Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2017, 6(8), 1034-1038
Published Online November 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.68124

Hans汉斯

Solving Higher Order Nonlinear Differential Equation with Nonlocal Boundary Value Problem

Yongfang Zhou, Lijun Ma, Xiangmei Zhang, Dayong Jin, Guozhong Su

School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin
Email: zhouyongfang_2005@163.com

Received: Nov. 13th, 2017; accepted: Nov. 23rd, 2017; published: Nov. 29th, 2017

Abstract

This paper discusses the numerical method for the higher order nonlinear differential equation with nonlocal boundary value problem. By constructing the reproducing kernel space which satisfies the nonlocal boundary value conditions, the simple reproducing kernel numerical approximate method is established. Convergence of approximate solution and its derivatives is proved, respectively.

Keywords

Nonlocal Boundary Value Problems, Higher Order Nonlinear Differential Equation, Reproducing Kernel Space

高阶非线性微分方程非局部边值问题的解法

周永芳，马丽君，张相梅，金大永，苏国忠

河北工业大学理学院，天津
Email: zhouyongfang_2005@163.com

收稿日期：2017年11月13日；录用日期：2017年11月23日；发布日期：2017年11月29日

摘　要

本文讨论高阶非线性微分方程非局部边值问题的数值方法。通过建立满足非局部边值条件的再生核空间，获得简单易行的再生核数值解法。证明近似解及其导数的收敛性。

文章引用: 周永芳, 马丽君, 张相梅, 金大永, 苏国忠. 高阶非线性微分方程非局部边值问题的解法[J]. 应用数学进展, 2017, 6(8): 1034-1038. DOI: 10.12677/aam.2017.68124

关键词

非局部边值问题，高阶非线性微分方程，再生核空间

1. 引言

微分方程非局部边值问题广泛的出现在振动问题、生命科学、化学反应扩散、人口动力学等科学和工程领域之中。在文献[1] [2] [3]中，作者讨论了微分方程非局部边值问题解的存在性和唯一性的问题。本文将讨论如下高阶非线性微分方程非局部边值问题

$$\begin{cases} y^{(n)}(x)=F\left(x,y(x),y'(x),\cdots,y^{(n-1)}(x)\right) \\ y^{(i-1)}(x_j)=b_{ij} \\ y(x_{k+1})-y(x_{k+2})=b_n \end{cases}$$

的数值解法，其中 $a<x<b$，$1\le k\le n-1$，$m_1+m_2+\cdots+m_k=n-1$，b_{ij} 是实数，$1\le i\le m_j$，$1\le j\le k$，$a<x_1<x_2<\cdots<x_k<x_{k+1}<x_{k+2}<b$。

将上面方程中的非局部边值条件齐次化，可以将方程转化成如下的形式

$$\begin{cases} y^{(n)}(x)=F\left(x,y(x),y'(x),\cdots,y^{(n-1)}(x)\right) \\ y^{(i-1)}(x_j)=0 \\ y(x_{k+1})-y(x_{k+2})=0 \end{cases} \tag{1}$$

通过建立包含非局部边值条件的再生核空间，在空间中构造方程(1)的近似解，证明近似解一致收敛于方程精确解，近似解的导数一致收敛于方程精确解的导数。

2. 再生核空间

定义 1 $W^n[a,b]=\left\{y(x)\middle|y^{(n-1)}(x)\text{ 是绝对连续实值函数}，\ y^{(n)}(x)\in L^2[a,b]\right\}$。

$W^n[a,b]$ 是再生核空间(证明参见文献[4])，对任意 $y(x),z(x)\in W^n[a,b]$，内积和范数分别为 $\langle y,z\rangle_{W^n[a,b]}=\sum_{i=0}^{n-1}y^{(i)}(a)z^{(i)}(a)+\int_a^b y^{(n)}(x)z^{(n)}(x)\mathrm{d}x$，$\|y\|_{W^n[a,b]}=\sqrt{\langle y,y\rangle_{W^n[a,b]}}$。

定义 2 $W^{n1}[a,b]=\left\{y\middle|y\in W^n[a,b],y^{(i-1)}(x_j)=0,y(x_{k+1})-y(x_{k+2})=0\right\}$。

$W^{n1}[a,b]$ 是 $W^n[a,b]$ 的闭子空间(证明参见文献[4])，$W^{n1}[a,b]$ 是再生核空间。设 $W^{n1}[a,b]$ 的再生核函数为 $K(x,t)$ (具体表达式的确定参见文献[4])。

定义 3 $W[a,b]=\left\{y(x)\middle|y(x)\text{ 是绝对连续实值函数}，\ y'(x)\in L^2[a,b]\right\}$。

$W[a,b]$ 是再生核空间，对任意的 $y(x),z(x)\in W[a,b]$，内积和范数分别为

$$\langle y,z\rangle_{W[a,b]}=y(a)z(b)+\int_a^b y'(x)z'(x)\mathrm{d}x,\ \|y\|_{W[a,b]}=\sqrt{\langle y,y\rangle_{W[a,b]}}.$$

设 $W[a,b]$ 的再生核函数为 $R(x,t)$ (具体表达式的确定参见文献[4])。

3. 近似解的构造

定义线性算子 T： $W^{n1}[a,b]\to W[a,b]$。

对任意 $y(x)\in W^{n1}[a,b]$，令 $Ty(x)=y^{(n)}(x)$，则方程(1)转化成如下形式：

$$Ty(x)=F\left(x,y(x),y'(x),\cdots y^{(n-1)}(x)\right), \tag{2}$$

其中， $y(x)\in W^{n1}[a,b]$，当 $y=y(x)\in W^{n1}[a,b]$ 时， $F\left(x,y(x),y'(x),\cdots,y^{(n-1)}(x)\right)\in W[a,b]$。

引理 1 T： $W^{n1}[a,b]\to W[a,b]$ 是有界线性算子。

设 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 $[a,b]$ 上的稠密子集。

令 $\varphi_i(x)=R(x,x_i)$， $\Psi_i(x)=T^*\varphi_i(x)$，其中， T^* 是 T 的共轭算子。

引理 2 假设 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上稠密，则 $\{\Psi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ 是 $W^{n1}[a,b]$ 上的完全系。

证明 由

$$\begin{aligned}\Psi_i(x)&=\left(T^*\varphi_i\right)(x)=\left\langle\left(T^*\varphi_i\right)(t),K(t,x)\right\rangle_{W^{n1}[a,b]}\\&=\left\langle\varphi_i(t),TK(t,x)\right\rangle_{W^{n1}[a,b]}=TK(t,x)\end{aligned},$$

有 $\Psi_i(x)\in W^{n1}[a,b]$。

令 $\left\langle y(x),\Psi_i(x)\right\rangle_{W^{n1}[a,b]}=0,i=1,2,\cdots$，其中 $y(x)\in W^{n1}[a,b]$，即得

$$\left\langle y(x),T^*\varphi_i(x)\right\rangle_{W^{n1}[a,b]}=\left\langle Ty(x),\varphi_i(x)\right\rangle_{W^{n1}[a,b]}=Ty(x_i)=0,i=1,2,\cdots.$$

由 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上稠密，故 $Ty(x)=0$。由 T^{-1} 的存在性可知 $y(x)\equiv 0$，定理得证。

我们将 $\{\Psi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ Gram-Schmidt 正交化，得到 $W^{n1}[a,b]$ 上的完全正交系 $\{\bar{\Psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$，$\bar{\Psi}_i(x)=\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}\Psi_k(x),i=1,2,\cdots$，其中， β_{ik} 是正交化系数。

定理 1 假设 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上稠密，如果 $y(x)\in W^{n1}[a,b]$ 是方程(2)的解，则

$$y(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}\alpha_k\bar{\Psi}_k(x), \tag{3}$$

其中， $\alpha_k=F\left(x_k,y(x_k),y'(x_k),\cdots,y^{(n-1)}(x_k)\right),k=1,2,\cdots$。

证明 $y(x)\in W^{n1}[a,b]$， $\{\bar{\Psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ 是 $W^{n1}[a,b]$ 上的完全正交系，于是

$$\begin{aligned}y(x)&=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\left\langle y(x),\bar{\Psi}_k(x)\right\rangle_{W^{n1}[a,b]}\bar{\Psi}_k(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}\left\langle y(x),\Psi_k(x)\right\rangle_{W^{n1}[a,b]}\bar{\Psi}_k(x)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}\left\langle y(x),T^*\varphi_k(x)\right\rangle_{W^{n1}[a,b]}\bar{\Psi}_k(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}\left\langle Ty(x),\varphi_k(x)\right\rangle_{W^{n1}[a,b]}\bar{\Psi}_k(x)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}\left\langle Ty(x),R(x,x_k)\right\rangle_{W^{n1}[a,b]}\bar{\Psi}_k(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}Ty(x_k)\bar{\Psi}_k(x)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}F\left(x_k,y(x_k),y'(x_k),\cdots,y^{(n-1)}(x_k)\right)\bar{\Psi}_k(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}\alpha_k\bar{\Psi}_k(x)\end{aligned}.$$

定理 1 给出了方程(2)精确解的表达式。

通过截断式(3)中给定的级数，得到方程(2)的近似解

$$y_n(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}\alpha_k\bar{\Psi}_k(x),\tag{4}$$

显然，$\left\|y(x)-y_n(x)\right\|_{W^{n1}[a,b]}\to 0, n\to\infty$。

定理 2 假设方程(2)的解存在唯一，$y(x)$ 是方程(2)的解，$y_n(x)$ 是方程的近似解由式(4)给出，则

$$\left\|y(x)-y_n(x)\right\|_C\to 0,\left\|y^{(i)}(x)-y_n^{(i)}(x)\right\|_C\to 0, n\to\infty, i=1,2,\cdots,n.$$

证明 注意到 $\left\|y(x)-y_n(x)\right\|_{W^{n1}[a,b]}\to 0, n\to\infty$，于是当 $n\to\infty$ 时，有

$$\begin{aligned}\left|y(x)-y_n(x)\right|&=\left|\left\langle y(x')-y_n(x'),K(x,x')\right\rangle_{W^{n1}[a,b]}\right|\\&\le\left\|y(x')-y_n(x')\right\|_{W^{n1}[a,b]}\left\|K(x,x')\right\|_{W^{n1}[a,b]},\\&\le\tilde{C}_1\left\|y(x')-y_n(x')\right\|_{W^{n1}[a,b]}\to 0\end{aligned}$$

所以 $\left\|y(x)-y_n(x)\right\|_C\to 0, n\to\infty$

$$\begin{aligned}\left|y^{(i)}(x)-y_n^{(i)}(x)\right|&=\left|\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}\left(y(x')-y_n(x')\right)\right|\\&=\left|\left\langle\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}\left(y(x')-y_n(x')\right),K(x,x')\right\rangle_{W^{n1}[a,b]}\right|\\&=\left|\left\langle y(x')-y_n(x'),\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}K(x,x')\right\rangle_{W^{n1}[a,b]}\right|\\&\le\left\|y(x')-y_n(x')\right\|_{W^{n1}[a,b]}\left\|\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}K(x,x')\right\|_{W^{n1}[a,b]}\\&\le\tilde{C}_2\left\|y(x')-y_n(x')\right\|_{W^{n1}[a,b]}\to 0\end{aligned}$$

所以 $\left\|y^{(i)}(x)-y_n^{(i)}(x)\right\|_C\to 0, n\to\infty$，这里 $\tilde{C}_1,\tilde{C}_2$ 是常数，$i=1,2,\cdots,n$。

4. 数值算法

下面将给出方程(2)的近似解 $y_n(x)$ 的求解方法。

令

$$f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\sum_{i=1}^{n}\left[F\left(x_k,y(x_k),y'(x_k),\cdots y^{(n-1)}(x_k)\right)-\alpha_k\right]^2,$$

若可以获得 $\alpha_k\ (k=1,2,\cdots,n)$，使得 $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 取得最小值，则可以由式(4)获得方程(2)的近似解 $y_n(x)$。

下面给出获得 $y_n(x)$ 的数值程序。为了获得 $y_n(x)$，只需要确定 $\alpha_k\ (k=1,2,\cdots,n)$ 即可。

Step1：取初值 $\alpha_{k0}\ (k=1,2,\cdots,n)$；

Step2：计算 $y_{n0}(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}\alpha_{n0}\bar{\Psi}_k(x)$；

Step3：计算 $f\left(\alpha_{10},\alpha_{20},\cdots,\alpha_{n0}\right)$；

Step4：如果 $f\left(\alpha_{10},\alpha_{20},\cdots,\alpha_{n0}\right)<\varepsilon$ （ε 是充分小的正数)，则计算终止；否则，计算

$$\alpha_{k1}=F\left(x_k,y_{n1}\left(x_k\right),y'_{n1}\left(x_k\right),\cdots,y_{n1}^{(n-1)}\left(x_k\right)\right),k=1,2,\cdots,n;$$

Step5：计算 $f\left(\alpha_{11},\alpha_{21},\cdots,\alpha_{n1}\right)$；

Step6：如果 $f\left(\alpha_{11},\alpha_{21},\cdots,\alpha_{n1}\right)<f\left(\alpha_{10},\alpha_{20},\cdots,\alpha_{n0}\right)$，则用 α_{k1} 代替 α_{k0}，计算

$$y_{n1}\left(x\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}\alpha_{n1}\bar{\Psi}_k\left(x\right),$$

否则，放弃 α_{k1}。取 α_{k0} 作为初值， $f\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$ 的最小值点即是新的 α_{k1}，用 α_{k1} 代替 α_{k0} 并且返回到 **Step2**。

类似上面的步骤，寻找 α_k 直到获得 $\alpha_{kp}\left(k=1,2,\cdots,n\right)$，使得 $f\left(\alpha_{1p},\alpha_{2p},\cdots,\alpha_{np}\right)<\varepsilon$，则方程(2)的近似解可以由下式得到

$$y_{np}\left(x\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}\alpha_{np}\bar{\Psi}_k\left(x\right). \tag{5}$$

5. 结论

文中通过构造包含方程非局部边值条件的再生核空间，获得了一类高阶非线性微分方程非局部边值问题的精确解和近似解，证明了方程近似解及其导数的一致收敛性。该方法可以进一步推广到其他非线性微分方程非局部边值问题的求解。

基金项目

河北省自然科学基金(A2015202335)。

参考文献 (References)

[1] Henderson, J. and C.J. Kunkel (2008) Uniqueness of Solutions of Linear Nonlocal Boundary Value Problems. *Applied Mathematics Letters*, **21**, 1053-1056. https://doi.org/10.1016/j.aml.2006.06.024

[2] Henderson, J. (2011) Existence and Uniqueness of Solutions of (k+2)-Point Nonlocal Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **74**, 2576-2584. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.11.048

[3] Henderson, J. and Luca, R. (2012) Existence and Multiplicity for Positive Solutions of a Multi-Point Boundary Value Problem. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 10572-10585. https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.04.019

[4] 周永芳. 若干微分方程非局部边值问题的一种数值方法[D]: [博士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2011: 15-19.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org