其中$m \neq n$为自由参数，$l, a_i\ (i = 0,1,2,\cdots)$为待定的常数，通过齐次平衡法可以确定参数$l$；并且要求其中的$G = G(\xi)$满足一类非线性的常微分方程

$$\lambda_1 G^2 + \lambda_2 (G')^2 + \lambda_3 GG'' + \lambda_4 GG' = 0 \tag{5}$$

这里$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$为任意的常数。

对于方程(5)式，通过借助符号计算软件 Mathematica，我们得到了其以下几种情况下的解：

① 当 $\lambda_1 \neq -\lambda_3, \lambda_3 \neq 0$ 且 $\Delta = 4\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3) - \lambda_4^2 > 0$ 时，方程(5)的解为

$$G(\xi) = C_2 \cos\left[\frac{1}{2\lambda_3}\sqrt{\Delta}(\xi - C_1\lambda_3)\right]^{\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_3}} \exp\left(\frac{-\lambda_4\xi}{2\lambda_1+2\lambda_3}\right) \tag{6}$$

这里 C_1, C_2 为积分常数。

② 当 $\lambda_1 \neq -\lambda_3, \lambda_3 \neq 0$ 且 $\Delta = 4\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3) - \lambda_4^2 < 0$ 时，方程(5)的解为

$$G(\xi) = C_2 \cosh\left[\frac{1}{2\lambda_3}\sqrt{\Delta}(\xi - C_1\lambda_3)\right]^{\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_3}} \exp\left(\frac{-\lambda_4\xi}{2\lambda_1+2\lambda_3}\right) \tag{7}$$

这里 C_1, C_2 为积分常数。

③ 当 $\lambda_1 \neq -\lambda_3$ 且 $\Delta = 4\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3) - \lambda_4{}^2 = 0$ 时，方程(5)的解为

$$G(\xi) = C_2(2\xi - C_1\lambda_3)^{\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_3}} \exp\left(\frac{-\lambda_4\xi}{2\lambda_1+2\lambda_3}\right) \tag{8}$$

这里 C_1, C_2 为积分常数。

④ 当 $\lambda_1 = -\lambda_3 \neq 0$ 且 $\lambda_4 \neq 0$ 时，方程(5)的解为

$$G(\xi) = C_2 \exp\left(\frac{-\lambda_2\xi + C_1\lambda_1 e^{\frac{\lambda_4}{\lambda_1}\xi}}{\lambda_4}\right) \tag{9}$$

这里 C_1, C_2 为积分常数。

⑤ 当 $\lambda_1 = -\lambda_3 \neq 0$ 且 $\lambda_4 = 0$ 时，方程(5)的解为

$$G(\xi) = C_2 \exp\left(\frac{\lambda_2\xi^2}{2\lambda_1} + C_1\xi\right) \tag{10}$$

这里 C_1, C_2 为积分常数。

3. RLW-Burgers 方程的新显式行波解

设方程(1)有行波解 $u = u(\xi) = u(x - ct)$，其中 c 是一非零常数，从而方程(1)化为

$$(c+1)u' + uu' - \theta u'' - c\delta u''' = 0$$

对其两边进行积分，并取积分常数为零，可得

$$(c+1)u + \frac{1}{2}u^2 - \theta u' - c\delta u'' = 0 \tag{11}$$

设方程(1)的解为 $u(\xi) = \sum_{i=0}^{l} a_i \left(\frac{mG + nG'}{G + G'}\right)^i$，且 $G = G(\xi)$ 满足方程

$$\lambda_1 G^2 + \lambda_2 (G')^2 + \lambda_3 GG'' + \lambda_4 GG' = 0$$

这里 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 为任意常数。利用齐次平衡法，有 $2l = l + 2$，可得 $l = 2$，则方程(1)的解表示为

$$u(\xi) = a_2\left(\frac{mG + nG'}{G + G'}\right)^2 + a_1\left(\frac{mG + nG'}{G + G'}\right) + a_0 \tag{12}$$

由上式可以求得 $u(\xi)$ 的各阶导数，再结合方程(5)式，我们得到，

$$u'(\xi)=\frac{2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4)a_2}{(m-n)\lambda_3}\left(\frac{mG+nG'}{G+G'}\right)^3+\frac{1}{(m-n)\lambda_3}\Big((\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4)a_1+2(-2m\lambda_1-2n\lambda_2$$
$$-2m\lambda_3+(m+n)\lambda_4)a_2\Big)\left(\frac{mG+nG'}{G+G'}\right)^2+\frac{1}{(m-n)\lambda_3}\Big((-2m\lambda_1-2n\lambda_2-2m\lambda_3+(m+n)\lambda_4)a_1$$
$$+2\left(m^2\lambda_1+n^2\lambda_2+m^2\lambda_3-mn\lambda_4\right)a_2\Big)\left(\frac{mG+nG'}{G+G'}\right)+\frac{\left(m^2\lambda_1+n^2\lambda_2+m(m\lambda_3-n\lambda_4)\right)a_1}{(m-n)\lambda_3}$$

$$u''(\xi)=\frac{6(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4)^2a_2}{(m-n)^2\lambda_3^2}\left(\frac{mG+nG'}{G+G'}\right)^4+\frac{2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4)}{(m-n)^2\lambda_3^2}\Big((\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4)a_1$$
$$+5\left(-2(m\lambda_1+n\lambda_2+m\lambda_3)+(m+n)\lambda_4\right)a_2\Big)\left(\frac{mG+nG'}{G+G'}\right)^3$$
$$+\frac{1}{(m-n)^2\lambda_3^2}\Big(-3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4)\left(2m\lambda_1+2n\lambda_2+2m\lambda_3-(m+n)\lambda_4\right)a_1$$
$$+4\Big(6\left(m^2\lambda_1^2+n^2\lambda_2^2+m^2\lambda_3^2+2m^2\lambda_1\lambda_3-(m+n)\left(m(\lambda_1+\lambda_3)+n\lambda_2\right)\lambda_4\right)$$
$$+\left(m^2+4mn+n^2\right)\left(2\lambda_1\lambda_2+2\lambda_2\lambda_3+\lambda_4^2\right)\Big)a_2\Big)\left(\frac{mG+nG'}{G+G'}\right)^2+\frac{1}{(m-n)^2\lambda_3^2}$$
$$\times\Big(\Big(\left(2m\lambda_1+2n\lambda_2+2m\lambda_3-(m+n)\lambda_4\right)^2+2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4)\left(m^2\lambda_1+n^2\lambda_2+m^2\lambda_3-mn\lambda_4\right)\Big)a_1$$
$$-6\left(2m\lambda_1+2n\lambda_2+2m\lambda_3-(m+n)\lambda_4\right)\left(m^2\lambda_1+n^2\lambda_2+m^2\lambda_3-mn\lambda_4\right)a_2\Big)\left(\frac{mG+nG'}{G+G'}\right)$$
$$+\frac{m^2\lambda_1+n^2\lambda_2+m(m\lambda_3-n\lambda_4)}{(m-n)^2\lambda_3^2}\Big((-2m\lambda_1-2n\lambda_2-2m\lambda_3+m\lambda_4+n\lambda_4)a_1$$
$$+2\left(m^2\lambda_1+n^2\lambda_2+m^2\lambda_3-mn\lambda_4\right)a_2\Big)$$

将上面的 u 及 u',u'' 分别代入(11)式，合并 $\left(\frac{mG+nG'}{G+G'}\right)$ 的同幂次项，并令其各次幂的系数为零，我们得到

$$\left(\frac{mG+nG'}{G+G'}\right)^0:\quad \begin{aligned}&(1+c)a_0+\frac{a_0^2}{2}-\frac{\theta a_1}{(m-n)\lambda_3}\left(m^2\lambda_1+n^2\lambda_2+m(m\lambda_3-n\lambda_4)\right)+\frac{c\delta}{(m-n)^2\lambda_3^2}\\&\times\left(m^2\lambda_1+n^2\lambda_2+m(m\lambda_3-n\lambda_4)\right)\Big(\left(-2(m\lambda_1+n\lambda_2+m\lambda_3)+(m+n)\lambda_4\right)a_1\\&+2\left(m^2\lambda_1+n^2\lambda_2+m(m\lambda_3-n\lambda_4)\right)a_2\Big)=0\end{aligned}$$

$$\left(\frac{mG+nG'}{G+G'}\right)^1:\quad \begin{aligned}&(1+c)a_1+a_0a_1+\frac{\theta}{(m-n)\lambda_3}\Big(\left(2m\lambda_1+2n\lambda_2+2m\lambda_3-(m+n)\lambda_4\right)a_1\\&-2\left(m^2\lambda_1+n^2\lambda_2+m(m\lambda_3-n\lambda_4)\right)a_2\Big)+\frac{c\delta}{(m-n)^2\lambda_3^2}\Big(\Big(-2(m\lambda_1+n\lambda_2+m\lambda_3\\&+(m+n)\lambda_4)^2+2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4)\left(m^2\lambda_1+n^2\lambda_2+m(m\lambda_3-n\lambda_4)\right)\Big)a_1\\&-6\left(2m\lambda_1+2n\lambda_2+2m\lambda_3-(m+n)\lambda_4\right)\left(m^2\lambda_1+n^2\lambda_2+m(m\lambda_3-n\lambda_4)\right)a_2\Big)=0\end{aligned}$$

$$\left(\frac{mG+nG'}{G+G'}\right)^2: \begin{aligned}&\frac{a_1^2}{2}+(1+c)a_2+\frac{\theta}{(m-n)\lambda_3}\big(-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4)a_1+2\big(2m\lambda_1+2n\lambda_2+2m\lambda_3\\&-(m+n)\lambda_4\big)a_2\big)+a_0a_2+\frac{c\delta}{(m-n)^2\lambda_3^2}\big(-3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4)(2m\lambda_1+2n\lambda_2\\&+2m\lambda_3-(m+n)\lambda_4)a_1+4\big(2\big(3m^2\lambda_1^2+3n^2\lambda_2^2+(m^2+4mn+n^2)\lambda_2\lambda_3+3m^2\lambda_3^2\\&+\lambda_1\big((m^2+4mn+n^2)\lambda_2+6m^2\lambda_3\big)\big)-6(m+n)(m\lambda_1+n\lambda_2+m\lambda_3)\lambda_4\\&+(m^2+4mn+n^2)\lambda_4^2\big)a_2\big)\\&=0\end{aligned}$$

$$\left(\frac{mG+nG'}{G+G'}\right)^3: \begin{aligned}&a_1a_2-\frac{2\theta(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4)a_2}{(m-n)\lambda_3}+\frac{2c\delta}{(m-n)^2\lambda_3^2}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4)\\&\times\big((\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4)a_1+5\big(-2(m\lambda_1+n\lambda_2+m\lambda_3)+(m+n)\lambda_4\big)\big)\\&=0\end{aligned}$$

$$\left(\frac{mG+nG'}{G+G'}\right)^4: \frac{1}{2}\left(a_2+\frac{12c\delta(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4)^2}{(m-n)^2\lambda_3^2}\right)a_2=0$$

由此我们得到了关于 a_i 的代数方程组，通过借助符号计算软件 Mathematica，可得

$$a_2=\frac{12\delta(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4)^2}{(m-n)^2(\pm6\delta\Delta+\lambda_3^2)}$$

$$a_1=\frac{12(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4)}{5(m-n)^2(\pm6\delta\Delta+\lambda_3^2)}\big(\pm6(m-n)\delta\Delta\theta-\lambda_3\big(10m\delta\lambda_1+10n\delta\lambda_2+(10m\delta-m\theta+n\theta)\lambda_3-5(m+n)\delta\lambda_4\big)\big)$$

$$\begin{aligned}a_0=&\frac{\theta^2(\pm6\delta\Delta+\lambda_3^2)}{25\delta\lambda_3^2}-\frac{1}{5(m-n)\lambda_3}\big(12m\theta\lambda_1+12n\theta\lambda_2+(5m-5n+12m\theta)\lambda_3-6(m+n)\theta\lambda_4\big)\\&-\frac{1}{(m-n)^2(\pm6\delta\Delta+\lambda_3^2)}\big(2(m^2+mn+n^2)\delta\Delta+12n^2\delta\lambda_2^2+(m-n)^2\lambda_3^2+12m^2\delta(\lambda_1+\lambda_3)^2\\&-12(m+n)\delta(m\lambda_1+n\lambda_2+m\lambda_3)\lambda_4+3(m^2+4mn+n^2)\delta\lambda_4^2\big)\end{aligned}$$

$$c=\frac{\lambda_3^2}{\pm6\delta\Delta+\lambda_3^2}$$

这里 $\Delta=4\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)-\lambda_4^2$。将上面得到的 a_2,a_1,a_0,c 代入(12)式，并结合方程(5)式的解 G，我们得到了方程(1)式的下列显式行波解：

① 当 $\lambda_1\neq-\lambda_3,\lambda_3\neq0$ 且 $\Delta>0$ 时，$\xi=x+\dfrac{\lambda_3^2}{\pm6\delta\Delta+\lambda_3^2}t$，由(6)式，可得方程(1)的解为

$$u(\xi)=\frac{12\delta(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4)^2}{(m-n)^2(\pm 6\delta\Delta+\lambda_3^2)}\frac{\left(2m(\lambda_1+\lambda_3)-n\lambda_4+n\sqrt{\Delta}\tan\left(\frac{\sqrt{\Delta}(C_1\lambda_3-\xi)}{2\lambda_3}\right)\right)^2}{\left(2(\lambda_1+\lambda_3)-\lambda_4+\sqrt{\Delta}\tan\left(\frac{\sqrt{\Delta}(C_1\lambda_3-\xi)}{2\lambda_3}\right)\right)^2}$$

$$+\frac{12(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4)}{5(m-n)^2(\pm 6\delta\Delta+\lambda_3^2)}\frac{\left(2m(\lambda_1+\lambda_3)-n\lambda_4+n\sqrt{\Delta}\tan\left(\frac{\sqrt{\Delta}(C_1\lambda_3-\xi)}{2\lambda_3}\right)\right)}{2(\lambda_1+\lambda_3)-\lambda_4+\sqrt{\Delta}\tan\left(\frac{\sqrt{\Delta}(C_1\lambda_3-\xi)}{2\lambda_3}\right)}$$

$$\times\left(\pm 6(m-n)\delta\Delta\theta-\lambda_3\left(10m\delta\lambda_1+10n\delta\lambda_2+(10m\delta-m\theta+n\theta)\lambda_3-5(m+n)\delta\lambda_4\right)\right)$$

$$+\frac{\theta^2(\pm 6\delta\Delta+\lambda_3^2)}{25\delta\lambda_3^2}-\frac{1}{5(m-n)\lambda_3}\left(12m\theta\lambda_1+12n\theta\lambda_2+(5m-5n+12m\theta)\lambda_3-6(m+n)\theta\lambda_4\right)$$

$$-\frac{1}{(m-n)^2(\pm 6\delta\Delta+\lambda_3^2)}\left(2(m^2+mn+n^2)\delta\Delta+12n^2\delta\lambda_2^2+(m-n)^2\lambda_3^2\right.$$

$$\left.+12m^2\delta(\lambda_1+\lambda_3)^2-12(m+n)\delta(m\lambda_1+n\lambda_2+m\lambda_3)\lambda_4+3(m^2+4mn+n^2)\delta\lambda_4^2\right)$$

此为方程的三角函数形式的解。

② 当 $\lambda_1\neq-\lambda_3$，$\lambda_3\neq 0$ 且 $\Delta<0$ 时，$\xi=x+\frac{\lambda_3^2}{\pm 6\delta\Delta+\lambda_3^2}t$，由(7)式，可得方程(1)的解为

$$u(\xi)=\frac{12\delta(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4)^2}{(m-n)^2(\pm 6\delta\Delta+\lambda_3^2)}\frac{\left(2m(\lambda_1+\lambda_3)-n\lambda_4-n\sqrt{\Delta}\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}(C_1\lambda_3-\xi)}{2\lambda_3}\right)\right)^2}{\left(2(\lambda_1+\lambda_3)-\lambda_4-\sqrt{\Delta}\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}(C_1\lambda_3-\xi)}{2\lambda_3}\right)\right)^2}$$

$$+\frac{12(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4)}{5(m-n)^2(\pm 6\delta\Delta+\lambda_3^2)}\frac{\left(2m(\lambda_1+\lambda_3)-n\lambda_4-n\sqrt{\Delta}\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}(C_1\lambda_3-\xi)}{2\lambda_3}\right)\right)}{2(\lambda_1+\lambda_3)-\lambda_4-\sqrt{\Delta}\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}(C_1\lambda_3-\xi)}{2\lambda_3}\right)}$$

$$\times\left(\pm 6(m-n)\delta\Delta\theta-\lambda_3\left(10m\delta\lambda_1+10n\delta\lambda_2+(10m\delta-m\theta+n\theta)\lambda_3-5(m+n)\delta\lambda_4\right)\right)$$

$$+\frac{\theta^2(\pm 6\delta\Delta+\lambda_3^2)}{25\delta\lambda_3^2}-\frac{1}{5(m-n)\lambda_3}\left(12m\theta\lambda_1+12n\theta\lambda_2+(5m-5n+12m\theta)\lambda_3-6(m+n)\theta\lambda_4\right)$$

$$-\frac{1}{(m-n)^2(\pm 6\delta\Delta+\lambda_3^2)}\left(2(m^2+mn+n^2)\delta\Delta+12n^2\delta\lambda_2^2+(m-n)^2\lambda_3^2+12m^2\delta(\lambda_1+\lambda_3)^2\right.$$

$$\left.-12(m+n)\delta(m\lambda_1+n\lambda_2+m\lambda_3)\lambda_4+3(m^2+4mn+n^2)\delta\lambda_4^2\right)$$

此为方程的双曲函数形式的解。

③ 当 $\lambda_1\neq-\lambda_3$ 且 $\Delta=0$ 时，$\xi=x+t$，由(8)式，可得方程(1)的解为

$$u(\xi)=\frac{12\delta(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4)^2}{(m-n)^2(\pm 6\delta\Delta+\lambda_3^2)}\frac{\left(4n\lambda_3+(2\xi-C_1\lambda_3)(2m(\lambda_1+\lambda_3)-n\lambda_4)\right)^2}{\left(4\lambda_3+(2\xi-C_1\lambda_3)(2(\lambda_1+\lambda_3)-\lambda_4)\right)^2}$$

$$+\frac{12(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4)}{5(m-n)^2(\pm 6\delta\Delta+\lambda_3^2)}\frac{\left(4n\lambda_3+(2\xi-C_1\lambda_3)(2m(\lambda_1+\lambda_3)-n\lambda_4)\right)}{\left(4\lambda_3+(2\xi-C_1\lambda_3)(2(\lambda_1+\lambda_3)-\lambda_4)\right)}$$

$$\times\left(\pm 6(m-n)\delta\Delta\theta-\lambda_3(10m\delta\lambda_1+10n\delta\lambda_2+(10m\delta-m\theta+n\theta)\lambda_3-5(m+n)\delta\lambda_4)\right)$$

$$+\frac{\theta^2(\pm 6\delta\Delta+\lambda_3^2)}{25\delta\lambda_3^2}-\frac{1}{5(m-n)\lambda_3}(12m\theta\lambda_1+12n\theta\lambda_2+(5m-5n+12m\theta)\lambda_3$$

$$-6(m+n)\theta\lambda_4)-\frac{1}{(m-n)^2(\pm 6\delta\Delta+\lambda_3^2)}\left(2(m^2+mn+n^2)\delta\Delta+12n^2\delta\lambda_2^2+(m-n)^2\lambda_3^2\right.$$

$$\left.+12m^2\delta(\lambda_1+\lambda_3)^2-12(m+n)\delta(m\lambda_1+n\lambda_2+m\lambda_3)\lambda_4+3(m^2+4mn+n^2)\delta\lambda_4^2\right)$$

此为方程的有理函数形式的解。

④ 当 $\lambda_1=-\lambda_3\neq 0$ 且 $\lambda_4\neq 0$ 时， $\xi=x-\frac{\lambda_3^2}{\pm 6\delta\lambda_4^2-\lambda_3^2}t$，由(9)式，可得方程(1)的解为

$$u(\xi)=\frac{-12\delta(\lambda_2-\lambda_4)^2}{(m-n)^2(\pm 6\delta\lambda_4^2-\lambda_3^2)}\frac{\left(nC_1\lambda_4+(-n\lambda_2+m\lambda_4)\exp\left(\frac{\lambda_4}{\lambda_3}\xi\right)\right)^2}{\left(C_1\lambda_4+(-\lambda_2+\lambda_4)\exp\left(\frac{\lambda_4}{\lambda_3}\xi\right)\right)^2}$$

$$-\frac{12(\lambda_2-\lambda_4)}{5(m-n)^2(\pm 6\delta\lambda_4^2-\lambda_3^2)}\frac{\left(nC_1\lambda_4+(-n\lambda_2+m\lambda_4)\exp\left(\frac{\lambda_4}{\lambda_3}\xi\right)\right)}{\left(C_1\lambda_4+(-\lambda_2+\lambda_4)\exp\left(\frac{\lambda_4}{\lambda_3}\xi\right)\right)}$$

$$\times\left(-10n\delta\lambda_2\lambda_3+(m-n)\theta\lambda_3^2+5(m+n)\delta\lambda_3\lambda_4+6(-m+n)\delta\theta\lambda_4^2\right)$$

$$-\frac{\theta^2(\pm 6\delta\lambda_4^2-\lambda_3^2)}{25\delta\lambda_3^2}+\frac{(-12n\theta\lambda_2-5(m-n)\lambda_3+6(m+n)\theta\lambda_4)}{5(m-n)\lambda_3}$$

$$+\frac{1}{(m-n)^2(\pm 6\delta\lambda_4^2-\lambda_3^2)}\left(12n^2\delta\lambda_2^2+(m-n)^2\lambda_3^2-12n(m+n)\delta\lambda_2\lambda_4\right.$$

$$\left.+(m^2+10mn+n^2)\delta\lambda_4^2\right)$$

此为方程的指数函数形式的解。

⑤ 当 $\lambda_1=-\lambda_3\neq 0$ 且 $\lambda_4=0$ 时， $\xi=x+t$，由(10)式，可得方程(1)的解为

$$u(\xi)=\frac{12}{5}\lambda_2\left(\frac{\theta}{-\xi\lambda_2+(1+C_1)\lambda_3}+5\delta\lambda_2\left(\frac{1}{(\xi\lambda_2-(1+C_1)\lambda_3)^2}-\frac{2n^2}{(m-n)^2\lambda_3^2}\right)\right)+\frac{\theta^2}{25\delta}-2$$

此为方程的另一有理函数形式的解。

4. 总结

本文构造了一类含有自由参数 m,n 的 $\left(\frac{mG+nG'}{G+G'}\right)$ 形式的展开法，并用其对 RLW-Burgers 方程进行了求解，得到了该方程的三角函数形式、双曲函数形式、指数函数形式和有理函数形式的新显式行波解。由此可见，此类含参数的 G 展开法不仅是求解非线性偏微分方程的有效方法，而且对于可以自由选取的参数，我们可以得到非线性偏微分方程更多类型的显式精确解。

基金项目

国家自然科学基金(11601109)，海南省自然科学基金(117066)。

参考文献 (References)

[1] Wang, M.L, Li, X.Z. and Zhang, J.L. (2008) The (G'/G)-Expansion Method and Travelling Wave Solutions of Nonlinear Evolution Equations in Mathematical Physics. *Physics Letters A*, **372**, 417-423.

[2] 王明新. 非线性抛物形方程[M]. 北京: 科学出版社, 1993.

[3] 黄正洪, 夏莉. RLW-Burgers 方程行波解的性质[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版), 1998, 15(1): 24-28.

[4] 谈骏渝. RLW-Burgers 方程的一类解析解[J]. 数学的实践与认识, 2001, 31(5): 545-549.

[5] 刘金枝, 吴爱祥. RLW-Burgers 方程的显式行波解[J]. 南华大学学报(自然科学版), 2004, 18(3): 18-20.

[6] 鲍春玲, 苏道, 毕力格, 韩雁清. RLW-Burgers 方程的势对称及其精确解[J]. 应用数学进展, 2016, 5(1): 112-120.

[7] Wang, M.L., Zhang, J.L. and Li, X.Z. (2008) Application of the (G'/G)-Expansion to Travelling Wave Solutions of the Broer-Kaup and the Approximate Long Water Wave Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **206**, 321-326.

[8] Li, L.X. and Wang, M.L. (2009) The (G'/G)-Expansion Method and Travelling Wave Solutions for a Higher-Order Nonlinear Schrodinger Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **208**, 440-445.

[9] 邢秀芝, 杨红艳, 卜春霞. 利用推广的(G'/G)展开法求解(2+1)维 BBM 方程[J]. 数学的实践与认识, 2011, 41(16): 240-243.

[10] 王鑫. 一类非线性偏微分方程的精确解[J]. 应用数学, 2013, 26(3): 521-525.

[11] 曹瑞. 一类广义 Zakharov 方程的精确行波解[J]. 数学杂志, 2013, 33(5): 837-843.