Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2017, 6(9), 1182-1186**
Published Online December 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.69143

The *k*-Path Vertex Cover in Several Cartesian Product Graphs

Zhao Li, Liancui Zuo*

College of Mathematical Science, Tianjin Normal University, Tianjin
Email: *1047907749@qq.com

Received: Dec. 2nd, 2017; accepted: Dec. 19th, 2017; published: Dec. 26th, 2017

Abstract

For a graph G and a positive integer k, a subset S of vertices of G is called a k-path vertex cover if S intersects all paths of order k in G. The cardinality of a minimum k-path vertex cover is denoted by $\varphi_k(G)$, and is called the k-path vertex cover number of G. In this paper, we study some Cartesian products and give several estimations of $\varphi_k(C_m \square P_n^2)$.

Keywords

***k*-Path Vertex Cover, Cartesian Product Graphs, Estimated Value**

几类笛卡尔乘积图的*k*路顶点覆盖数问题

李　钊，左连翠*

天津师范大学数学科学学院，天津
Email: *1047907749@qq.com

收稿日期：2017年12月2日；录用日期：2017年12月19日；发布日期：2017年12月26日

摘　要

对于任意图G和正整数k，如果图G中所有长度为k的路都至少含有其顶点子集S中的点，那么我们称顶点子集S为k路顶点覆盖集。我们定义最小的集合S的基数为$\varphi_k(G)$，并且称它为图G的k路顶点覆盖数.本文我们主要研究了笛卡尔乘积图的k路顶点覆盖数问题，并给出了$\varphi_k(C_m \square P_n^2)$的估计值。

*通讯作者。

文章引用: 李钊, 左连翠. 几类笛卡尔乘积图的 *k* 路顶点覆盖数问题[J]. 应用数学进展, 2017, 6(9): 1182-1186.
DOI: 10.12677/aam.2017.69143

关键词

k **路顶点覆盖，笛卡尔乘积图，估计值**

1. 引言

本文中我们研究的都是有限的、无向的、无环和无重边的图。我们用符号$V(G)$和$E(G)$去分别定义图G的顶点集和边集。对于任意的整数$a<b$，我们用$[a,b]$去定义整数集$\{a,a+1,\cdots,b\}$。k路顶点覆盖问题就是去找到最小的顶点集S使得图G中每个长度为k的路都至少包含S中的一个顶点[1]。我们定义最小的集合S的基数为$\varphi_k(G)$，也被称为图G的k路顶点覆盖数。特别地，我们用长度来表示边数，用次序来表示顶点数。

k路顶点覆盖问题的概念是首次由Novotný (2010)和Brešar *et al*. (2011)在研究无线电安全网络的连通问题上被引入的[2] [3]。涂建华在2011年的交通安全控制问题中也提及到k路顶点覆盖问题的概念[4] [5]。无线电传感网络的发展起源于军事应用并简记为WSNs。无论如何，WSNs现在多用于一些民用的设施，如环境的监控，家庭自动化装置和交通控制。无线电安全网络系统可以用图论的语言来表示其拓扑结构[6]，我们用顶点代表传感装置，用边来描述每对传感装置间传递的信号。我们关注k概括保护方案，它保证每两个无线设备间传输的数据的完整性。我们的方案假设在连通的网络中次序为k的传送路中至少有一个装置被保护[7]。本文我们主要研究几类关于圈和路的笛卡尔乘积图的最小的k路顶点覆盖数。

我们首先介绍几个数学符号及定义。对于实数x，我们用$\lfloor x\rfloor$表示不超过x的最大整数，我们用$\lceil x\rceil$表示大于x的最小整数。图$G=(V(G),E(G))$和$H=(V(H),E(H))$的笛卡尔乘积图$G\square H$具有顶点集$V(G)\times V(H)$，并且当$u_1=u_2$和$v_1v_2\in E(G)$或者$u_1u_2\in E(G)$和$v_1=v_2$时，顶点(u_1,v_1)和(u_2,v_2)间有连边。

最后本文内容安排为：第1节为引言；第2节为相关的引理；第3节介绍了P_m和C_n的笛卡尔乘积图的最小的k路顶点覆盖数的上界；第4节给出C_m和P_n^2的笛卡尔乘积图的最小的k路顶点覆盖数的下界和推论。

2. 相关的引理

引理 2.1 [2]：对于正整数$k\ge 2$，$n\ge k$，我们有

$$\varphi_k(P_n)=\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor,$$

$$\varphi_k(C_n)=\left\lceil\frac{n}{k}\right\rceil,$$

$$\varphi_k(K_n)=n-k+1.$$

引理 2.2：根据k路顶点覆盖的定义很显然有如下两个结论：

对于$2\le k\le|V(G)|$的简单无向图G而言，$\varphi_k(G)\le\varphi_{k-1}(G)$。

如果G'是图G的一个子图并且$k\ge 2$，那么$\varphi_k(G)\ge\varphi_k(G')$。

证明：(1) 假设S是G的一个最小的k路顶点覆盖集，S'是G的一个最小的k路顶点覆盖集，显然我们有$|S'|\le|S|$，于是$\varphi_k(G)\le\varphi_{k-1}(G)$。

(2) 假设S是G的一个k路顶点覆盖集，G'是图G的一个子图，那么$S\cap V(G)$是图G'的一个k路顶

点覆盖集，由于$\left|S\cap V\left(G'\right)\right|\le\left|S\right|$，于是$\varphi_k\left(G'\right)\le\varphi_k\left(G\right)$。

引理 2.3：对于正整数$k\ge 2$，$n\ge k$，我们有$\varphi_k\left(P_n^2\right)=2\left\lfloor\frac{n}{k+1}\right\rfloor$。

3. P_m 和 C_n 的笛卡尔乘积图的最小的 k 路顶点覆盖数的上界

在介绍定理 3.1 之前我们首先给出一个符号D_i的概念[8]，其中i为大于等于 3 的整数，a是D_i中小于等于$\sqrt{i}$的最大元素，b是D_i中大于等于$\sqrt{i}$的最小元素，这样我们称这组数对(a,b)为中间D_i对，很显然$a\cdot b=i$并且使$a+b$的和尽可能的小。

定理 3.1：如果$k\ge 4$，并且(a,b)为中间D_i对，我们有如下的式子

$$\varphi_k\left(P_m\square C_n\right)\le\min\left\{m\left\lceil\frac{n}{a+1}\right\rceil+n\left\lfloor\frac{m}{b+1}\right\rfloor-2\left\lceil\frac{n}{a+1}\right\rceil\left\lfloor\frac{m}{b+1}\right\rfloor,m\left\lceil\frac{n}{b+1}\right\rceil+n\left\lfloor\frac{m}{a+1}\right\rfloor-2\left\lceil\frac{n}{b+1}\right\rceil\left\lfloor\frac{m}{a+1}\right\rfloor\right\}$$

证明：首先我们构造一个最多有$m\left\lceil\frac{n}{a+1}\right\rceil+n\left\lfloor\frac{m}{b+1}\right\rfloor-2\left\lceil\frac{n}{a+1}\right\rceil\left\lfloor\frac{m}{b+1}\right\rfloor$顶点的$k$路顶点覆盖集去证明不等式的上界。让

$$S_1=\left\{\left(u_i,v_j\right)\in P_m\square C_n\,\middle|\,i\in[1,m],j\equiv 0\left(\bmod\left(a+1\right)\right)\right\}\cup\left\{\left(u_i,v_n\right)\in P_m\square C_n\,\middle|\,\text{对于固定系数}n\right\}$$

并且

$$S_2=\left\{\left(u_i,v_j\right)\in P_m\square C_n\,\middle|\,j\in[1,m],i\equiv 0\left(\bmod\left(b+1\right)\right)\right\}.$$

由于$P_m\square C_n$中未被覆盖的最大连通子图同构于$P_a\square P_b$，于是我们可以很容易得出$S=\left(S_1\cup S_2\right)\setminus\left(S_1\cap S_2\right)$是一个$k$路顶点覆盖集。

在${}^{u_i}C_n$中我们覆盖了每一个第$a+1$个顶点和第n个顶点，由于有m层，所以$\left|S_1\right|=m\left\lceil\frac{n}{a+1}\right\rceil$。同理，我们有$\left|S_2\right|=n\left\lfloor\frac{m}{b+1}\right\rfloor$，由于我们把每个交叉的位置处的顶点算了两次，而且$\left|S_1\cap S_2\right|=\left\lceil\frac{n}{a+1}\right\rceil\left\lfloor\frac{m}{b+1}\right\rfloor$，所以覆盖集$S$的大小为

$$\left|S\right|=m\left\lceil\frac{n}{a+1}\right\rceil+n\left\lfloor\frac{m}{b+1}\right\rfloor-2\left\lceil\frac{n}{a+1}\right\rceil\left\lfloor\frac{m}{b+1}\right\rfloor.$$

同样的，我们也可以通过交换a和b的位置去构造一个有$m\left\lceil\frac{n}{b+1}\right\rceil+n\left\lfloor\frac{m}{a+1}\right\rfloor-2\left\lceil\frac{n}{b+1}\right\rceil\left\lfloor\frac{m}{a+1}\right\rfloor$个顶点的$k$路顶点覆盖集。这样我们就得到了$\varphi_k\left(P_m\square C_n\right)$的上界。

4. C_m 和 P_n^2 的笛卡尔乘积图的最小的 k 路顶点覆盖数的下界

定理 4.1：对于正整数$k\ge 2,n\ge 4$，我们有如下结论：

$$\varphi_k\left(C_m\square P_n^2\right)\ge\begin{cases}4\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n}{k+1}\right\rfloor+\left\lceil\frac{(m-1)\left(n-\left\lfloor\frac{n}{k+1}\right\rfloor\right)}{k}\right\rceil+2\left\lfloor\frac{n}{k+1}\right\rfloor,\text{如果}m\text{为奇数}\\4\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n}{k+1}\right\rfloor+\left\lceil\frac{(m-1)\left(n-\left\lfloor\frac{n}{k+1}\right\rfloor\right)}{k}\right\rceil,\text{如果}m\text{为偶数}\end{cases}$$

证明：首先在解决不等式下界的时候，我们先给出 $\varphi_k\left(P_2\square P_{k+1}^2\right)$ 的精确值。很容易可以得出 $\varphi_2\left(P_2\square P_3^2\right)=5$，但是在本定理中我们考虑 $k\geq 3$。

如果正整数 $k\geq 3$，我们有 $\varphi_k\left(P_2\square P_{k+1}^2\right)=4$。我们构造一个有 4 个顶点 k 路顶点覆盖集 S，去证明 $\varphi_k\left(P_2\square P_{k+1}^2\right)\leq 4$。让 $S=\left\{(u_1,v_t),(u_1,v_{t+1}),(u_2,v_t),(u_2,v_{t+1})\right\}$，其中 $t=\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil$。如果我们删去 S 中的点 (u_i,v_j) 并且删去它的关联边，于是我们得到了 $P_2\square P_{k+1}^2$ 中最大的未被覆盖的子图 $P_2\square P_{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}^2$ 并且 $V\left(P_2\square P_{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}^2\right)=2\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor\leq k-1$。于是 S 是 $P_2\square P_{k+1}^2$ 的 k 路顶点覆盖集，因此 $\varphi_k\left(P_2\square P_{k+1}^2\right)\leq 4$。

很显然 $C_{2k+2}\subseteq P_2\square P_{k+1}^2$，由引理我们得到 $\varphi_k\left(P_2\square P_{k+1}^2\right)\leq\varphi_k\left(C_{2k+2}\right)=3$。通过 $P_2\square P_{k+1}^2$ 的结构我们知道，我们至少需要一个顶点去覆盖每一个 P_2 层中的 $k+1$ 路，无论这两层的顶点是否相连我们都定义它们为 $(u_i,v_j),(u_p,v_q)$，我们可以知道 $C_{2k}\subseteq P_2\square P_{k+1}^2\setminus\left\{(u_i,v_j),(u_p,v_q)\right\}$，因此 $\varphi_k\left(P_2\square P_{k+1}^2\right)\geq 2+\varphi_k\left(C_{2k}\right)=4$。这样我们的等式 $\varphi_k\left(P_2\square P_{k+1}^2\right)=4$ 得到了证明。

下面我们基于上述面我们证明过的等式给出 $\varphi_k\left(C_m\square P_n^2\right)$ 的下界，我们可以把 $C_m\square P_n^2$ 分解成 $\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n}{k+1}\right\rfloor$ 个同构于 $P_2\square P_{k+1}^2$ 的不交子图，一个圈 C_y (如图 1 所示)，其中 $y=(m-1)\left(n-\left\lfloor\frac{n}{k+1}\right\rfloor\right)$ 和一个对于奇数来说的 P_n^2。我们需要至少 $\varphi_k\left(P_2\square P_{k+1}^2\right)$ 个顶点去覆盖每一个同构于 $P_2\square P_{k+1}^2$ 的子图，需要至少 $\varphi_k\left(C_Y\right)$ 和 $\varphi_k\left(P_n^2\right)$ 个顶点去分别覆盖子图 C_y 和 P_n^2。因此对于奇数 m 言，

$$\varphi_k\left(C_m\square P_n^2\right)\geq 4\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n}{k+1}\right\rfloor+\left\lceil\frac{(m-1)\left(n-\left\lfloor\frac{n}{k+1}\right\rfloor\right)}{k}\right\rceil+2\left\lfloor\frac{n}{k+1}\right\rfloor.$$

对于偶数 m 而言，我们把 $C_m\square P_n^2$ 分解成 x 个同构于 $P_2\square P_{k+1}^2$ 的不交子图和一个次序为 y 的圈 C_y，其中 $x=\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n}{k+1}\right\rfloor$，$y=(m-1)\left(n-\left\lfloor\frac{n}{k+1}\right\rfloor\right)$。我们需要至少 $\varphi_k\left(P_2\square P_{k+1}^2\right)$ 个顶点去覆盖每一个同构于 $P_2\square P_{k+1}^2$ 的子图，需要至少 $\varphi_k\left(C_Y\right)$ 个顶点去覆盖子图 C_y。因此有

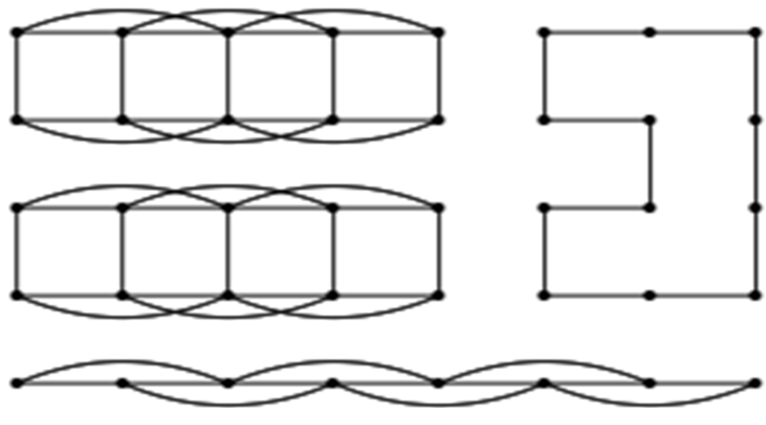

Figure 1. A partition of $C_m\square P_n^2$ for odd m

图 1. 当 m 为奇数时，$C_m\square P_n^2$ 的一个分解

$$\varphi_k\left(C_m \square P_n^2\right) \geq 4\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n}{k+1}\right\rfloor+\left\lceil\frac{(m-1)\left(n-\left\lfloor\frac{n}{k+1}\right\rfloor\right)}{k}\right\rceil .$$

$$\varphi_k\left(C_m \square P_n^2\right) \geq 4\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n}{k+1}\right\rfloor+\left\lceil\frac{\left(mn-(m-1)\left\lfloor\frac{n}{k+1}\right\rfloor\right)}{k}\right\rceil .$$

证明：根据定理 4.1 的证明过程，我们可以把 $C_m \square P_n^2$ 分解成 x 个同构于 $P_2 \square P_{k+1}^2$ 的不交子图和一个次序为 y 的圈 C_y，其中 $x=\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n}{k+1}\right\rfloor$，$y=mn-(m-1)\left\lfloor\frac{n}{k+1}\right\rfloor$。我们需要至少 $\varphi_k\left(P_2 \square P_{k+1}^2\right)$ 个顶点去覆盖每一个同构于 $P_2 \square P_{k+1}^2$ 的子图，需要至少 $\phi_k\left(C_Y\right)$ 个顶点去覆盖子图 C_y。因此有

$$\begin{aligned}
\varphi_k\left(C_m \square P_n^2\right) &\geq x\varphi_k\left(P_2 \square P_{k+1}^2\right)+y\varphi_k\left(C_y\right)=4x+\left\lceil\frac{y}{k}\right\rceil \\
&=4\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n}{k+1}\right\rfloor+\left\lceil\frac{\left(mn-(m-1)\left\lfloor\frac{n}{k+1}\right\rfloor\right)}{k}\right\rceil .
\end{aligned}$$

参考文献 (References)

[1] Xiao, M.Y. and Kou, S.W. (2017) Exact Algorithms for the Maximum Dissociation Set and Minimum 3-Path Vertex Cover problems. *Theoretical Computer Science*, **657**, 86-97. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2016.04.043

[2] Brešar, B., Kardoš, F., Katrenič, J. and Semanišin, G. (2011) Minimum k-Path Vertex Cover. *Discrete Applied Mathematics*, **159**, 1189-1195. https://doi.org/10.1016/j.dam.2011.04.008

[3] Novotný, M. (2010) Design and Analysis of a Generalized Canvas Protocol, Information Security Theory and Practices. Security and Privacy of Pervasive Systems and Smart Devices, 6033, Springer, 106-121.

[4] Tu, J. (2015) A Fixed-Parameter Algorithm for the Vertex Cover Problem. *Information Processing Letters*, **115**, 96-99. https://doi.org/10.1016/j.ipl.2014.06.018

[5] Tu, J.H. and Zhou, W.L. (2011) A Primal-Dual Approximation Algorithm for the Vertex Cover P_3 Problem. *Theoretical Computer Science*, **412**, 7044-7048. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2011.09.013

[6] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) Graph Theory with Application. M. The Macmillan Press Ltd. https://doi.org/10.1007/978-1-349-03521-2

[7] Novotny, M. (2010) Design and Analysis of a Generalized Canvas Protocol. In: *Proceedings of WISTP* 2010, *LNCS*, Vol. 6033, Springer-Verlag, 106-121. https://doi.org/10.1007/978-3-642-12368-9_8

[8] Kardoš, F., Katrenič, J. and Schiermeyer, I. (2011) On Computing the Minimum 3-Path Vertex Cover and Dissociation Number of Graphs. *Theoretical Computer Science*, **412**, 7009-7017. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2011.09.009

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧"国际文献总库"进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org