**Advances in Applied Mathematics** 应用数学进展, 2018, 7(1), 1-6
Published Online January 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.71001

# The Properties of Geometric Stable Process

**Qinyu Liu, Jinying Tong**

College of Science, Donghua University, Shanghai
Email: liuqinyu21@126.com, jytong@dhu.edu.cn

Received: Dec. 7th, 2017; accepted: Jan. 9th, 2018; published: Jan. 16th, 2018

## Abstract

**The main purpose of this paper is to investigate the properties of geometric stable process. First, a model driven by *α-stable* process is present. We obtain the solution of such model. Then, we prove that if the noise is sufficiently large, the solution of the geometric stable process will tend to zero at an exponential rate with probability one.**

## Keywords

**Geometric Stable Process, Exponential Rate, *α-stable* Process**

# 几何稳定过程的性质

**刘沁宇，童金英**

东华大学理学院，上海
Email: liuqinyu21@126.com, jytong@dhu.edu.cn

收稿日期：2017年12月7日；录用日期：2018年1月9日；发布日期：2018年1月16日

## 摘　要

本文主要研究几何稳定过程的性质。首先，我们得到了由*α-stable*过程驱动的几何稳定过程并给出几何稳定过程的解。其次，证明了在随机噪声较大时，几何稳定过程的解几乎处处以指数速率趋近于零。

## 关键词

几何稳定过程，指数速率，*α-stable*过程

文章引用：刘沁宇，童金英．几何稳定过程的性质[J]．应用数学进展, 2018, 7(1): 1-6.
DOI: 10.12677/aam.2018.71001

## 1. 引言

20 世纪 90 年代以来，数学及金融呈现融合趋势，金融界被大量丰富的数学工具和模型所包围。几何布朗运动(GBM) (也叫指数布朗运动)是连续时间下的随机过程，其中随机变量的对数遵循布朗运动。几何布朗运动在金融数学中应用广泛，在 Black-Scholes 公式[1]中被用来定性股票价格，因而也是最常用的描述股票价格的模型。使用几何布朗运动来描述股票价格的理由如下：1、几何布朗运动的期望与随机过程的价格(股票价格)是独立的，这与我们对现时市场的期望是相符的。2、几何布朗运动过程只考虑为正值的价格，就像真实的股票价格。3、几何布朗运动过程与我们在股票市场观察到的价格轨迹呈现了同样的“roughness”。4、几何布朗运动过程计算相对简单。

然而，在现实生活中，由于随机环境的影响会导致股票价格发生变动。因此，我们在几何布朗运动中引入跳过程，用稳定过程来拟合数据，更加准确的刻画随机过程。近年来，稳定过程在金融领域如股票价格中得到了广泛的研究。此外，在语音信号处理、雷达、生物医学信号处理等领域，稳定过程都得到了深入的研究。稳定过程驱动的随机微分方程已被很多学者研究，如 Applebaum [2]，Bass 和 Chen [3]，Bertoin [4]，Isozaki 和 Uemura [5]，Li 和 Ma [6]，Li 和 Mytnik [7]，Sato [8]，Uemura [9]等。Zhang [10]曾考虑了由 $\alpha$-stable 过程驱动的人口模型的灭绝性。模型方程为

$$\mathrm{d}x(t)=x(t)\left[\left(a-bx(t)\right)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}Z(t)\right]$$

其中，$a,b,\sigma>0$，$Z(t)$ 为谱正稳定过程。当随机噪声较大时，该随机模型具有灭绝性。

而本文考虑的几何稳定过程即令上式中的 $b=0$，可以说是人口模型的特殊化，但是，我们模型中的 $Z(t)$ 为对称稳定过程，增加了负跳，具有很好的现实意义。据我们所知，几何稳定过程至今未有学者研究。

本文主要旨在研究几何稳定过程的性质。

在第一部分，阐述了本文问题提出的背景及当下研究的现状。

在第二部分，对本文需要用到的相关知识进行简单梳理，形成本文研究的必要理论基础。

在第三部分，介绍了一维布朗运动的相关知识，为后文引出稳定过程做铺垫。

在第四部分，研究了几何稳定过程的性质，给出几何稳定过程的解并证明了在随机噪声较大时，几何稳定过程的解几乎处处以指数速率趋近于 0。

## 2. 预备知识

**定义 2.1：**(尖括号过程)设 $X,Y$ 是半鞅，则存在唯一适应、连续的有界变差过程 $\langle X,Y\rangle_t$ 满足：$\langle X,Y\rangle_0=0$，使得 $[X,Y](t)-\langle X,Y\rangle_t$ 为局部鞅。若 $X$，$Y$ 均为连续半鞅且二次可积，则 $[X,Y](t)=\langle X,Y\rangle_t$。

**定理 2.1：**(局部鞅大数定律) (见 Lipster [11])设 $M_t,t\geq 0$ 为局部鞅且 $M_0=0$

$$\rho_M(t):=\int_0^t\frac{\mathrm{d}\langle M,M\rangle_s}{(1+s)^2},t\geq 0$$

其中 $\langle M,M\rangle_t$ 为尖括号过程。若

$$\lim_{t\to\infty}\rho_M(t)<\infty$$

则

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_t}{t}=0$$

## 3. 几何布朗运动

在研究几何稳定过程前，首先回顾一维几何布朗运动。

**定义 3.1**：随机过程 $x(t)$ 在满足以下随机微分方程(SDE)的情况下被认为遵循几何布朗运动：

$$\mathrm{d}x(t)=\mu x(t)\mathrm{d}t+\sigma x(t)\mathrm{d}B(t),\ x(0)=x_0 \tag{1}$$

其中 $\mu$ (漂移百分比)和 $\sigma$ (波动百分比)为常量， $B(t)$ 为标准布朗运动。

**命题 3.1**：几何布朗运动的解为

$$x(t)=x_0\exp\left[\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma B(t)\right]$$

**证明**：如果 $x_0\neq 0$，令 $f(x(t))=\ln x(t)$，由伊藤公式可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(x(t))&=\mathrm{d}\ln x(t)\\&=\frac{1}{x(t)}\mathrm{d}x(t)-\frac{1}{2x^2(t)}(\mathrm{d}x(t))^2\\&=\frac{1}{x(t)}(\mu x(t)\mathrm{d}t+\sigma x(t)\mathrm{d}B(t))-\frac{\sigma^2}{2}\mathrm{d}t\\&=\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B(t)\end{aligned} \tag{2}$$

对(2)式两边积分，可得

$$\ln x(t)=\ln x_0+\int_0^t\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma\mathrm{d}B(t)=\ln x_0+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\int_0^t\sigma\mathrm{d}B(t) \tag{3}$$

对(3)式两边取指数，可得

$$x(t)=x_0\exp\left[\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\int_0^t\sigma\mathrm{d}B(t)\right]$$

证毕。

## 4. 几何稳定过程

本章考虑对称稳定过程驱动下的具有漂移系数 $\mu$ 和扩散系数 $\sigma$ 的一维随机微分方程。

我们假设存在一系列相互独立的随机变量 $X_i$ 服从幂律分布且变量 $X_i$ 的方差均为无限。由广义中心极限定理(见 Nolan [12])知，当 $n$ 充分大时， $\sum_{i=1}^n X_i$ 将趋近于一个稳定分布。若记 $Z_t=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n X_i$，则可知 $Z_t$ 为稳定过程。众所周知，对称稳定过程对应的 Lévy 测度为

$$\nu(\mathrm{d}z)=\begin{cases}\dfrac{c_\alpha}{|z|^{\alpha+1}}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$$

其中

$$c_\alpha=\frac{\alpha 2^{\alpha-1}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$\Gamma(\cdot)$为伽马函数，伽马函数为

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t,s\in\mathbb{R}_+$$

本文主要目的为研究以下几何稳定过程，即

$$\mathrm{d}X_t=X_t\left(\mu\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}Z_t\right),\alpha\in(0,2) \tag{4}$$

**命题 3.1：**几何稳定过程的解为

$$X(t)=X(0)\exp\left[\mu t+\int_0^t\int_{-\frac{1}{\sigma}}^{+\infty}\left(\ln(1+\sigma z)-\sigma z\right)\upsilon(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s+M_t\right]$$

**证明：**定义$Y(t)=\ln X_t$，由伊藤公式可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Y(t)=&\frac{X_t}{X_t}\mu\mathrm{d}t+\int_{-\frac{1}{\sigma}}^{+\infty}\left(\ln\left(X_t+\sigma X_t z\right)-\ln X_t-\sigma z\right)\upsilon(\mathrm{d}z)\mathrm{d}t\\&+\int_{-\frac{1}{\sigma}}^{+\infty}\left(\ln\left(X_t+\sigma X_t z\right)-\ln X_t\right)\tilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)\\=&\mu\mathrm{d}t+\int_{-\frac{1}{\sigma}}^{+\infty}\left(\ln(1+\sigma z)-\sigma z\right)\upsilon(\mathrm{d}z)\mathrm{d}t+\int_{-\frac{1}{\sigma}}^{+\infty}\ln(1+\sigma z)\tilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)\end{aligned} \tag{5}$$

对(5)式两边积分，可得

$$Y(t)=Y(0)+\mu t+\int_0^t\int_{-\frac{1}{\sigma}}^{+\infty}\left(\ln(1+\sigma z)-\sigma z\right)\upsilon(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s+M_t \tag{6}$$

对(6)式两边取指数，可得

$$X(t)=X(0)\exp\left[\mu t+\int_0^t\int_{-\frac{1}{\sigma}}^{+\infty}\left(\ln(1+\sigma z)-\sigma z\right)\upsilon(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s+M_t\right]$$

证毕。

在接下来的定理证明中将主要考虑随机噪声较大时的情况。

**定理 4.1:**若$\mu+\int_{-\frac{1}{\sigma}}^{+\infty}\left(\ln(1+\sigma z)-\sigma z\right)\frac{c_\alpha}{|z|^{\alpha+1}}\mathrm{d}z<0$，则对所有给定的初值$X_0\in\mathbb{R}_+$，随机微分方程(4)的解满足

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\frac{\ln X_t}{t}\le\mu+\int_{-\frac{1}{\sigma}}^{+\infty}\left(\ln(1+\sigma z)-\sigma z\right)\frac{c_\alpha}{|z|^{\alpha+1}}\mathrm{d}z<0\text{, a.s.}$$

即$X(t)$几乎处处以指数速率趋近于 0。

**证明：**(6)式中$M_t$为局部鞅且定义为

$$M_t=\int_0^t\int_{-\frac{1}{\sigma}}^{+\infty}\ln(1+\sigma z)\tilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)$$

局部鞅$M_t$的 Meyer 尖括号过程为

$$\langle M, M\rangle_t = \int_0^t \int_{-\frac{1}{\sigma}}^{+\infty} \left(\ln(1+\sigma z)\right)^2 \upsilon(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s$$

设 $H(y) = \dfrac{\left(\ln(1+y)\right)^2}{y^2}$， $y \in (0,1]$。不难看出

$$(\ln 2)^2 \le H(y) \le 1$$

令 $y = \sigma z$，则有

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{+\infty} \left(\ln(1+\sigma z)\right)^2 \upsilon(\mathrm{d}z) \\
&= \int_{-1}^{+\infty} \left(\ln(1+\sigma z)\right)^2 \frac{c_\alpha}{|z|^{\alpha+1}} \mathrm{d}z = \sigma^\alpha \int_{-1}^{+\infty} \left(\ln(1+y)\right)^2 \frac{c_\alpha}{|y|^{\alpha+1}} \mathrm{d}y \\
&= \sigma^\alpha \int_{-1}^{0} \left(\ln(1+y)\right)^2 \frac{c_\alpha}{|y|^{\alpha+1}} \mathrm{d}y + \sigma^\alpha \int_0^1 H(y) \frac{c_\alpha}{|y|^{\alpha-1}} \mathrm{d}y \\
&\quad + \sigma^\alpha \int_1^{+\infty} \left(\ln(1+y)\right)^2 \frac{c_\alpha}{|y|^{\alpha+1}} \mathrm{d}y \\
&< \sigma^\alpha \int_{-1}^{0} \left(\ln(1+y)\right)^2 \frac{c_\alpha}{|y|^{\alpha+1}} \mathrm{d}y + \frac{\sigma^\alpha c_\alpha}{2-\alpha} + \sigma^\alpha \int_1^{+\infty} \left(\ln(1+y)\right)^2 \frac{c_\alpha}{|y|^{\alpha+1}} \mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{7}$$

用洛必达法则和泰勒展开式，可得

$$\lim_{y \to 0^-} \frac{\left(\ln(1+y)\right)^2}{|y|^{\alpha+1}} = \lim_{y \to 0^-} \frac{2\ln(1+y)}{(\alpha+1)|y|^\alpha} = \lim_{y \to 0^-} \frac{2y + y^2}{(\alpha+1)|y|^\alpha}$$

因此，

$$\frac{\left(\ln(1+y)\right)^2}{|y|^{\alpha+1}} \sim \frac{2y+y^2}{(\alpha+1)|y|^\alpha}$$

现在我们继续计算等价替换量的积分

$$\int_{-1}^{0} \frac{2y+y^2}{(\alpha+1)|y|^\alpha} = \frac{(2-\alpha)(-1)^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha-1)} < \infty$$

因此，

$$\sigma^\alpha \int_{-1}^{0} \left(\ln(1+y)\right)^2 \frac{c_\alpha}{|y|^{\alpha+1}} \mathrm{d}y < \infty \tag{8}$$

设 $1 < q < \alpha + 1$，由 $\lim_{y \to +\infty} y^q \dfrac{\left(\ln(1+y)\right)^2}{|y|^{\alpha+1}} = 0$ 和反常积分收敛定理可得

$$\sigma^\alpha \int_{1}^{+\infty} \left(\ln(1+y)\right)^2 \frac{c_\alpha}{|y|^{\alpha+1}} \mathrm{d}y < \infty \tag{9}$$

由(7)，(8)和(9)得

$$\int_{-\frac{1}{\sigma}}^{+\infty} \left(\ln(1+\sigma z)\right)^2 \upsilon(\mathrm{d}z) < +\infty$$

因此，

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}\langle M,M\rangle_S}{(1+s)^2} = \frac{t}{1+t}\int_{-\frac{1}{\sigma}}^{+\infty}\left(\ln(1+\sigma z)\right)^2 \upsilon(\mathrm{d}z) < +\infty$$

又由局部鞅大数定律(见 Lipster [11])，可得

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{M_t}{t} = 0$$

所以，(6)两边同时除以 $t$，当 $t\to\infty$ 时有

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\frac{\ln X_t}{t} \le \mu + \int_{-\frac{1}{\sigma}}^{+\infty}\left(\ln(1+\sigma z)-\sigma z\right)\frac{c_\alpha}{|z|^{\alpha+1}}\mathrm{d}z < 0$$

证毕。

## 参考文献 (References)


[1] 薛红. 具有随机寿命的多维 Black-Scholes 定价模型[J]. 系统工程理论与实践, 2004, 24(8): 44-48.

[2] Applebaum, D. (2009) Lévy Processes and Stochastic Calculus. 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511809781

[3] Bass, R. and Chen, Z. (2006) Systems of Equations Driven by Stable Processes. *Probability Theory and Related Fields*, **134**, 175-214. https://doi.org/10.1007/s00440-004-0426-z

[4] Bertoin, J. (1996) On the First Exit Time of a Completely Asymmetric Stable Process from a Finite Interval. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **28**, 514-520. https://doi.org/10.1112/blms/28.5.514

[5] Isozaki, Y. and Uemura, T. (2004) A Family of Symmetric Stable-Like Processes and Its Global Path Properties. *Probability and Mathematical Statistics*, **24**, 145-164.

[6] Li, Z. and Ma, C. (2013) Asymptotic Properties of Estimators in a Stable Cox-Ingersoll-Ross Model. *Stochastic Processes and Their Applications*, **125**, 3196-3233. https://doi.org/10.1016/j.spa.2015.03.002

[7] Li, Z. and Mytnik, L. (2011) Strong Solutions for Stochastic Differential Equations with Jumps. *Annales de l'Institut Henri Poincaré—Probabilités et Statistiques*, **47**, 1055-1067. https://doi.org/10.1214/10-AIHP389

[8] Sato, K. (1999) Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge University Press, Cambridge.

[9] Uemura, T. (2002) On Some Path Properties of Symmetric Stable-Like Processes for One Dimension. *Potential Analysis*, **16**, 79-91. https://doi.org/10.1023/A:1024820804141

[10] Zhang, Z.Z., Zhang, X.K. and Tong, J.Y. (2017) Exponential Ergodicity for Population Dynamics Driven by $\alpha$-Stable Processes. *Statistics and Probability Letters*, **125**, 149-150. https://doi.org/10.1016/j.spl.2017.02.010

[11] Lipster, R. (1980) A Strong Law of Large Numbers for Local Martingales. *Stochastics*, **3**, 217-228. https://doi.org/10.1080/17442508008833146

[12] Nolan, J. (2009) Stable Distributions-Models for Heavy Tailed Data. Birkhauser, Boston.