Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2018, 7(1), 47-55
Published Online January 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.71007

Square Processes of Stable Processes

Xuan Ma, Jinying Tong

Department of Applied Mathematics, Donghua University, Shanghai
Email: mxuuma@163.com, jytong@dhu.edu.cn

Received: Dec. 19th, 2017; accepted: Jan. 17th, 2018; published: Jan. 24th, 2018

Abstract

This paper studies on the properties of square processes of stable processes. Based on the properties of the classical symmetric stable processes, we prove that the square process of stable process is also a stable process and we calculate the tail distribution of it; furthermore, we prove that the quadratic variation of it tends to be a nonnegative stable process. Finally, we briefly introduce the methods to estimate the parameters in the square processes of stable processes.

Keywords

Stable Processes, Tail Distribution, Quadratic Variation, Parameter Estimation

稳定过程的平方过程

马　璇，童金英

东华大学数学系，上海
Email: mxuuma@163.com, jytong@dhu.edu.cn

收稿日期：2017年12月19日；录用日期：2018年1月17日；发布日期：2018年1月24日

摘　要

本文研究了稳定过程的平方过程的性质。基于标准对称稳定过程的性质，我们证明了稳定过程的平方过程也是一个稳定过程，并计算了稳定过程平方的尾分布；其次，我们证明了稳定过程平方的二次变差是一个非负的稳定过程；最后，我们简单介绍了对参数α进行估计的方法。

关键词

稳定过程，尾分布，二次变差，参数估计

文章引用: 马璇, 童金英. 稳定过程的平方过程[J]. 应用数学进展, 2018, 7(1): 47-55.
DOI: 10.12677/aam.2018.71007

1. 引言

稳定过程的相关论题是一个非常重要的学术问题。近年来，稳定过程受到国际各界的极大关注，众多学者对它进行了广泛深入的研究，在语音信号处理，雷达，生物医学信号处理及其他许多领域，稳定过程都得到了广泛的发展[1]。我们知道，如果一个随机过程是一个稳定过程，那么它的随机变量服从稳定分布[2]。因此，学者们一般基于对稳定过程分布的研究来研究稳定过程。

近年来，稳定分布的研究得到了多方面多角度的迅速发展，在多个领域都有广泛应用。众所周知，由于一些复杂的原因，除了高斯分布(其中参数 $\alpha=2$)，柯西分布(其中 $\alpha=1$，$\beta=0$)等少数几种情况外，其他一般的稳定分布均没有关于概率密度函数和分布函数的显式表达式。但如今，通过研究学者的不断探索，我们已有数值计算方法来计算分布函数(如快速傅里叶变换法(FFT) [3]，直接数值积分法[4] [5])，进而能比较准确和快速的得到密度函数。而对于稳定过程平方的研究目前还比较少，仍在继续挖掘和深入探讨中。因此，本文的研究内容将围绕稳定过程的平方展开。

本文主要分为四个部分：第一部分主要介绍文中需用到的一些相关知识；第二部分主要阐述稳定过程的平方服从的分布，并基于稳定过程的尾分布来推出稳定过程平方的尾分布；第三部分我们对稳定过程平方的二次变差进行计算；第四部分我们给出稳定过程平方的概率密度函数，并简单介绍了对参数 α 进行估计的方法。

2. 预备知识

首先给出几个定义和引理。

定义 1：(布朗运动) (见[6], p. 42)随机过程如果满足：

1) $W_0=0$，
2) $\{W_t, t\ge 0\}$ 有独立的平稳增量，
3) 对每个 $t\ge 0$，W_t 服从正态分布 $N(0,\sigma^2 t)$。

则称 $\{W_t, t\ge 0\}$ 为布朗运动，也称为 Wiener 过程。当 $\sigma=1$ 时，则称之为标准布朗运动。

定义 2：(稳定分布)(见[2], p. 5)如果存在参数 $\alpha\in(0,2]$，$\sigma\in(0,+\infty)$，$\beta\in[-1,1]$，$\mu\in(-\infty,+\infty)$ (α 为稳定参数，σ 为噪声强度参数，β 为偏度参数，μ 为位置参数)，使得随机变量X的特征函数 $\varphi_X(u)$ 满足如下公式：

$$\varphi_X(u)=E(\exp\{iuX\})=\begin{cases}\exp\left\{-\sigma^\alpha|u|^\alpha\left(1-i\beta\,\mathrm{sgn}(u)\tan\dfrac{\pi\alpha}{2}\right)+i\mu u\right\}, & \alpha\ne 1\\ \exp\left\{-\sigma|u|\left(1+i\beta\dfrac{2}{\pi}\mathrm{sgn}(u)\ln|t|\right)+i\mu u\right\}, & \alpha=1\end{cases}$$

其中，$\mathrm{sgn}(u)$ 是关于 u 的符号函数，$\mathrm{sgn}(u)=\begin{cases}1, & u>0\\ 0, & u=0\\ -1, & u<0\end{cases}$

则称随机变量 X 具有稳定分布，记为 $X\sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$。

$\beta=0$ 时，稳定分布为对称分布，简称 $S\alpha S$。$\alpha=2$ 的高斯分布和 $\alpha=1$ 且 $\beta=0$ 的柯西分布都属于 $S\alpha S$ 分布。对于 $S\alpha S$ 分布，若 $1<\alpha\le 2$，则 μ 表示均值，若 $0<\alpha\le 1$，则 μ 表示中值。若 $\mu=0$ 且 $\sigma=1$，则称稳定分布为标准稳定分布。

定义 3：(对称稳定过程) (见[6], p. 191)若 $\alpha\in(0,2)$ 的 Z_t^α 是一个对称 α -稳定过程，则这个随机过程有以下性质：

1) $Z_0^\alpha=0$，a.s.；
2) $Z_0^\alpha=0$ 具有独立增量；
3) $Z_t^\alpha-Z_s^\alpha\sim S_\alpha\left((t-s)^{\frac{1}{\alpha}},0,0\right)$。

定义 4：(方括号过程) (见[7], p. 218)若 X,Y 是在同一概率空间上的半鞅，则它们的方括号过程，定义为

$$[X,Y](t)=\lim\sum_{i=0}^{n-1}\left(X\left(t_{i+1}^n\right)-X\left(t_i^n\right)\right)\left(Y\left(t_{i+1}^n\right)-Y\left(t_i^n\right)\right),$$

其中，在区间 $[0,t]$ 上定义分割

$$0=t_0^n<t_1^n<\cdots<t_n^n=t,$$

$n\to+\infty$ 时，$\delta_n=\max\left(t_{i+1}^n-t_i^n\right)\xrightarrow{P}0$ (依概率收敛)。

当 $Y=X$ 时，称 $[X,Y](t)$ 为 X 的二次变差。

定义 5：(隶属子) (见[8], p. 52)隶属子是一个非减的一维 Lévy 过程，这样的过程可以看作是一列随机时间演化的模型。若 $T=(T(t),t\ge 0)$ 是隶属子，则有

$T(t)\ge 0$，对每个 $t>0$，

以及

$T(t_1)\le T(t_2)$，若 $t_1<t_2$。

引理 1：(见[8]，p. 52)若 T 是隶属子，那么它的 Lévy 特征有以下形式

$$\eta(u)=ibu+\int_0^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{iuy}-1\right)\lambda(\mathrm{d}y),\tag{1}$$

其中，$b\ge 0$，且 Lévy 测度 λ 满足

$$\lambda(-\infty,0)=0\text{ 和 }\int_0^{+\infty}(y\wedge 1)\lambda(\mathrm{d}y)<+\infty。$$

相应的，任何形如(1)的从 $\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ 的映射都是隶属子的 Lévy 特征。我们称二元组 (b,λ) 为隶属子 T 的刻画。

引理 2：(见[2], p. 11)若 $X\sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$，$a$ 为一个非零实数，则有

$$aX\sim\begin{cases}S_\alpha\left(|a|\sigma,\operatorname{sgn}(a)\beta,a\mu\right), & \alpha\ne 1\\ S_1\left(|a|\sigma,\operatorname{sgn}(a)\beta,a\mu-\dfrac{2}{\pi}a\left(\ln|a|\right)\sigma\beta\right), & \alpha=1\end{cases}$$

3. 稳定过程的平方

3.1. 稳定过程平方的分布

本节主要阐述稳定过程的平方过程服从的分布。

引理 3： 对每个 $t\ge 0$，映射 $u\to E\left(e^{iuT_t}\right)$，存在一个 α -稳定隶属子 $T=\left(T_t,t\ge 0\right)$，使得

$$E\left(e^{-uT_t}\right)=e^{-tu^{\alpha}},$$

其中，$0<\alpha<1,u\ge 0$。

证明： 对每个 $t\ge 0$，映射 $u\to E\left(e^{iuT_t}\right)$，有以下 Laplace 变换

$$E\left(e^{-uT_t}\right)=e^{-t\Psi(u)},$$

其中，Ψ 为隶属子的 Laplace 指数，对每个 $t\ge 0$，有

$$\Psi(u)=-\eta(iu)=bu+\int_0^{+\infty}\left(1-e^{-uy}\right)\lambda(dy). \tag{2}$$

对积分 $\int_0^{+\infty}\left(1-e^{-ux}\right)x^{-1-\alpha}dx\left(0<\alpha<1,u\ge 0\right)$，有

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\left(1-e^{-ux}\right)x^{-1-\alpha}dx\\&=-\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{x}ue^{-uy}dy\right)x^{-1-\alpha}dx=-\int_0^{+\infty}\left(\int_y^{+\infty}x^{-1-\alpha}dx\right)ue^{-uy}dy\\&=\frac{u}{\alpha}\int_0^{+\infty}e^{-uy}y^{-\alpha}dy=\frac{u^{\alpha}}{\alpha}\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{-\alpha}dx=\frac{u^{\alpha}}{\alpha}\Gamma(1-\alpha)\end{aligned}$$

即

$$u^{\alpha}=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{+\infty}\left(1-e^{-ux}\right)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}.$$

由引理 1 和方程(2)可得，对任意 $0<\alpha<1$，都存在一个隶属子 T，它的 Laplace 指数为 $\Psi(u)=u^{\alpha}$，且它的刻画为 $(0,\lambda)$，其中

$$\lambda(dx)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{dx}{x^{1+\alpha}},$$

因此，$E\left(e^{-uT_t}\right)=e^{-tu^{\alpha}}$。

证毕。

引理 4： 设 $X\sim S_{\alpha}(1,0,0)$，则 $X_t\overset{d}{=}\sqrt{2}W_{T_t}$，其中，$T_t$ 为 $\frac{\alpha}{2}$ 隶属子。

证明： 由定义 2 知，在对称稳定过程中，对任意 x_t，有

$$E\left(e^{iux_t}\right)=e^{-|u|^{\alpha}\sigma^{\alpha}t}.$$

由于 $X\sim S_{\alpha}(1,0,0)$，即 $\beta=\mu=0,\sigma=1$，则

$$E\left(e^{iux_t}\right)=e^{-|u|^{\alpha}\sigma^{\alpha}t}=e^{-|u|^{\alpha}t}. \tag{3}$$

由定义 1 知，布朗运动具有独立平稳增量，因此布朗运动 W_{T_t} 有 $W_{T_t}-W_0\sim N\left(0,T_t\right)$，则

$$E\left(e^{iuW_{T_t}}\,|T_t\right)=e^{-\frac{1}{2}u^2T_t},$$

因此

$$E\left(e^{iucW_{T_t}}\,|T_t\right)=e^{-\frac{1}{2}u^2c^2T_t}. \tag{4}$$

T_t 为 $\frac{\alpha}{2}$ 隶属子，由引理 3，对等式(4)的右边取期望可得

$$E\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2c^2T_t}\right)=\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{2}u^2c^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}t}=\mathrm{e}^{-|u|^\alpha t\left(\sqrt{\frac{c^2}{2}}\right)^\alpha}. \tag{5}$$

令(3)=(5)，解得 $c=\sqrt{2}$ 。

因此 $X_t\overset{d}{=}\sqrt{2}W_{T_t}$ ，其中 T_t 为 $\frac{\alpha}{2}$ 隶属子。

证毕。

接下来，我们利用以上的引理来证明本节的主要内容。

定理 1：设 $X\sim S_\alpha(1,0,0)$，则 $X^2\overset{d}{=}2W_{T_t}^2$，其中，$T_t$ 为 $\frac{\alpha}{2}$ 隶属子。

证明：由 $W_{T_t}\sim N(0,T_t)$ 以及对称稳定过程的分布的对称性可得

$$\begin{aligned}P\left(2W_{T_t}^2\le y|T_t\right)&=P\left(\left\{W_{T_t}\le\sqrt{\frac{y}{2}}|T_t\right\}\cap\left\{W_{T_t}\ge-\sqrt{\frac{y}{2}}|T_t\right\}\right)\\&=\left(P\left(W_{T_t}\le\sqrt{\frac{y}{2}}|T_t\right)\right)^2=\left(\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi T_t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2T_t}}\mathrm{d}x\right)^2\\&=\left(\int_{-\infty}^{\sqrt{y}}(\pi T_t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2T_t}}\mathrm{d}x\right)^2=2\Phi^2\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{T_t}}\right)\end{aligned}$$

又由引理 2 可知，$X_t\overset{d}{=}\sqrt{2}W_{T_t}$，$T_t$ 为 $\frac{\alpha}{2}$ 隶属子，则有

$$\begin{aligned}P\left(X_t^2\le y|T_t\right)&=P\left(\left\{X_t\le\sqrt{y}|T_t\right\}\cap\left\{X_t\ge-\sqrt{y}|T_t\right\}\right)\\&=\left(P\left(\sqrt{2}W_{T_t}\le\sqrt{y}|T_t\right)\right)^2=\left(P\left(W_{T_t}\le\sqrt{\frac{y}{2}}|T_t\right)\right)^2\\&=2\Phi^2\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{T_t}}\right)\end{aligned}$$

因此，有 $P\left(2W_{T_t}^2\le y|T_t\right)=P\left(X_t^2\le y|T_t\right)$，即 $X^2\overset{d}{=}2W_{T_t}^2$ 。

证毕。

3.2. 稳定过程平方的尾分布

我们根据稳定过程的尾分布来推出稳定过程平方的尾分布。

定理 2：若随机变量 $X\sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$，则它服从的稳定过程的平方过程的尾分布为 $P\left(X^2>x\right)\sim C_\alpha\sigma^\alpha x^{-\frac{\alpha}{2}}$ 。

证明：稳定过程有如下性质[2]：若 $X\sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$，其中 $0<\alpha<2$，则

$$\begin{cases} \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda^{\alpha} P(X>\lambda) = C_{\alpha}\dfrac{1+\beta}{2}\sigma^{\alpha} \\ \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda^{\alpha} P(X<-\lambda) = C_{\alpha}\dfrac{1-\beta}{2}\sigma^{\alpha} \end{cases}$$

其中，$C_{\alpha} = \left(\int_0^{\infty} x^{-\alpha}\sin x\mathrm{d}x\right)^{-1}$。

因此，稳定过程的尾分布有如下形式：

$$P(X>\lambda) \sim C_{\alpha}\sigma^{\alpha}\lambda^{-\alpha}.$$

对于稳定过程的平方，有

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{\alpha} P(X^2>\lambda) &= \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{\alpha} P\left(\left(X>\sqrt{\lambda}\right)\cup\left(X<-\sqrt{\lambda}\right)\right) \\ &= \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{\alpha} P\left(X>\sqrt{\lambda}\right) + \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{\alpha} P\left(X<-\sqrt{\lambda}\right) \\ &= \left(\sqrt{\lambda}\right)^{\alpha}\left(\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\sqrt{\lambda}\right)^{\alpha} P\left(X>\sqrt{\lambda}\right)\right) \\ &\quad + \left(\sqrt{\lambda}\right)^{\alpha}\left(\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\sqrt{\lambda}\right)^{\alpha} P\left(X<-\sqrt{\lambda}\right)\right) \\ &= C_{\alpha}\frac{1+\beta}{2}\sigma^{\alpha}\lambda^{\frac{\alpha}{2}} + C_{\alpha}\frac{1-\beta}{2}\sigma^{\alpha}\lambda^{\frac{\alpha}{2}} = C_{\alpha}\sigma^{\alpha}\lambda^{\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

因此，稳定过程平方的尾分布为

$$P(X^2>\lambda) \sim C_{\alpha}\sigma^{\alpha}\lambda^{-\frac{\alpha}{2}}$$

证毕。

3.3. 稳定过程平方的二次变差

在前面的章节中，我们证明了稳定过程的平方过程也是一个稳定过程，并计算了稳定过程平方的尾分布，接下来，我们来讨论稳定过程的平方的二次变差。

定理 3：若 Z_t 是一个对称 α -稳定过程，则有

$$[Z_t, Z_t](t) \xrightarrow{P} t^{\frac{2}{\alpha}} Y,$$

其中，$Y \sim S_{\frac{\alpha}{2}}(1,0,0)$。

证明：由定义 3 和引理 2 可得

$$Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i} \sim S_{\alpha}\left((t_{i+1}-t_i)^{\frac{1}{\alpha}}, 0, 0\right) \stackrel{d}{=} (t_{i+1}-t_i)^{\frac{1}{\alpha}} S_{\alpha}(1,0,0).$$

设 $X_i \sim S_{\alpha}(1,0,0)$，则有 $Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i} = (t_{i+1}-t_i)^{\frac{1}{\alpha}} X_i$。

结合定义 4 可得

$$[Z_t, Z_t](t) = \lim_{\|\delta_n\|\to0} \sum_{i=0}^{n-1}\left(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}\right)^2 = \lim_{\|\delta_n\|\to0} (t_{i+1}-t_i)^{\frac{2}{\alpha}} \sum_{i=0}^{n-1} X_i^2,$$

其中，$\|\delta_n\|$ 为最大的分割区间。

令 $t_{i+1}-t_i=\frac{t}{n}$，则

$$\left[Z_t,Z_t\right](t)=\lim_{\|\delta_n\|\to 0}\left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\sum_{i=0}^{n-1}X_i^2=t^{\frac{2}{\alpha}}\lim_{\|\delta_n\|\to 0}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\sum_{i=0}^{n-1}X_i^2.$$

1) $\alpha=2$ 时，$\left[Z_t,Z_t\right](t)=t\lim_{\|\delta_n\|\to 0}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}X_i^2$。

由 $\alpha=2$ 的稳定过程是一个布朗运动，可得

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}X_i^2\right)=\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=0}^{n-1}X_i^2\right)=1,$$

$$Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}X_i^2\right)=\frac{1}{n^2}Var\left(\sum_{i=0}^{n-1}X_i^2\right)=\frac{2}{n},$$

从而推出，$\|\delta_n\|\to 0$ 时，Y 服从一个均值为 1，方差为 0 的分布，即

$$P(Y=1)=1.$$

所以有

$$\left[Z_t,Z_t\right](t)=t.$$

2) $0<\alpha<2$ 时，由定理 1 知，$X_i^2\overset{d}{=}2W_{T_i}^2$，$T_i$ 为 $\frac{\alpha}{2}$ 隶属子，可推出

$$\left[Z_t,Z_t\right](t)=t^{\frac{2}{\alpha}}\lim_{\|\delta_n\|\to 0}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\sum_{i=0}^{n-1}X_i^2\xrightarrow{P}t^{\frac{2}{\alpha}}Y,$$

其中，$Y=\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\sum_{i=0}^{n-1}X_i^2$，$Y\sim S_{\frac{\alpha}{2}}(1,0,0)$。

证毕。

3.4. 稳定过程平方的参数估计

我们计算稳定过程平方的概率密度函数，从而运用极大似然法对参数 α 进行估计。

定理 4： 若随机变量 $X\sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$，则它服从的稳定过程的平方过程的概率密度函数有如下形式：

$$f_{X^2(y)}=\begin{cases}\frac{1}{\pi y}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\Gamma(k\alpha+1)}{k!}\left(-\left(\sqrt{y}\right)^{-\alpha}\right)^k\sin\left(\frac{k\pi}{2}(\lambda-\alpha)\right), & x>0,0<\alpha<1\\ \frac{1}{\pi y}\frac{\sigma}{\left(\sqrt{y}-\mu\right)^2+\sigma^2}, & x>0,\alpha=1\\ \frac{1}{\pi y}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\Gamma(k\alpha^{-1}+1)}{k!}\left(-\sqrt{y}\right)^k\sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(\lambda-\alpha)\right), & x>0,1<\alpha<2\end{cases}$$

证明： 若随机变量 $X\sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$，它的概率密度函数为 $f_X(x)$。令 $Y=g(x)$，则有

$$f_Y(y)=\sum_i f_X\left(g_i^{-1}(y)\right)\left|\frac{\mathrm{d}g_i^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}\right|,$$

其中，$g_i^{-1}(y) = x_i$。

那么，对 $y = X^2$，即 $X = \pm\sqrt{y}$，概率密度函数为

$$f_Y(y) = \sum_i f_X\left(g_i^{-1}(y)\right)\left|\frac{\mathrm{d}g_i^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}\right| = 2f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{\mathrm{d}g^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}\right| = 2f_X\left(\sqrt{y}\right)\frac{\mathrm{d}\sqrt{y}}{\mathrm{d}y}.$$

1) 当 $x > 0, 0 < \alpha < 1$ 时，随机变量 X 的概率密度函数为[8]：

$$f_X(x,\lambda) = \frac{1}{\pi x}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\Gamma(k\alpha+1)}{k!}\left(-(x)^{-\alpha}\right)^k \sin\left(\frac{k\pi}{2}(\lambda-\alpha)\right),$$

此时对于 $y = X^2$，概率密度函数为：

$$\begin{aligned} f_{X^2(y)} &= 2f_X\left(\sqrt{y}\right)\frac{\mathrm{d}\sqrt{y}}{\mathrm{d}y} = 2f_X\left(\sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} \\ &= \frac{1}{\pi y}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\Gamma(k\alpha+1)}{k!}\left(-\left(\sqrt{y}\right)^{-\alpha}\right)^k \sin\left(\frac{k\pi}{2}(\lambda-\alpha)\right) \end{aligned}$$

2) 当 $x > 0, \alpha = 1$ 时，随机变量 X 服从的稳定分布为柯西分布，则 $y = X^2$ 的概率密度函数为：

$$f_{X^2(y)} = \frac{1}{\pi y}\frac{\sigma}{\left(\sqrt{y}-\mu\right)^2+\sigma^2}$$

3) 当 $x > 0, 1 < \alpha < 2$ 时，随机变量 X 的概率密度函数为[8]：

$$f_X(x,\lambda) = \frac{1}{\pi x}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\Gamma\left(k\alpha^{-1}+1\right)}{k!}(-x)^k \sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(\lambda-\alpha)\right)$$

此时对于 $y = X^2$，概率密度函数为：

$$\begin{aligned} f_{X^2(y)} &= 2f_X\left(\sqrt{y}\right)\frac{\mathrm{d}\sqrt{y}}{\mathrm{d}y} = 2f_X\left(\sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} \\ &= \frac{1}{\pi y}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\Gamma\left(k\alpha^{-1}+1\right)}{k!}\left(-\sqrt{y}\right)^k \sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(\lambda-\alpha)\right) \end{aligned}$$

证毕。

至此，我们得到了稳定过程平方的概率密度函数，下面我们简单的介绍运用极大似然法[9]对参数 α 进行估计的方法：

1) 通过稳定过程平方的概率密度函数可以得到它的似然函数 L；
2) 通过对似然函数 L 取对数可以得到 $\ln L$；
3) 令 $\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = 0$，求解该方程即可得到参数估计量 $\hat{\alpha}$。

4. 结语

本文研究了稳定过程的平方过程的相关性质，得出如下四个结论：

1) 稳定过程的平方过程是一个稳定过程；
2) 稳定过程平方的尾分布 $P\left(X^2 > x\right) \sim C_\alpha \sigma^\alpha x^{-\frac{\alpha}{2}}$；
3) 稳定过程平方的二次变差是一个非负的稳定过程；

4) 给出了对稳定过程平方的参数 α 进行估计的方法。

参考文献 (References)

[1] 周涛, 王嘉. α-稳定分布综述[J]. 电声技术, 2011, 35(3): 57-60.

[2] Samorodnitsky, G. and Taqqu, M. (1994) Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance. Chapman and Hall, New York.

[3] Mittnik, S., Doganoglu, T. and Chenyao, D. (1999) Computing the Probability Density Function of the Stable Paretian Distribution. *Mathematical and Computer Modelling*, **29**, 235-240. https://doi.org/10.1016/S0895-7177(99)00106-5

[4] Nolan, J. (1997) Numerical Calculation of Stable Densities and Distribution Functions. *Communications in Statistics Stochastic Models*, **13**, 759-774. https://doi.org/10.1080/15326349708807450

[5] Nolan, J. (1999) An Algorithm for Evaluating Stable Densities in Zolotarev's Parametrization. *Mathematical and Computer Modelling*, **29**, 229-233. https://doi.org/10.1016/S0895-7177(99)00105-3

[6] Duan, J. (2015) An Introduction to Stochastic Dynamics. Science Press, Beijing.

[7] Klebaner, F. (2004) Introduction to Stochastic Calculus with Application. 2nd Edition, Monash University, Melbourne.

[8] Applebaum, D. (2009) Lévy Processes and Stochastic Calculus. 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511809781

[9] Brorsen, B. and Yang, S. (1990) Maximum Likelihood Estimates of Symmetric Stable Distribution Parameters. *Communication in Statistics—Simulation and Computation*, **19**, 1459-1464. https://doi.org/10.1080/03610919008812928