Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2017, 6(9), 1115-1118
Published Online December 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.69135

Existence of Special Solutions to Boltzmann Equations, When the Collision Kernel Is Zero

Fei Zhang

Department of Mathematics and Computer Science, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan
Email: 2015282146@qq.com

Received: Nov. 26th, 2017; accepted: Dec. 14th, 2017; published: Dec. 21st, 2017

Abstract

In this paper, we will give a rigorous proof of existence and uniqueness of special solutions to Boltzmann equations, when the collision kernel is zero.

Keywords

Boltzmann Equations, Existence of solution, Collision Kernel

当碰撞核为零时Bolzmann方程特殊解的存在性

张　飞

云南民族大学数学与计算机科学学院，云南　昆明
Email: 2015282146@qq.com

收稿日期：2017年11月26日；录用日期：2017年12月14日；发布日期：2017年12月21日

摘　要

本文构造了玻尔兹曼方程的两个特殊解，并证明了该解的存在唯一性。

关键词

Boltzmann方程，解的存在性，碰撞核

文章引用: 张飞. 当碰撞核为零时 Bolzmann 方程特殊解的存在性[J]. 应用数学进展, 2017, 6(9): 1115-1118.
DOI: 10.12677/aam.2017.69135

1. 引言

路德维希·玻尔兹曼(Ludwig Boltzmann，1844 年 2 月 20 日~1906 年 9 月 5 日)，奥地利物理学家，热力学和统计力学的奠基人之一。

玻尔兹曼 1844 年出生于奥地利的维也纳，1866 年获得维也纳大学博士学位。

玻尔兹曼的贡献主要在热力学和统计物理方面。1869 年，他将麦克斯韦速度分布律推广到保守力场作用下的情况，得到了玻尔兹曼分布律。1872 年，玻尔兹曼建立了玻尔兹曼方程(又称输运方程)，用来描述气体从非平衡态到平衡态过渡的过程。

Boltzmann equation 又称为玻尔兹曼输运方程，它就是分布函数法中所采用的一种方程，即是非平衡分布函数 $F(x,t,v)$ 所满足的一个方程，求解此方程可得到不同条件下的 $F(x,t,v)$，然后即可求出电子的各种输运参量。玻尔兹曼方程是经典粒子牛顿力学运动模型和能态跃迁的量子力学模型相糅合的产物。如果忽略所有的相干效应，经过一定的简化，可以从量子输运模型中推导出玻尔兹曼方程。

玻尔兹曼输运方程中考虑到了载流子的速度分布和散射的方向性，因此较为精确。

在有电场或温度梯度等外场的情况下，根据分布函数因电场、磁场、温度梯度等外场而引起的漂移变化以及因散射而引起的变化，即可建立起 Boltzmann 方程，由于其中的散射项应是一个对散射几率的积分，所以 Boltzmann 方程是一个微分－积分方程。该方程的求解很复杂，通常采用近似方法，常用的一种近似方法就是弛豫时间近似[1]。

玻尔兹曼方程是一个高维的方程，三维波矢空间(v)，三维实空间(x)，再加上一维时间(t)，难于求解，常用蒙特卡罗方法来模拟。本文讨论当碰撞核为零时玻尔兹曼方程的特殊解构造。

2. 准备知识

在碰撞核理论中，气体分子是由概率分布函数 $F \equiv F(t,x,v) \ge 0$，测量气体分子在时间 $t \in R_+$，空间为 $x \in R^3$ 和瞬时速度 $v \in R^3$。这种函数，通常称为分布函数或者密度函数。下面为方便讨论们讨论方便，我们定义玻尔兹曼方程：

$$\partial_t F + v \cdot \nabla_x = B(F,F) \tag{1.1}$$

这里 $B(F,F)$ 是玻尔兹曼碰撞积。这种碰撞积只有在辐角为的 w 密度函数下，并由下式给出：

$$B(F,F)(x,t,v) = \iint_{R^3 \times S^2} (F'F_1' - FF_1) b(v - v_1, w) \left|\cos(v - v_1, w)\right| \mathrm{d}w\mathrm{d}v_1 \tag{1.2}$$

F_1, F' 和 F_1' 分别由指定的 $F(x,t,v_1), F(x,t,v')$ 和 $F(t,x,v_1')$，在 v_1, v' 和 v_1' 下给出，且 $v_1 \in R^3, w \in S^2$

$$v' = v - (v - v_1) \cdot ww,\ v_1' = v_1 + (v - v_1) \cdot ww. \tag{1.3}$$

$$v' + v_1' = v + v_1,\ |v'|^2 + |v_1'|^2 = |v|^2 + |v_1|^2 \tag{1.4}$$

关系(1.4)是每一个气体分子之间碰撞的动量守恒和动能守恒定律[2]。

3. 构造 Boltzmann 方程的两个特殊解

问题一：若 $F = \exp\left(-|v'|^2\right)$ 时，$F = \exp\left(-|v'|^2\right)$ 总是方程(1.1) (1.2)的一个解。

证明：首先检验 $F=\exp\left(-|v'|^2\right)$ 是方程(1.1) (1.2)的一个解。

由(1.4)碰撞前后的速度关系，可以得到如下关系式

$$F'F_1'=\exp\left(-|v'|^2+|v_1|^2\right)-\exp\left(-|v|^2+|v_1|^2\right)=0 \tag{1.5}$$

所以 $B(F,F)=0$ 恒成立

$F=\exp\left(-|v'|^2\right)$ 是方程(1.1)(1.2)的一个解。

然后我们再证明，当 $\left[-\left(|v'-Ax-ct|^2+|v_1'-Ax-ct|^2\right)\right]-\exp\left[-\left(|v-Ax-ct|^2+|v_1-Ax-ct|^2\right)\right]$

也是方程(1.1)(1.2)的一个解，且能化成上述形式。

其中， $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

从而 $F=\exp\left(-|v-Ax-ct|^2\right)=\exp\beta$

取 $\beta=\left(\tilde{v}_1-\sum_{i=1}^{3}a_{1i}x_i+c_1t\right)^2+\left(\tilde{v}_2-\sum_{i=1}^{3}a_{2i}x_i+c_2t\right)^2+\left(\tilde{v}_3-\sum_{i=1}^{3}a_{3i}x_i+c_3t\right)^2$

$$\partial_t F=\exp\beta\cdot\partial_t\beta$$

下面计算，

$$=\sum_{i=1}^{3}a_{1i}\left(\tilde{v}_1-\sum_{i=1}^{3}a_{1i}x_i+c_1t\right)\tilde{v}_1-\sum_{i=1}^{3}a_{2i}\left(\tilde{v}_2-\sum_{i=1}^{3}a_{2i}x_i+c_2t\right)\tilde{v}_2-\sum_{i=1}^{3}a_{3i}\left(\tilde{v}_3-\sum_{i=1}^{3}a_{3i}x_i+c_3t\right)\tilde{v}_3$$

$$v\cdot\nabla_x F=\begin{pmatrix}\tilde{v}_1\\ \tilde{v}_2\\ \tilde{v}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2\sum_{i=1}^{3}a_{1i}x_i\left(\tilde{v}_1-\sum_{i=1}^{3}a_{1i}x_i+c_1t\right) \\ -2\sum_{i=1}^{3}a_{2i}x_i\left(\tilde{v}_2-\sum_{i=1}^{3}a_{2i}x_i+c_2t\right) \\ -2\sum_{i=1}^{3}a_{3i}x_i\left(\tilde{v}_3-\sum_{i=1}^{3}a_{3i}x_i+c_3t\right) \end{pmatrix}$$

$$=-2\sum_{i=1}^{3}a_{1i}x_i\left(\tilde{v}_1-\sum_{i=1}^{3}a_{1i}x_i+c_1t\right)\tilde{v}_1-2\sum_{i=1}^{3}a_{2i}x_{i2}\left(\tilde{v}_2-\sum_{i=1}^{3}a_{2i}x_i+c_2t\right)\tilde{v}_2$$
$$-2\sum_{i=1}^{3}a_{3i}x_i\left(\tilde{v}_3-\sum_{i=1}^{3}a_{3i}x_i+c_3t\right)\tilde{v}_3$$

下面考察 $B(F,F)$ 这一项，有 $B(F,F)=0$

$$F'F_1'-FF_1=\exp\left[-\left(|v'-Ax-ct|^2+|v_1'-Ax-ct|^2\right)\right]-\exp\left[-\left(|v-Ax-ct|^2+|v_1-Ax-ct|^2\right)\right]=0$$

记得我们曾经学习过这样一条性质[3]：

设 $a^2+b^2=c^2+d^2$，如果 $a+b=c+d$，则有 $(a+m)^2+(b+n)^2=(c+m)^2+(d+n)^2$

又由(1.4) $v'+v_1'=v+v_1, |v'|^2+|v_1'|^2=|v|^2+|v_1|^2$

由上述性质可 $F'F_1'-FF_1=\exp\left[-\left(|v'-Ax-ct|^2+|v_1'-Ax-ct|^2\right)\right]-\exp\left[-\left(|v-Ax-ct|^2+|v_1-Ax-ct|^2\right)\right]=0$

$$B(F,F)(x,t,v)=\iint_{R^3\times S^2}\left(F'F_1'-FF_1\right)b(v-v_1,w)\left|\cos(v-v_1,w)\right|\mathrm{d}w\mathrm{d}v_1=0$$

$$\exp\beta\cdot\left[c_1\left(\tilde{v}_1-\sum_{i=1}^{3}a_{1i}x_i+c_1t\right)+c_2\left(\tilde{v}_2-\sum_{i=1}^{3}a_{2i}x_i+c_2t\right)+c_3\left(\tilde{v}_3-\sum_{i=1}^{3}a_{3i}x_i+c_3t\right)\right]$$

$$\sum_{i=1}^{3} c_i v - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_j a_{ji} x_i + \sum_{i=1}^{3} c_i^2 t = 0$$

其中 $\beta = \left(\tilde{v}_1 - \sum_{i=1}^{3} a_{1i}x_i + c_1 t\right)^2 + \left(\tilde{v}_2 - \sum_{i=1}^{3} a_{2i}x_i + c_2 t\right)^2 + \left(\tilde{v}_3 - \sum_{i=1}^{3} a_{3i}x_i + c_3 t\right)^2$

于是令 $c_1\left(\tilde{v}_1 - \sum_{i=1}^{3} a_{1i}x_i + c_1 t\right) + c_2\left(\tilde{v}_2 - \sum_{i=1}^{3} a_{2i}x_i + c_2 t\right) + c_3\left(\tilde{v}_3 - \sum_{i=1}^{3} a_{3i}x_i + c_3 t\right) = 0$

而且 $\sum_{i=1}^{3} a_{1i}\left(\tilde{v}_1 - \sum_{i=1}^{3} a_{1i}x_i + c_1 t\right)\tilde{v}_1 - \sum_{i=1}^{3} a_{2i}\left(\tilde{v}_2 - \sum_{i=1}^{3} a_{2i}x_i + c_2 t\right)\tilde{v}_2 - \sum_{i=1}^{3} a_{3i}\left(\tilde{v}_3 - \sum_{i=1}^{3} a_{3i}x_i + c_3 t\right)\tilde{v}_3 = 0$

通过整理得 $\sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3}\right) c_i v - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_j a_{ji} x_i + \sum_{i=1}^{3} c_i^2 t = 0$

而且 $\sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} a_{jk}\right)\left(\tilde{v}_k^2 - \sum_{i=1}^{3} a_{ki} x_i \tilde{v}_k + c_3 \tilde{v}_k t\right) = 0$

所以 $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是形如 $F = \exp\left(-|v - Ax - ct|^2\right)$ 的解只有 $F = \exp\left(-|v|^2\right)$ 这一解。

问题二：当 $F = \exp\left(-|ax - (at+b)v - c|^2\right) = \exp(-\beta)$ 也是方程(1.1) (1.2)的一个解

其中 $v = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, a \in R$

可计算 $\beta = \sum_{i=1}^{3}\left[ax_i - (at+b)v_i - c_i\right]^2$

$$F_t = 2a\sum_{i=1}^{3} \tilde{v}_i\left[ax_i - (at+b)v_i - c_i\right]$$

$$v \cdot \nabla_x F = -2a\sum_{i=1}^{3} \tilde{v}_i\left[ax_i - (at+b)v_i - c_i\right]$$

再由上述性质可知： $F'F_1' - FF_1 = 0$

$$F_t + v \cdot \nabla_x F = 0$$

$F = \exp\left(-|ax - (at+b)v - c|^2\right)$ 是玻尔兹曼方程(1.1) (1.2)的一个解。

参考文献 (References)

[1] 四川师大物理系，编. 统计物理学进展[M]. 1989.

[2] Boardos, C., Golse, F. and Levermore, C.D. (1993) Fluid Dynamic Limits of Kinetic Equations II: Convergence Proofs for Boltzmann Equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **46**, 667-753.

[3] 张恭庆，林源渠. 泛函分析讲义(上册) [M]. 北京：北京大学出版社, 2006.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org