Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2017, 6(4), 627-636
Published Online July 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.64073

Special Linear Group $SL(2,R)$ of Finite Abelian Subgroup

Chuanhua Jiang, Cuilian Duan
Guangxi Normal University, Guilin Guangxi
Email: haoniuzai375588198@qq.com

Received: Jul. 8th, 2017; accepted: Jul. 24th, 2017; published: Jul. 27th, 2017

Abstract

In this paper, we study the finite Abelian subgroup of special linear group $SL(2,R)$ by using the eigenvalue theory of λ-matrix and the solution method of constant coefficient linear homogeneous recursive relations. We get the structure of cyclic group for arbitrary order n of $SL(2,R)$, that is to say, all the solutions of the 2 order matrix equation: $A^n = I$ and $A^k \neq I$ $(n,k \in N^+, k < n)$ are given out. Furthermore, we hope to determine the structure of finite Abelian subgroup of special linear group $SL(2,R)$ by discussing the commutativity between generators of arbitrary order cyclic group.

Keywords

Special linear Group, Abelian Group, Homogeneous Recurrence Relation, λ- Matrix

特殊线性群$SL(2,R)$的有限Abelian子群

蒋传华，段翠连
广西师范大学，广西 桂林
Email: haoniuzai375588198@qq.com

收稿日期：2017年7月8日；录用日期：2017年7月24日；发布日期：2017年7月27日

摘 要

本文运用λ-矩阵的相关理论和常系数线性齐次递归关系的求解方法，对特殊线性群$SL(2,R)$的有限Abelian子群进行了研究，给出了其任意阶循环群的结构，即2阶矩阵方程：$A^n = I$且$A^k \neq I$，其中

文章引用: 蒋传华, 段翠连. 特殊线性群 $SL(2,R)$的有限 Abelian 子群[J]. 应用数学进展, 2017, 6(4): 627-636.
https://doi.org/10.12677/aam.2017.64073

$n,k \in N^{+}, k < n$ 的全部解。进一步，我们希望通过探讨各阶循环群生成元的交换性来确定 $SL(2,R)$ 的有限Abelian子群结构。

关键词

特殊线性群，Abelian群，齐次递归关系，λ-矩阵

1. 引言

n 阶一般线性群是由 n 阶可逆矩阵组成的群，矩阵的元素取自 R 群运算，为通常的矩阵乘法，记为 $GL(n,R)$；特殊线性群是 $GL(n,R)$ 中行列式为 1 的全体矩阵，它们对于矩阵乘法构成 $GL(n,R)$ 的一个子群，记为 $SL(n,R)$。一般线性群 $GL(n,R)$ 和特殊线性群 $SL(n,R)$ 都是经典的李群，它们与群论和几何的研究有着密切的联系，在几何分析中有如下深刻的结果：特殊线性群 $SL(n,R)$ 的有限 Abelian 子群是紧黎曼曲面的微分同胚不变量。这一结论将几何和代数(群理论)紧密联系起来，本文以此为出发点，结合群理论中对有限 *Abel* 群结构的完整刻画，如：有限 *Abel* 群可以分解成阶为素数的方幂的循环群(循环 *p*-群)的直积[1]等，对特殊线性群 $SL(2,R)$ 的有限 Abelian 子群进行研究，从而进一步加深对紧黎曼曲面的认识。

2. 基本概念、定理和方法

2.1. 基本概念和定理

下面列出一些与群和矩阵相关的概念和定理(可参考文献[1] [2])，方便后面章节使用。

定义 2.1.1 [1] 设 G 为非空集合，“$\circ$”为 G 上的一个代数运算，若 G 的运算满足：

1) “$\circ$”满足结合律，即 $\forall A,b,c \in \mathrm{G}$，都有 $(A \circ b) \circ c = A \circ (b \circ c)$；

2) G 中有元素 e，使对每个元 $A \in \mathrm{G}$，有 $e \circ A = A \circ e = A$；

3) 对 G 中每个元素 A，存在元素 $b \in \mathrm{G}$，使得 $A \circ b = b \circ A = e$。

则 G 关于运算“$\circ$”构成一个群(*Group*)，记为 $(\mathrm{G},\circ)$，在不产生混淆的前提下，简记为 G。

定义 2.1.2 [1] 如果对群 $(\mathrm{G},\circ)$ 中任两个元素 A，b 均有

$$A \circ b = b \circ A,$$

即 G 的代数运算满足交换律，则称 G 为交换群(*commutative Group*)或 *Abel* 群(*Abelian Group*)。

定义 2.1.3 [1] 群 $(\mathrm{G},\circ)$ 中的元素个数叫做群 G 的阶(*order*)，记为 $|\mathrm{G}|$。如果 $|\mathrm{G}|$ 有限，称 G 为有限群(*Finite Group*)，特别地，当 $|\mathrm{G}| = n$ 时，称 G 为 n 阶群，否则称 G 为无限群(*infinite Group*)。

定义 2.1.4 [1] 设 G 为群，H 是 G 的一个非空子集，如果 H 关于 G 的运算也构成群，则称 H 为 G 的一个子群(*subgroup*)，记作 $\mathrm{H} \le \mathrm{G}$。

定义 2.1.5 [1] 元素在实数域 r 中全体 n 阶可逆矩阵对于矩阵的乘法构成一个群，这个群记为 $GL(n,R)$，称为 n 阶一般线性群，$GL(n,R)$ 中全体行列式为 1 的矩阵对于矩阵的乘法也构成一个群，这个群记为 $SL(n,R)$，称为 n 阶特殊线性群。特别地，当 $n = 2$ 时有

$$SL(2,R)=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}: a,b,c,d\in R, \text{且} ad-bc=1\right\}.$$

定义 2.1.6 [1] 设 G 为群，如果存在 $a\in G$ 时

$$G=\left\{a^k \middle| k\in Z\right\},$$

则称 G 为循环群，并称 *A* 是群 G 的一个生成元(*Generator*)。习惯上记为 $G=(a)$，当 G 中的元素个数是无限时，称 G 为无限循环群；当 G 中元素的个数为 *n* 时，称 G 为 *n* 阶循环群。

定义 2.1.7 [1] 一般地，我们称下列形式矩阵为多项式矩阵，或λ-矩阵：

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m1}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

其中 $a_{ij}(\lambda)$ 是以 λ 为未定元的数域 *k* 上的多项式。λ-矩阵的加法、数乘及乘法与数域上的矩阵运算一样，只需在运算过程中将数的运算代之以多项式运算即可。

定义 2.1.8 [2] 设 $A(\lambda)$ 是一个 *n* 阶λ-矩阵，*k* 是小于等于 *n* 的某个自然数。如果 $A(\lambda)$ 的所有 *k* 阶子式的最大公因子(它是首一多项式)不等于零，则称这个多项式为 $A(\lambda)$ 的 *k* 阶行列式因子，记为 $D_k(\lambda)$，若 $A(\lambda)$ 的所有 *k* 阶子式都等于零，则规定 $A(\lambda)$ 的 *k* 阶行列式因子等于零。

定义 2.1.9 [2] 设 $D_1(\lambda),D_2(\lambda),\cdots,D_r(\lambda)$ 是λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的非零行列式因子，则 $g_1(\lambda)=D_1(\lambda),g_2(\lambda)=D_2(\lambda)/D_1(\lambda),\cdots,g_r(\lambda)=D_r(\lambda)/D_{r-1}(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的不变因子。

定义 2.1.10 [2] 若 $A(\lambda)$，$B(\lambda)$ 都是 λ-矩阵且 $A(\lambda)$ 经过初等变换后可变为 $B(\lambda)$，则称 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵。

定理 2.1.1 [2] 设 *A* 是数域 *k* 上的 *n* 阶矩阵，则 *A* 的特征矩阵 λI_n-A 必相抵于

$$diag\left\{1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_m(\lambda)\right\},$$

其中 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)\,(i=1,2,\cdots,m-1)$。

定理 2.1.2 [2] 下列 *r* 阶矩阵

$$F=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_r & -a_{r-1} & -a_{r-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

的行列式因子等于

$$1,\cdots,1;f(\lambda),$$

其中共有 $r-1$ 个 1，$f(\lambda)=\lambda^r+a_1\lambda^{r-1}+\cdots+a_r$，*F* 的不变因子组也由$1,\cdots,1;f(\lambda)$给出。

定理 2.1.3 [2] 设 *A* 是数域 *k* 上的 *n* 阶方阵，*A* 的不变因子组为

$$1,\cdots,1;d_1(\lambda),\cdots,d_k(\lambda),$$

其中 $\deg d_i(\lambda)=m_i$，则 *A* 相似于下列分块对角矩阵：

$$F=\begin{bmatrix} F_1 & & & \\ & F_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_k \end{bmatrix}$$

其中 F_i 的阶等于 m_i，且 F_i 是形如定理 2.1.2 的矩阵，F_i 的最后一行由 $d_i(\lambda)$ 系数(除最高次项)的负值组成。

2.2. 常系数线性齐次递归关系的求解方法[3]

本节我们介绍常系数线性齐次递归关系的求解，相关内容请参考文献[3]。

常系数线性齐次递归关系，其形如

$$H(n)=a_1H(n-1)+a_2H(n-2)+\cdots+a_rH(n-r)$$

或

$$H_n=a_1H_{n-1}+a_2H_{n-2}+\cdots+a_rH_{n-r} \tag{2.2.1}$$

这里 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 全部是常系数。例如

$$H_n=3H_{n-1}+H_{n-2}$$

就是一个常系数线性齐次递归方程。假定 $a_r\neq 0$，则递归关系(2.2.1)称为是 r 阶的。为了不失一般性，如果序列中 r 个相邻的 H 值 $H_{k-r},H_{k-r+1},\cdots,H_{k-1}$ 对某一 k 已知，则可用(2.2.1)算出 H_k 的值，于是 $H_{k+1},H_{k+2},\cdots$ 的值也可递归地算出。这就推出，(2.2.1)的解唯一地由 r 个相邻的 H 值(边界条件)所决定。因此，(2.2.1)的解的一般形式包含有 r 个待定常数，这些常数可由序列中相邻的 r 个 H 值来决定。我们把(2.2.1)改写成如下形式

$$H(n)-a_1H(n-1)-a_2H(n-2)-\cdots-a_rH(n-r)=0 \tag{2.2.2}$$

这里 $n=r,r+1,\cdots$。

我们把与递归关系(2.2.1)或(2.2.2)相联系的方程

$$x^r-a_1x^{r-1}-a_2x^{r-2}-\cdots-a_r=0 \tag{2.2.3}$$

称为(2.2.1)或(2.2.2)的特征方程。方程(2.2.3)有 r 个根 $q_1,q_2,\cdots,q_r$，这些根称为方程(2.2.1)的特征根。因为 $a_r\neq 0$，这些特征根必定全不为零。这些根可能是互异的，也可能有重根，还有可能是复根。关于常系数线性齐次递归关系的求解如下：

1) 若特征方程有 r 个不同的特征根

定理　设递归关系

$H(n)=a_1H(n-1)+a_2H(n-2)+\cdots+a_rH(n-r),a_r\neq 0(n=r,r+1,\cdots)$ 的特征根 $q_1,q_2,\cdots,q_r$ 互不相同，则

$$H(n)=c_1q_1^n+c_2q_2^n+\cdots c_rq_r^n$$

是一般解。

2) 若特征方程有重根

定理　设 $q_1,q_2,q_3,\cdots,q_t$ 是递归关系

$$H(n)=a_1H(n-1)+a_2H(n-2)+\cdots+a_rH(n-r),\quad a_r\neq 0(n=r,r+1,\cdots)$$

的特征方程互异的根。q_i 是特征方程的 e_i 重根 $(i=1,2,\cdots,t)$，那么这个递归关系对应 q_i 部分的一般解是

$$H_i(n)=c_1q_i^n+c_2nq_i^n+\cdots+c_{e_i}n^{e_i-1}q_i^n=\left(c_1+c_2n+\cdots+c_{e_i}n^{e_i-1}\right)q_i^n$$

而这个递归关系的一般解是

$$H(n)=H_1(n)+H_2(n)+\cdots+H_t(n).$$

3) 若特征方程出现复根

当特征方程的诸系数是实数，但某些特征根是复数时，齐次解则写成另一种形式。因为复数根总是成对出现的，故设

$$\alpha_1=\delta+i\omega,\ \alpha_2=\delta-i\omega$$

是一对共轭复根，则对应的齐次解为

$$A_1(\alpha_1)^n+A_2(\alpha_2)^n=A_1(\delta+i\omega)^n+A_2(\delta-i\omega)^n=B_1\rho^n\cos n\theta+B_2\rho^n\sin n\theta$$

其中，$\rho=\sqrt{\delta^2+\omega^2},\theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{\omega}{\delta}\right),B_1=A_1+A_2,B_2=i(A_1-A_2)$

注意，这里的 B_1 和 B_2 是由边界条件决定的常数。

3. *SL*(2, *R*)的有限 *Abelian* 子群的结构

由群理论相关的结论我们有：有限循环群一定是有限 *Abelian* 群，故我们可以先寻找到特殊线性群 $SL(2,R)$ 的有限循环子群，即对任意的 $n\in N^+$，我们需要找到所有满足条件 $A^n=I,A^k\neq I(k<n),|A|=1$ 的矩阵。

3.1. 特殊例子的讨论

由 $A^n=I$，知 A 的特征根满足 $\lambda^n=1$，其特征根集为

$$\lambda_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k=1,2,3,\cdots,n.\ [4]$$

(此处 A 的特征根解集参考文献[4])

特别地，就 $n=1,2,3$ 我们有如下的结论：

1) 当 n=1 时，若要 $A=I$，则 A 为单位阵；

2) 当 n=2 时，若要 $A^2=I$， $A\neq I$ 且 $|A|=1$，则此时无解。分析如下：

① 考虑特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1$，A 特征多项式为 $f(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-1)=\lambda^2-1$，$(\lambda I-A)$ 的 2 阶行列式因子就是矩阵 A 的特征多项式 λ^2-1，由定理 2.1.1 可以得到 $\lambda I-A$ 相抵于 $\begin{bmatrix}1&0\\0&\lambda^2-1\end{bmatrix}$，矩阵 A 的不变因子为

$$1,\lambda^2-1.$$

于是，由定理 2.1.3，矩阵 A 的有理标准型为 $F=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，即 $A\sim\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，此时 $A^2=I,|A|=-1$，不符合 $|A|=1$ 之要求。

② 考虑特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，其特征多项式为 $f(\lambda)=(\lambda-1)^2=\lambda^2-2\lambda+1$，$(\lambda I-A)$ 的 2 阶行列式因子就是矩阵 A 的特征多项式 $\lambda^2-2\lambda+1$，于是由定理 2.1.1 可以得到 $\lambda I-A$ 相抵于 $\begin{bmatrix}1&0\\0&\lambda^2-2\lambda+1\end{bmatrix}$，矩阵 A 的不变因子为

$$1,\lambda^2-2\lambda+1.$$

由定理 2.1.3，矩阵 A 的有理标准型为 $F=\begin{bmatrix}0&1\\-1&2\end{bmatrix}$，即 $A\sim\begin{bmatrix}0&1\\-1&2\end{bmatrix}$，此时 $A^2\neq I$，也不符合要求。

③ 考虑特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，其特征多项式为 $f(\lambda)=(\lambda+1)^2=\lambda^2+2\lambda+1$，$(\lambda I-A)$ 的 2 阶行列式因子就是矩阵 A 的特征多项式为 $\lambda^2+2\lambda+1$，由定理 2.1.1 可以得到 $\lambda I-A$ 相抵于 $\begin{bmatrix}1&0\\0&\lambda^2+2\lambda+1\end{bmatrix}$，矩阵 A 的不变因子为

$$1,\lambda^2+2\lambda+1.$$

由定理 2.1.3，矩阵 A 的有理标准型为 $F=\begin{bmatrix}0&1\\-1&-2\end{bmatrix}$，即 $A\sim\begin{bmatrix}0&1\\-1&-2\end{bmatrix}$，此时 $A^2\neq I$，也不符合要求。

3) 当 $n=3$ 时，要求 $A^3=I,A^k\neq I(k<3),|A|=1$，此时有解 $A\sim\begin{bmatrix}0&1\\-1&-1\end{bmatrix}$。分析如下：

由 $A^3=I$ 知矩阵 A 的特征值为 $\lambda=1,-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

① 当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，讨论的情况与 $A^2=I$ 相同，可知此时无解。

② 当 $\lambda=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 时(复根成对出现，相互共轭)，A 的特征多项式为
$f(\lambda)=\left[\lambda-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]\left[\lambda-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\right]=\lambda^2+\lambda+1$，$(\lambda I-A)$ 的 2 阶行列式因子就是矩阵 A 的特征多项式 $\lambda^2+\lambda+1$，由定理 2.1.1 可以得到 $\lambda I-A$ 相抵于 $\begin{bmatrix}1&0\\0&\lambda^2+\lambda+1\end{bmatrix}$，矩阵 A 的不变因子为

$$1,\lambda^2+\lambda+1$$

由定理 2.1.3，矩阵 A 的有理标准型为 $F=\begin{bmatrix}0&1\\-1&-1\end{bmatrix}$，即 $A\sim\begin{bmatrix}0&1\\-1&-1\end{bmatrix}$，满足条件 $A^3=I,A^k\neq I(k<3),|A|=1$，为我们所求的解。

3.2. 一般形式的归纳和证明

3.2.1. 一般情形的讨论

下面考虑 $n\geq 4$ 的情形。通过对 $n=1,2,3$ 的特殊情形进行的讨论，我们发现一般情形下的讨论可以类似的进行，主要从特征根(复根成共轭对)入手，结合相关的定理(定理 2.1.1、定理 2.1.3)，通过解常系数线性齐次递归方程最终给出一般情形下的结果。

考虑 $A^n=I\ \ (n\geq 4)$，此时若 A 存在一组共轭特征根 $\lambda=\mathrm{e}^{i\theta_{(n)}}$ 和 $\bar{\lambda}=\mathrm{e}^{-i\theta_{(n)}}$，这里 $\theta_{(n)}=\frac{2k\pi}{n},k=1,2,\cdots,n-1$ (若 n 为偶数，则 $k\neq\frac{n}{2}$)，则 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=\left(\lambda-\mathrm{e}^{i\theta_{(n)}}\right)\left(\lambda-\mathrm{e}^{-i\theta_{(n)}}\right)=\lambda^2-2\cos\theta_{(n)}\lambda+1$，$(\lambda I-A)$ 的 2 阶行列式因子就是 A 的特征多项式 $\lambda^2-2\cos\theta_{(n)}\lambda+1$，于是由定理 2.1.1 可以得到 $\lambda I-A$ 相抵于 $\begin{bmatrix}1&0\\0&\lambda^2-2\cos\theta_{(n)}\lambda+1\end{bmatrix}$，$A$ 的不变因子为

$$1,\lambda^2-2\cos\theta_{(n)}\lambda+1.$$

由定理 2.1.3，A 的有理标准型为 $F=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\cos\theta_{(n)}\end{bmatrix}$，即 $A\sim\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\cos\theta_{(n)}\end{bmatrix}$，此时有 $|A|=1$，由前面的讨论我们知道，若能证明 F 满足 $F^n=I$，则可以得到 $A^n=I$。

3.2.2. $F^n=I$ 的证明

证明：由于矩阵 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=\lambda^2-2\cos\theta_{(n)}\lambda+1$，而 $A\sim F=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\cos\theta_{(n)}\end{bmatrix}$，故 $f(F)=F^2-2\cos\theta_{(n)}F+I=0$，即 $F^2=2\cos\theta_{(n)}F-I$，不妨令 $a=2\cos\theta_{(n)}$，则：

$$F=1\cdot F \tag{1}$$

$$F^2=aF-1\cdot I, \tag{2}$$

$$F^3=\left(a^2-1\right)F-aI, \tag{3}$$

$$F^4=\left(a^3-2a\right)F-\left(a^2-1\right)I, \tag{4}$$

$$F^5=\left(a^4-3a^2+1\right)F-\left(a^3-2a\right)I, \tag{5}$$

……

经过观察我们发现，等式(2)中 F 的系数 $a=a\cdot 1-0$，等式(3)中 F 的系数 $a^2-1=a\cdot a-1$，等式(4)中 F 的系数 $a^3-2a=a\left(a^2-1\right)-a$，等式(5)中 F 的系数 $a^4-3a^2+1=a\left(a^3-2a\right)-\left(a^2-1\right)$，我们把每一等式中 F 的系数看成数列 $\{a_t\}$ 中的元素则有：$a_{t+1}=a\cdot a_t-a_{t-1},a_1=1,a_2=a$。这是一个常系数线性齐次递归方程，故根据相应的常系数线性齐次递归关系的求解方法，我们可以解得 a_t，过程如下：

由 $a_{t+1}=a\cdot a_t-a_{t-1}$ 可以得到它的特征方程为

$$x^2-ax+1=0,$$

因为 $a=2\cos\theta_{(n)}$，$a^2=4\cos^2\theta_{(n)}<4$，所以 $\Delta=a^2-4<0$，由常系数线性齐次递归关系可知，特征方程存在 2 个复根 $x_1=\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}i$，$x_2=\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}i$ 则

$$a_t=B_1\rho^t\cos t\beta+B_2\rho^t\sin t\beta\text{，其中 }\rho=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}\right)^2}=1,$$

$$\beta=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}}{\frac{a}{2}}\right)=\tan^{-1}\frac{\sqrt{4-4\cos^2\theta_{(n)}}}{2\cos\theta_{(n)}}=\tan^{-1}\left(\tan\theta_{(n)}\right)=\theta_{(n)},$$

所以 $a_t=B_1\cos t\theta_{(n)}+B_2\sin t\theta_{(n)}$，把 $a_1=1,a_2=a$ 代入 a_t 得：

$$\begin{cases}B_1\cos\theta_{(n)}+B_2\sin\theta_{(n)}=1\\ B_1\cos 2\theta_{(n)}+B_2\sin 2\theta_{(n)}=a\end{cases},$$

解之得：

$$\begin{cases}B_1=0\\ B_2=\dfrac{2}{\sqrt{4-a^2}}=\dfrac{1}{\sin\theta_{(n)}}\end{cases},$$

故 $a_t=\dfrac{\sin t\theta_{(n)}}{\sin\theta_{(n)}}$，（$\theta_{(n)}=\dfrac{2k\pi}{n},k=1,2,\cdots,n-1$ 且若 n 为偶数，则 $k\neq\dfrac{n}{2}$），

从而 $F^n=a_nF-a_{n-1}I=\dfrac{\sin n\theta_{(n)}}{\sin\theta_{(n)}}F-\dfrac{\sin(n-1)\theta_{(n)}}{\sin\theta_{(n)}}I$，即有

$$F^n=\begin{bmatrix}\dfrac{-\sin(n-1)\theta_{(n)}}{\sin\theta_{(n)}} & \dfrac{\sin n\theta_{(n)}}{\sin\theta_{(n)}}\\ \dfrac{-\sin n\theta_{(n)}}{\sin\theta_{(n)}} & \dfrac{2\cos\theta_{(n)}\sin n\theta_{(n)}-\sin(n-1)\theta_{(n)}}{\sin\theta_{(n)}}\end{bmatrix},$$

由和差化积公式得：

$$\sin(n-1)\theta_{(n)}+\sin\theta_{(n)}=2\sin\frac{n}{2}\theta_{(n)}\cos\frac{n-2}{2}\theta_{(n)},$$

又

$$\sin\frac{n}{2}\theta_{(n)}=\sin\left(\frac{n}{2}\cdot\frac{2k\pi}{n}\right)=\sin k\pi=0,$$

所以

$$\sin(n-1)\theta_{(n)}+\sin\theta_{(n)}=2\sin\frac{n}{2}\theta_{(n)}\cos\frac{n-2}{2}\theta_{(n)}=0.$$

即

$$\sin(n-1)\theta_{(n)}=-\sin\theta_{(n)},$$

$$\frac{\sin(n-1)\theta_{(n)}}{-\sin\theta_{(n)}}=1,$$

又

$$\sin n\theta_{(n)}=\sin\left(n\cdot\frac{2k\pi}{n}\right)=\sin 2k\pi=0,$$

所以

$$\frac{\sin n\theta_{(n)}}{\sin\theta_{(n)}}=0,$$

故

$$\frac{2\cos\theta\sin n\theta_{(n)}-\sin(n-1)\theta_{(n)}}{\sin\theta_{(n)}}=-\frac{\sin(n-1)\theta_{(n)}}{\sin\theta_{(n)}}=1,$$

从而 $F^n=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$，证毕。

3.2.3. *SL*(2, *R*)的有限循环子群的结构

由前面的讨论，我们已经找到了满足 $|A|=1$ 且 $A^n=I$ 的所有矩阵，即：$A\sim\begin{bmatrix}0&1\\-1&2\cos\theta_{(n)}\end{bmatrix}$，进一步为

了在这些矩阵中找出符合条件 $A^k \neq I(k<n)$ 的矩阵，我们需要确定符合条件 $F^n = I, F^k \neq I(k<n)$ 的 $\theta_{(n)}$。

例如，当 $n=6$ 时，$\theta_{(6)}$ 的取值为 $\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$，其中 $\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}$，$\cos\frac{\pi}{3}=\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}$，$A\sim\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\cos\theta\end{bmatrix}$，解得 $A\sim F_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ 和 $A\sim F_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，此时这两组解均满足 $|F_i|=1$ 且 $F_i^6=I$，但对 $F_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ 而言，有 $F_1^3=I$，即 $F_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ 为 $n=3$ 时的一个解，重复出现。下面我们找出符合条件 $F^n=I, F^k\neq I(k<n)$ 的所有 $\theta_{(n)}$ （$n\geq 3$），使得最后的结果不会重复，也不会遗漏。

对任意的 $n(n\geq 3)$，$\theta_{(n)}=\frac{2k\pi}{n}, k=1,2,\cdots,n-1$，当 k 取 $1,2,\cdots,n-1$ 中不同的值时，$\cos\theta$ 总会出现一对相同的值(仅有一对)，如 $\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}$，这是因为，若 $\theta_1+\theta_2=2\pi$，则 $\cos\theta_1=\cos\theta_2$。由此我们可以缩小 k 的取值范围。

当 n 为奇数时，$k=1,2,\cdots,n-1$，θ 可取 $n-1$ 个值中，且首尾的值相加恰好等于 2π，故我们只需取前面 $\frac{n-1}{2}$ 个值即可，即 $k=1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}$。由于 n 是奇数，而 $2k$ 是偶数，所以 $\frac{2k}{n}$ 一定是一个最简分数，此时 $\theta=\frac{2k\pi}{n}\leq\frac{2\left(\frac{n-1}{2}\right)\pi}{n}<\pi$，$\cos\theta$ 互不相等。

当 n 为偶数时，$k=1,2,\cdots,\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+1,\cdots,n-1$，与前面的讨论类似，我们可以将 k 的取值范围限定在前面 $\frac{n}{2}-1$ 个值，即 $k=1,2,\cdots,\frac{n}{2}-1$。进一步，由于 $2k$ 是偶数时，而 n 也是偶数(不妨设 $n=2m$)，则有 $\frac{2k}{n}=\frac{k}{m}$，当 k 为奇数时，$\frac{k}{m}$ 是一个最简分数，不会导致解的重复；而当 k 为偶数时，由于 $m<n$，$\frac{k}{m}$ 一定在前面的取值中出现过，从而导致解的重复，此时 k 只取 $1,2,\cdots,\frac{n}{2}-1$ 中奇数的那一部分值。

综上所述，$SL(2,R)$ 的有限 Abelian 子群中所有满足条件 $A^n=I, A^k\neq I(k<n), |A|=1$ 的矩阵如下：

当 $n=1$ 时，则 A 为单位阵；

当 $n=2$ 时，则此时无解；

当 $n=2m-1(m=2,3,\cdots)$ 时，$A\sim\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\cos\theta_{(n)}\end{bmatrix}$，$\left(\theta_{(n)}=\frac{2k\pi}{n}, k=1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}\right)$；

当 $n=2m(m=2,3,\cdots)$ 时，$A\sim\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\cos\theta_{(n)}\end{bmatrix}$，$\left(\theta_{(n)}=\frac{2k\pi}{n}, k\text{取}1,2,\cdots,\frac{n}{2}-1\text{中的奇数}\right)$。

4. 进一步的问题

特殊线性群 $SL(2,R)$ 的 3 阶有限循环子群的生成元是 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$，4 阶有限循环子群的生成元是 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$，5 阶有限循环子群的生成元是 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\cos\frac{2\pi}{5}\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\cos\frac{4\pi}{5}\end{bmatrix}$，……，$n$ 阶有限循环子群的生成元是 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\cos\theta_{(n)}\end{pmatrix}$ （$\theta_{(n)}=\frac{2k\pi}{n}$，$k$ 取 $1,2,\cdots,\frac{n}{2}-1$ 中的奇数)，这些生成元所构成的循环子群能否做成

特殊线性群 $SL(2,R)$ 的子群的直积，目前本人还没有好的方法去解答，值得进一步探讨。

参考文献 (References)

[1] 唐高华. 近世代数[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.
[2] 姚慕生, 吴泉水. 高等代数学[M]. 第 2 版. 上海: 复旦大学出版社, 2008.
[3] 杨振声. 组合数学及其算法[M]. 第 3 版. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2006.
[4] 刘军成. GL(2, Z[i])的有限交换子群[J]. 湖北大学学报(自然科学版), 2010, 32(2): 233-240.