

# Multivariate Lagrange Interpolation Defined on Saddle Surface

Nan Zhao, Fu Liu, Lihong Cui

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning  
Email: 17614280640@163.com, 376418602@qq.com, 2458416309@qq.com

Received: Nov. 14<sup>th</sup>, 2017; accepted: Dec. 1<sup>st</sup>, 2017; published: Dec. 8<sup>th</sup>, 2017

---

## Abstract

Based on the results of Lagrange interpolation of binary functions, we study the regularity of Lagrange interpolation nodes of ternary functions and propose the basic concepts of Lagrange interpolation regular nodes defined on saddle. By interpolating some basic theories and topological structures of regular node groups, an additive conic surface method of constructing Lagrange interpolation solvable nodes defined on the saddle surface is obtained. These methods are all constructed in a superposed manner, which creates a very convenient condition for compiling a computer algorithm program, and then automatically completing the construction of an interpolated node group and obtaining the interpolation format on the computer. Finally, an example is given to illustrate the effectiveness of the proposed algorithm.

## Keywords

Saddle Surface, Multivariate Lagrange Interpolation, Regular Set of Nodes, Superposition Interpolation Method

---

# 定义于马鞍面上的多元Lagrange插值

赵楠, 刘孚, 崔利宏

辽宁师范大学, 辽宁 大连  
Email: 17614280640@163.com, 376418602@qq.com, 2458416309@qq.com

收稿日期: 2017年11月14日; 录用日期: 2017年12月1日; 发布日期: 2017年12月8日

---

## 摘要

以二元函数Lagrange插值研究结果为基础, 对三元函数Lagrange插值结点组的正则性问题进行了研究, 提出了定义于马鞍面上的Lagrange插值正则结点组的基本概念, 研究了这类插值正则结点组的某些基本

理论和拓扑结构,得到了构造定义于马鞍面上的Lagrange插值可解结点组的添加圆锥曲面法。这些方法都是以迭加方式构造完成的,因而对于编译计算机算法程序,进而在计算机上自动完成插值可解结点组的构造并得到插值格式创造了十分便利的条件。最后给出了实例验证算法的有效性。

## 关键词

马鞍面,多元Lagrange插值,正则结点组,迭加插值法

Copyright © 2017 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

熟知,多元函数插值长期以来一直是计算数学研究领域的一个主要研究内容(详见文献[1]),有关多元函数插值基本理论和方法研究中一个基本问题是多元插值函数的唯一存在问题,也就是插值的正则性问题。由文献[2]可知,国内外学者对这一问题的研究主要有两个判别,一种是给定插值空间,去构造相应唯一正解结点组;另一种是给定结点组,去构造相应正则插值空间,而且要求空间的次数尽可能低。对于某一类问题,目前有关在整个空间进行插值以及关于定义于空间中一般代数流形插值的研究结果相对完备,而关于有着重要实用价值的具体流形上的插值结果并不多见。梁学章等人[3]讨论了单位球面上的纬线组选取插值正则结点组的方法。Castell 等人[4]利用球面上偶数条纬线上等距结点组构造了球面上的正则结点组。

马鞍面是除球面外的另一类主要的二次代数曲面,其在工程设计中有着重要的作用。例如,在水利工程中,常用马鞍面连接两条形状不同的水渠,保证水流通过时流线是光滑的,水流平稳。农业生产中的灌溉渠道一般是梯形剖面,而闸门则为矩形剖面,为使水流平顺流过,闸门进出口与渠道的连接处,通常制成马鞍面。在浇制钢筋混凝土时,马鞍面薄壳结构在合适边梁尺寸的协同工作下,可以达到较好的支撑性能。因此,对定义于马鞍面上的插值问题研究意义重大。

## 2. 基本定义和基本定理

本文主要研究三维欧式空间  $R^3$  中的马鞍面  $F = \left\{ (x, y, z) \in R^3 \mid \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z = 0 \right\}$  上进行多元 Lagrange 插值问题。

首先引入若干基本概念。

设  $n$  为非负整数,令  $P_n^{(3)}$  表示所有全次数为  $n$  的三元代数多项式构成的集合,即  $\dim P_n^{(3)} = \binom{n+3}{3}$ 。

**定义 1:** ( $P_n^{(3)}$  的插值正则结点组)

设  $m = \binom{n+3}{3}$ , 令  $A = \{Q_i\}_{i=1}^m$  为  $R^3$  中  $m$  个互异点构成的点集,如果对于任意给定的数组

$\{f_i \in R \mid i=1, \dots, m\}$ , 恒存在唯一多项式  $p(x, y, z) \in P_n^{(3)}$ , 使之满足:  $p(Q_i) = f_i, i=1, \dots, m$ , 则称  $A$  为  $P_n^{(3)}$  的一个正则结点组。

**定义 2:** ( $F$  上的插值正则结点组)

设  $F$  为如上所定义的马鞍面,  $P_n^{(3)}(F)$  为  $P_n^{(3)}$  在  $F$  上的限制。  $\dim P_n^{(3)}(F) = \binom{n+3}{3} - \binom{n+3-2}{3}$ ,

$m = \dim P_n^{(3)}(F)$ , 称  $A = \{Q_i\}_{i=1}^m \subset F$  为定义于  $F$  上的一个  $n$  次插值正则结点组, 如果对于任意给定的数组  $\{f_i \in R | i=1, \dots, m\}$ , 恒存在多项式  $p(x, y, z) \in P_n^{(3)}$ , 满足  $p(Q_i) = f_i, i=1, \dots, m$ ,

$$\dim P_n^{(3)}(F) = \binom{n+3}{3} - \binom{n+3-2}{3}.$$

本文所获得的研究结果如下:

**定理 1:** (构造  $P_n^{(3)}$  插值正则结点组的添加马鞍面法)

设  $m$  为如上所定义,  $r = \binom{n+5}{3}$ , 结点组  $A = \{Q_i\}_{i=1}^m \subset F$  关于  $P_n^{(3)}$  的一个正则结点组, 而  $B = \{Q_i\}_{i=m+1}^r$

是定义于  $F$  的一个  $n+2$  次正则结点组, 则  $\{Q_i\}_{i=1}^r = A \cup B$  必定构成  $P_{n+2}^{(3)}$  的正则结点组。

由定理 1 和文献[5]、[6]、[7]中的结果, 我们得到如下推论:

推论 1: (构造  $F$  上插值正则结点组添加圆锥曲线法)

设  $A = \{Q_i\}_{i=1}^{(n+1)^2}$  为  $F$  上的  $n$  次插值正则结点组, 平面  $p(x, y, z) \cap A = \phi$  与  $F$  横截相交于圆周曲线  $C(x, y, z)$ ,  $B$  是定义于  $C$  上的一个  $n+1$  次正则结点组, 则  $A \cup B$  必定构成定义于  $F$  上的一个  $n+1$  次正则结点组。

**定理 2:** (判定定理)

$F$  上的  $m = (n+1)^2$  个互异点  $\{Q_i\}_{i=1}^m$  能够做成定义于  $F$  上的  $n$  次插值正则结点组的充分必要条件是, 若存在  $p(x, y, z) \in P_n^{(3)}$ , 满足  $p(Q_i) = 0, i=1, \dots, m$ , 蕴含如此的  $p(x, y, z)$  在  $F$  恒为零。

### 3. 定理的证明

**定理 1 的证明:**

证明: 设  $Q_i = (x_i, y_i, z_i), i=1, \dots, r$  因为  $B$  为定义于  $F$  上的  $n+2$  次正则结点组, 由定义 2, 对任意给定数组  $\{f_i | i=m+1, \dots, r\}$  恒存在多项式  $p_1(x, y, z) \in P_{n+2}^{(3)}$  使得  $p_1(Q_i) = f_i, i=m+1, \dots, r$ 。

又因为  $A = \{Q_i\}_{i=1}^m \subset F$  关于  $P_n^{(3)}$  的一个正则结点组, 由定义 1 对任意的数组  $\{f_i | i=1, \dots, m\}$  恒存在多项式  $p_2(x, y, z) \in P_n^{(3)}$  使得  $p_2(Q_i) = \frac{f_i - p_1(Q_i)}{\frac{x_i^2}{p} - \frac{y_i^2}{q} - 2z_i}, i=1, \dots, m$ 。

其中  $(x_i, y_i, z_i)$  为  $Q_i, i=1, \dots, m$  的三维坐标, 构造一个多项式

$$p(x, y, z) = p_1(x, y, z) + \left( \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z \right) p_2(x, y, z)$$

显然有  $p(x, y, z) \in P_{n+2}^{(3)}$  且满足  $p(Q_i) = p_1(Q_i) + \left( \frac{x_i^2}{p} - \frac{y_i^2}{q} - 2z_i \right) p_2(Q_i) = f_i, i=1, \dots, r$ 。

则由定义 1 知,  $A \cup B$  为  $P_{n+2}^{(3)}$  的正则结点组。

**定理 2 的证明:**

证明: 充分性设  $p(x, y, z) \in P_n^{(3)}$ , 满足  $p(Q_i) = 0, \forall Q_i \in A \cup B$  由条件可知,  $p(Q_i) = 0, \forall Q_i \in F$ 。对于定义于  $F$  的一个  $n$  次插值正则结点组  $\tilde{A} \subset F$ , 亦有  $p(Q_i) = 0, \forall Q_i \in \tilde{A}$ , 即  $p(Q_i) = 0, \forall Q_i \in \tilde{A} \cup B$ 。又因为  $\tilde{A} \cup B$  为  $P_n^{(3)}$  的插值正则结点组, 故  $p(x, y, z) \equiv 0$ 。

必要性: 令  $r = \binom{n+3}{3}$ , 取  $B = \{Q_i\}_{i=m+1}^r \subset F$  为关于  $P_{n-2}^{(3)}$  的正则结点组, 可以断言:  $\{Q_i\}_{i=1}^r$  构成  $P_n^{(3)}$  的

正则结点组。事实上, 对任给  $\{f_i\}_{i=1}^r$ , 由于  $A = \{Q_i\}_{i=1}^m$  为定义  $F$  上的  $n$  次正则结点组, 故存在多项式  $p_1(x, y, z) \in P_n^{(3)}$  满足  $p_1(Q_i) = f_i, i = 1, \dots, m$ 。

又因为  $B \notin F$  且为关于的  $P_{n-2}^{(3)}$  的正则结点组, 则存在多项式  $p_2(x, y, z) \in P_{n-2}^{(3)}$  满足

$$p_2(Q_i) = \frac{f_i - p_1(Q_i)}{\frac{x_i^2}{p} - \frac{y_i^2}{q} - 2z_i}, i = m+1, \dots, r \tag{2.1}$$

则多项式  $\tilde{p}(x, y, z) = p_1(x, y, z) + \left(\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z\right)p_2(x, y, z)$ 。

满足  $\tilde{p}(Q_i) = f_i, i = 1, \dots, r$ , 由定义知  $\{Q_i\}_{i=1}^r$  是  $P_n^{(3)}$  的正则结点组, 同时, 在上述过程中取  $f_1 = 0, i = 1, \dots, m$ , 则(2.1)式中的  $p_1(x, y, z) \equiv 0$ , 此时  $\tilde{p}(x, y, z) = \left(\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z\right)p_2(x, y, z) \in P_n^{(3)}$ 。

满足定理中的插值条件的多项式, 故由  $P_n^{(3)}$  空间中满足相同插值条件的多项式的唯一存在性有

$$p(x, y, z) = \tilde{p}(x, y, z) = \left(\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z\right)p_2(x, y, z) \in P_n^{(3)}$$

即  $p(x, y, z)$  在  $F$  上恒为零值。

#### 4. 算法

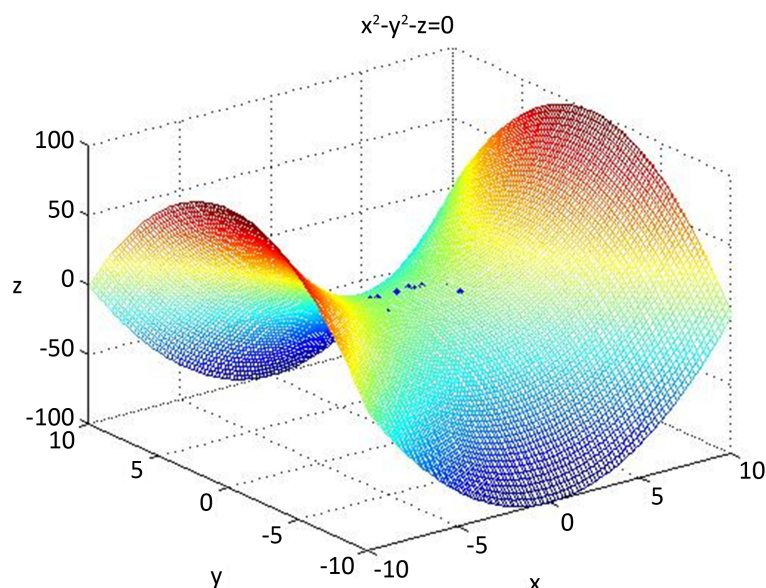
例如: 取被插值函数为  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 马鞍面为  $x^2 - y^2 - z = 0$ 。在马鞍面内部取一点  $Q_0(0,1,1)$ , 则改点为  $P_0^{(3)}$  的一个正则结点组; 另在马鞍面上取互异的 9 个点  $Q_1(1, \sqrt{2}, -1)$ ,  $Q_2(1,1,0)$ ,  $Q_3(-1,1,0)$ ,  $Q_4(\sqrt{2},1,1)$ ,  $Q_5(-\sqrt{2},1,1)$ ,  $Q_6(2,0,2)$ ,  $Q_7(2,-1,3)$ ,  $Q_8(-2,0,2)$ ,  $Q_9(-2,-1,3)$ , 这九点是定义于马鞍面  $F$  上的一个  $0+2$  次正则结点组(如图 1 所示), 则由定理 1 知: 点组  $\{Q_0, \dots, Q_9\}$  构成  $P_2^{(3)}$  适定结点组。设插值多项式为

$$f(x, y, z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10}$$

得到方程组为  $A * X = B$ , 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -1 & 1 & \sqrt{2} & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 9 & -2 & -3 & 6 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & -4 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 9 & 2 & -3 & -6 & -2 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 2 \\ 2 \\ \sqrt{8} \\ \sqrt{14} \\ \sqrt{8} \\ \sqrt{14} \end{bmatrix}$$

解得  $f(x, y, z) = 0.293x^2 - 0.125z^2 - 0.500z + 1$ 。



**Figure 1.** The effect picture of saddle point taking  
**图 1.** 马鞍面取点效果图

我们取点 $(1,1,0)$ ,  $(1,0,1)$ , 插值结果分别为 $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{2}$ , 而精确值分别为 1.293, 0.668, 误差分别为,  
 $t_1 = |\sqrt{2} - 1.293| \approx 0.121$ ,  $t_2 = |\sqrt{2} - 0.668| \approx 0.746$ 。

### 基金项目

辽宁省大学生实践基地建设项目, 辽教[2015]399; 辽宁省教育厅科研项目, L201683661。

### 参考文献 (References)

- [1] De Boor, C. and Ron, A. (1990) On Multivariate Polynomial Interpolation. *Constructive Approximation*, **6**, 287-302. <https://doi.org/10.1007/BF01890412>
- [2] Liang, X.Z., Wang, R.H., Cui, L.H., et al. (2006) Some Researches on Trivariate Lagrange Interpolation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **195**, 192-205. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.03.083>
- [3] 梁学章, 张明, 张慧杰, 等. 关于球面上的 Lagrange 插值[J]. 高等学校计算数学学报, 2011(33): 169-177.
- [4] Castell, W.Z., Fernandez, N.L. and Xu, Y. (2007) Polynomial Interpolation on the Unit Sphere II. *Advances in Computational Mathematics*, **26**, 155-171 <https://doi.org/10.1007/s10444-005-7510-5>
- [5] 梁学章. 关于多元函数的插值与逼近[J]. 高等学校计算数学学报, 1979(1): 123-124.
- [6] 梁学章. 二元插值的适定结点组与迭加插值法[J]. 吉林大学自然科学学报, 1979(1): 27-32.
- [7] 梁学章, 张洁琳, 崔利宏. 多元 Lagrange 插值与 Cayley-Bacharach 定理[J]. 高等数学计算数学学报, 2005(27): 276-281.

**知网检索的两种方式：**

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：[aam@hanspub.org](mailto:aam@hanspub.org)