Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2018, 7(2), 145-151**
Published Online February 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.72018

Hans汉斯

Related Dynamic Analysis of a Nutrient-Phytoplankton Dynamic System under State Impulsive Feedback Control

Han Duan

Wenzhou University, Wenzhou Zhejiang
Email: 2531014439@qq.com

Received: Jan. 17th, 2018; accepted: Feb. 2nd, 2018; published: Feb. 11th, 2018

Abstract

On the basis of state impulsive feedback control theory and nonlinear dynamic system theory, the Michaelis-Menten functional response function is introduced to describe the interaction mechanism of phytoplankton and nutrients in the process of dynamic modeling; a nutrient-phytoplankton dynamic system under state impulsive feedback control has been structured. Some qualitative analysis of the dynamic system has been investigated to establish some theoretical criterions for the existence, uniqueness and asymptotic stability of the order-1 periodic solution. The research work can provide a theoretical support for the comprehensive study of the application of state impulsive feedback control theory to the prevention and control of eutrophication in water body.

Keywords

Phytoplankton, Impulsive, Periodic Solution, Stability

一类状态脉冲反馈控制下的营养盐–浮游植物动力系统的相关动力学分析

段　涵

温州大学，浙江 温州
Email: 2531014439@qq.com

收稿日期：2018年1月17日；录用日期：2018年2月2日；发布日期：2018年2月11日

文章引用: 段涵. 一类状态脉冲反馈控制下的营养盐–浮游植物动力系统的相关动力学分析[J]. 应用数学进展, 2018, 7(2): 145-151. DOI: 10.12677/aam.2018.72018

摘　要

基于状态脉冲反馈控制理论与非线性动力系统理论，本文在动态建模过程中引入Michaelis-Menten功能反应函数来刻画浮游植物与营养盐的相互作用机制，构建了一类状态脉冲反馈控制下的营养盐－浮游植物动力系统，对所建动力系统进行一些定性分析，建立了该动力系统阶-1周期解的存在性、唯一性和轨道渐近稳定的理论判据，这些研究工作为全面研究状态脉冲反馈控制理论在水体富营养化防治中的应用提供理论支撑。

关键词

浮游植物，脉冲，周期解，稳定性

1. 引言

在海洋生态系统中，浮游生物处于所有水生生物组成的食物链中的最末端，且将矿物质营养转化为可供其它生物生存的原始生物原料。在实验性生物数学研究中，研究者已经开始对浮游植物和营养盐之间的关系和重要性进行了相关研究[1] [2] [3] [4] [5]。近年来，人们发现当大量的营养物质被投放到水体中，水体环境会发生变化，由于营养物质的大量供给，浮游植物会不断繁殖，导致了水体富营养化，使得水中大量鱼死亡、环境污染，甚至威胁到人类的健康[6]-[15]。因为，水体富营养化防治与预测问题已成为国内外重要的环境问题之一，迫切需要有效地解决方案。

许多研究者建立了数学模型来研究生物种群动力学问题，其目的是为了探讨如何通过数学方法精确地描述水体富营养化问题，进而提出相应的预测与防治策略[16]。论文[17]构建了一类水生生态系统中的氮-磷-浮游植物动力学新模型，通过 Lyapunov function 理论讨论系统平衡点的存在性和稳定性。论文[18]提出了一类具有 self and cross 扩散的有毒浮游植物-浮游动物动力学新模型，对其平衡点的局部存在性和全局稳定性进行系统研究。Smith 等人[19]研究了一个具有状态脉冲反馈控制的半循环发酵模型，并利用 Floquet 理论得到了阶-1 周期解的稳定判据。在论文[20]中，作者建立了一个具有脉冲反馈控制的浮游植物-浮游动物动力学新模型，利用后继函数研究了阶-1 周期解和阶-2 周期解的存在性。在论文[21]中，作者研究了系统在脉冲反馈控制下阶-1 周期解的存在性，并通过微分方程几何理论和后继函数证明了阶-1 周期解的存在性。在论文[22]中，作者研究了具有脉冲反馈控制的浮游植物-鱼类动力学新模型，并利用后继函数研究了阶-1 周期解的存在性，并在极限环稳定性理论的基础上探讨了阶-1 周期解的稳定性。

近年来，脉冲微分方程理论已得到了更深度地发展，许多学者在研究时都会考虑脉冲带来的影响作用[23] [24] [25]。实际上，状态脉冲微分方程在许多领域都有广泛的应用，且人类对自然资源的管理与开发都是离散的，而且还是瞬时完成的，从而在瞬时时刻也破坏了原有生态种群的固有状态，因此把这种瞬间扰动用脉冲微分方程来表示更加契合实际[26]-[31]。在论文[32]中，作者构建了一类恒化器下的状态脉冲反馈方程，并利用后继函数和庞加莱映射得到了系统阶-1 周期解的存在性与稳定性。在论文[33]中，作者研究了一类乙醇抑制下的状态脉冲反馈控制的非线性模型，利用半连续动力系统证明了阶-1 周期解

和阶-2 周期解的的存在性。

基于以上讨论结果，本论文考虑一类带有 Michaelis-Menten 功能反应项的两种群脉冲动力系统：

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=I-\dfrac{\alpha xy}{\beta+x}-qx \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\varepsilon\alpha xy}{\beta+x}-my \end{array}\right\} y<h \\ \left.\begin{array}{l} \Delta x=-qx \\ \Delta y=-\delta y \end{array}\right\} y=h \end{cases} \tag{1}$$

其中 x 和 y 分别代表营养盐的浓度和浮游植物在时刻 t 的种群密度。假设所有参数都为正数且有 $q\in(0,1), h>0, \delta>0$。$\Delta x(t)=x(t^+)-x(t)$，$\Delta y(t)=y(t^+)-y(t)$。I 表示流入到系统中的营养盐浓度；q 代表营养盐的流失率；Michaelis-Menten 功能反应函数可表示为 $\dfrac{\alpha x}{\beta+x}$；其中 β 代表半饱和参数，ε 代表浮游植物对营养盐的摄入率；m 代表浮游植物的死亡率。当浮游植物的数量在 t_h 时刻达到了阈值 h，就会采取控制策略使得营养盐浓度和浮游植物种群密度分别变成 $(1-q)x(t_h)$ 和 $(1-\delta)h$。

在系统(1)中，当不考虑脉冲效应时，计算得到系统的平衡点有：$E_0=(I/q,0)$；$E_*=(x_*,y_*)$，其中 $x_*=\beta m/(\varepsilon\alpha-m)$ 和 $y_*=\dfrac{\varepsilon}{m}(I\varepsilon\alpha-mI-q\beta m)$。显然，$E_0$ 总是存在的；通过[34]可知，在满足 $m<I\alpha\varepsilon/(I+\beta q)$ 时，E_* 是存在的。

2. 模型和准备

对于系统(1)，脉冲集 $M=\{(x,y)\in R_+^2 \mid y=h, x\geq 0\}$，

脉冲映射：

$$\varphi:(x,y)\in M\to (x,(1-p)y)\in R_+^2,$$

相集：

$$N=\varphi(M)=\{(x,y)\in R_+{}^2 \mid y=(1-p)h, x\geq 0\}.$$

定义 2.1 [35]若系统的轨迹始于点 $C(x_C,(1-p)h)\in N$ 交脉冲集 M 于点 $C'(x_{C'},h)$，接着跳到点 $C_1(x_{C_1},(1-p)h)\in N$，于是称点 C_1 为点 C 的后继点，表达式 $g(C)=x_{C_1}-x_C$ 称作点 C 的后继函数。

引理 2.1 [35] 对于系统(1)，假设 $A(x_A,(1-p)h)$ 和 $B(x_B,(1-p)h)$ 为相集 N 中的两点，它们的后继点分别为 $A_1(x_{A_1},(1-p)h)$ 和 $B_1(x_{B_1},(1-p)h)$。若满足条件 $g(A)\cdot g(B)<0$，则系统(1)存在一个阶 1-周期解，其中 $g(A)$ 为其后继函数。

定义 2.2 (轨道稳定性) $z^*(t)$ 称作轨道稳定，如果满足：对于给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得对于系统(1)任意的解 $z(t)$ 都满足：$|z^*(t)-z(t)|<\delta$，于是当 $t>t_0$

$$d(z(t),O(z_0,t_0))<\varepsilon$$

为了讨论(1)的稳定性,定义向量场的两个横截面 $\Sigma^p=\{(x,y):x\geq 0, y=(1-q)h\}$ $\Sigma^h=\{(x,y):x\geq 0, y=h\}$。假设系统(1)的轨道 $O^+(S_n,t_n)$，以 $S_n(x_n,h)$ 为起点，在脉冲效应的作用下，轨道跳到 Σ^p 上的 $S_n^+((1+p)x_n,h)$，然后又回到 Σ^h 上的点 $S_{n+1}(x_{n+1},h)$ 处。其中 x_{n+1} 由 x_n 和参数 p 决定。所以，

可以定义 Σ^h 上庞加莱映射：$x_{n+1}=F\left(p,x_n\right)$

3. 正周期解的存在性与稳定性

情形 $h\le y^*$

定理 3.1 若满足条件 $h\le y^*$，系统(1)存在一个唯一的阶-1 周期解且是轨道渐近稳定。

证明：若条件 $h\le y^*$ 成立，则可得到关系：$(1-p)h\le y^*$。从而得到直线 $y=h$ 位于 $y=y^*$ 和 $y=(1-p)h$。

等倾线 $I-\dfrac{\alpha xy}{\beta+x}-qx=0$ 与两直线 $y=h$ 和 $y=(1-p)h$ 分别交于 C_0 和 B。从 C_0 作一条垂直于 $y=(1-p)h$ 的直线，并交于 C。C_1 为 C 的后继点，B_1 为 B 的后继点。根据轨迹的趋势可知，C_1 必定位于 C 的右边，B_1 必定位于 B 的左边。固有 $x_{C_1}>x_C$ 和 $x_{B_1}<x_B$，后继函数表达式为：$g\left(C\right)=x_{C_1}-x_C>0$，$g\left(B\right)=x_{B_1}-x_B<0$,因此必定存在一点 H 满足 $g\left(H\right)=0$，由引理 2.1 知：系统(1)存在一个位于 C 和 B 之间的阶-1 周期解。

接下来证明阶-1 周期解的唯一性和轨道渐近稳定性。

根据上面分析知：轨迹从点 C_1 出发，交脉冲集 M 于点 C_2，接着跳到后继点 C_3。根据轨迹的趋势，点 C_3 必定会位于 C_1 的右方；因此有：$x_{C_3}>x_{C_1}$。

从 C_3 出发的轨迹交脉冲集 M 于点 C_4，接着跳到后继点 C_5，而 C_5 必定位于 C_3 的右边，因此有 $x_{C_5}>x_{C_3}$。因此可得两个序列：

$$x_{C'},x_{C_2},x_{C_4},\cdots,x_{C_{2n}},\cdots\in M,$$

$$x_{C_1},x_{C_3},x_{C_5},\cdots,x_{C_{2n-1}},\cdots\in N.$$

类似地，从 B_1 开始的轨迹，也可得到两个序列：

$$x_{B'},x_{B_2},x_{B_4},\cdots,x_{B_{2n}},\cdots\in M,$$

$$x_{B_1},x_{B_3},x_{B_5},\cdots,x_{B_{2n-1}},\cdots\in N.$$

根据系统(1)的前两个方程知：线段 CB 映射到线段 $C'B'$。由于脉冲效应，线段 $C'B'$ 映射到线段 C_1B_1。因而知道

$$\left(x_C,x_B\right)\supset\left(x_{C_1},x_{B_1}\right),d\left(C,B\right)\supset d\left(C_1,B_1\right).$$

根据以上分析过程可知：

$$x_{C_1}<x_{C_3}<\cdots<x_{C_{2n-1}}<\cdots<x_H<x_{B_{2n-1}}<\cdots<x_{B_3}<x_{B_1},$$

$$\lim_{n\to\infty}d\left(C_{2n-1},B_{2n-1}\right)=0$$

利用数学分析中的闭区间套定理知，系统(1)存在唯一的阶-1 周期解，且满足：

$$\lim_{n\to\infty}x_{C_{2n-1}}=x_H,\lim_{n\to\infty}x_{B_{2n-1}}=x_H.$$

在 H 足够小的邻域内，选取任意一点 Q_0（不同于 H），不失一般性，假设 $x_C<x_{Q_0}<x_H$（否则 $x_H<x_{Q_0}<x_B$，证明方法同理)。

根据序列 $\left\{x_{C_{2n-1}}\right\}$ 的单调性，必存在整数 l 使得：$x_{C_{2l+1}}<x_{Q_0}<x_{C_{2l+3}}<x_H$。

开始于 Q_0 的轨迹与脉冲集 M 相遇后跳到点 Q_1（相互独立的轨迹不会相交)，因此 Q_1 必定位于 C_{2l+3} 与

C_{2l+5} 之间，且有 $x_{C_{2l+3}} < x_{Q_1} < x_{C_{2l+5}}$。$Q_1$ 的后继点表示为 Q_2，Q_2 必定位于 C_{2l+5} 与 C_{2l+7} 之间，且满足 $x_{C_{2l+5}} < x_{Q_2} < x_{C_{2l+7}}$。根据以上分析过程，得到序列：$\{Q_k\} \in N, k = 0,1,2,\cdots$ 满足以下条件：

1) Q_k 位于 $C_{2l+2k+1}$ 与 $C_{2l+2k+3}$ 之间；

2) $x_{C_{2l+2k+1}} < x_{Q_k} < x_{C_{2l+2k+3}}$。

因此，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{C_{k1}} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{C_{2l+2k+1}} = x_H$。

综上，由于连续脉冲效应，相点的后继点都被吸引到 H 周围，而由 Q_0 的任意性可知，系统(1)的阶-1 周期解为轨道渐近稳定。

完证。

情形 2 $h \ge y^*$

考虑到系统相空间的几何构建，有一个轨道 τ 交 N 于 $D_1, D_2\left(x_1 < x_2\right)$，并与 M 交于 D_3，其中 $D_1\left(x_1,(1-q)h\right), D_2\left(x_2,(1-q)h\right)$。所以对于系统(1)始于 $E_1\left(x,(1-p)h\right)$ 的轨道不会与 M 相交。

假若系统(1)有一个轨道从 $E\left(\tilde{x},(1-q)\right)$ $\left(\tilde{x} \in (0,\tilde{x}_2) \cup \{\tilde{x}_1\}\right)$ 由于脉冲效应会与 Σ^h 相交无数次，其中 $h \ge y^*$。假设 $O^+\left(E,t_0\right)$ 与 Σ^h 交于 $\left(x_0,h\right)$ $\left(x_0 \in \left(0,x^*\right)\right)$。由于脉冲效应可知：$x_1 = F\left(q,x_0\right)$，$x_2 = F\left(q,x_0\right)$。重复以上的过程得到，$x_{n+1} = F\left(q,x_n\right)\left(n = 1,2,\cdots\right)$。另一方面，对于 Σ^h 上的任意两点 $A_i\left(x_i,h\right)$ 和 $A_j\left(x_j,h\right)$，x_i 和 x_j 满足：$x_i, x_j \in \left(0,x^*\right)$ 且 $x_i < x_j$。由于脉冲效应，点 $A_i^+\left((1+p)x_i,(1-q)h\right)$，$A_j^+\left((1+p)x_j,(1-q)h\right)$ 均在 D_2 的右侧。因此，可得

$$0 < x_{j+1} < x_{i+1} < x^* \tag{2}$$

假设轨道始于 $E_1\left(x,(1-p)h\right)$，与 Σ^h 第一次相交于 $E_2\left(x_0,h\right)$，$x_0 \in \left(0,x^*\right]$，若 $x_0 = x^*$ 和 $x = (1+q)x_0$，则系统(1)有正阶-1 周期解。且对于任意从 $O^+\left(E_1,t_0\right)$ 出发的轨道都不会与 Σ^h 相交。因此，从 Σ^h 的庞加莱映射，得出 $x_1 = F\left(q,x_0\right)$，$x_2 = F\left(q,x_0\right)$。重复上面的过程，得到：$x_{n+1} = F\left(q,x_n\right)\left(n = 3,4,\cdots\right)$。特别地，若 $x_0 = x_1$，则系统(1)有正阶-1 周期解；若 $x_0 \ne x_1$，且 $x_0 = x_2$，则系统(1)有阶-2 周期解。

(a) 若 $x_0 < x_1$，由(2)得 $x_1 > x_2$，在这种情形下，x_0, x_1, x_2 的关系有如下两种情况：

(i) $x_2 < x_0 < x_1$

若 $x_2 < x_0 < x_1$，则有 $x_3 > x_1 > x_2$。由(2)重复以上的过程得到：

$$0 < \cdots < x_{2n} < \cdots < x_2 < x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n+1} < \cdots < x^*.$$

(ii) $x_0 < x_2 < x_1$

若 $x_0 < x_2 < x_1$，类比(i)，得到：

$$x_0 < x_2 < \cdots < x_{2n} < \cdots < x_{2n+1} < \cdots < x_3 < x_1 < x^*.$$

(b) 若 $x_0 > x_1$，由(2)可得 $x_1 < x_2$，这种情形下，x_0, x_1, x_2 的关系有如下两种：

(i) $x_1 < x_0 < x_2$

若 $x_1 < x_0 < x_2$，则有 $x_2 > x_1 > x_3$，由(2)，并重复以上过程得到：

$$0 < \cdots < x_{2n+1} < \cdots < x_1 < x_0 < x_2 < \cdots < x_{2n} < \cdots < x^*.$$

(ii) $x_1 < x_2 < x_0$

若 $x_1 < x_2 < x_0$，类比(i)得到：

$$0 < x_1 < \cdots < x_{2n+1} < \cdots < x_{2n} < \cdots < x_2 < x_0 < x^*.$$

因此，当出现情形(a)中的(i)时可知：$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \rho_2$，$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \rho_1$，且满足：$0 < \rho_2 < \rho_1 < x_*$。因此，可得 $\rho_1 = F(q, \rho_2)$ 和 $\rho_2 = F(q, \rho_1)$，也易得到，系统(1)有一个阶-2 轨道渐近稳定的正周期解。类似地，当出现(a)中的(ii)和(b)中的(ii)这两种情形时，系统(1)有一个阶-1 轨道渐近稳定周期解；当出现(b)中的(i)时，系统(1)有一个阶-2 轨道渐近稳定周期解。

4. 结论

本文建立了一类状态脉冲反馈控制下的营养盐－浮游植物的动力系统，对该系统进行了相关定性分析，探讨了该系统阶-1 正周期解的存在性、唯一性和轨道渐近稳定性。这些研究工作为全面研究状态脉冲反馈控制理论在水体富营养化防治中的应用提供理论支撑。

致　谢

首先，我向我的导师赵敏教授表达我最诚挚的谢意！感谢老师对我的论文细致而又严谨的指导，感谢老师对我生活及学习上无微不至的关怀。

其次，感谢我们实验室的于恒国师兄和戴传军师兄，感谢你们一直以来在实验室对我问题的细致引导、鼓励和解答，使我对我们专业有了更深更细致的理解。

最后，感谢温州大学数学与信息科学院的各位老师和领导，感谢他们的教导和帮助。同时感谢赵敏导师国家自然科学基金面上项目(KZ1111021)的资助。

参考文献 (References)

[1] Reigada, R., Hillary, R.M., Bees, M.A., Sancho, J.M. and Sagues, F. (2003) Plankton Blooms Induced by Turbulent Flows. *Proceedings of the Royal Society B*: *Biological Sciences*, **270**, 875-880. https://doi.org/10.1098/rspb.2002.2298

[2] Zhang, W.W. and Zhao, M. (2013) Dynamical Complexity of a Spatial Phytoplankton-Zooplankton Model with an Alternative Prey and Refuge Effect. *Journal of Applied Mathematics*, **2013**, 707-724.

[3] Abbas, S., Banerjee, M. and Hungerbuhler, N. (2010) Existence, Uniqueness and Stability Analysis of Allelopathic Stimulatory Phytoplankton Model. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **367**, 249-259. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.01.024

[4] El Saadi, N. and Bah, A. (2011) Numerical Treatment of a Nonlocal Model for Phytoplankton Aggregation. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 8279-8287. https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.01.051

[5] Fan, A., Han, P. and Wang, K. (2013) Global Dynamics of a Nutrient-Plankton System in the Water Ecosystem. *Applied Mathematics and Computation*, **219**, 8269-8276.

[6] Dai, C. and Zhao, M. (2013) Bifurcation and Periodic Solutions for an Algae-Fish Semi-Continuous System. *Abstract and Applied Analysis*, **2013**, 1-11.

[7] Dai, C. and Zhao, M. (2014) Nonlinear Analysis in a Nutrient-Algae-Zooplankton System with Sinking of Algae. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**, 1-11. https://doi.org/10.1155/2014/278457

[8] Luo, J.H. (2013) Phytoplankton-Zooplankton Dynamics in Periodic Environments Taking into Account Eutrophication. *Mathematical Biosciences*, **245**, 126-136. https://doi.org/10.1016/j.mbs.2013.06.002

[9] Jang, S.R. (2000) Dynamics of Variable-Yield Nutrient-Phytoplankton-Zooplankton Models with Nutrient Recycling and Self-Shading. *Journal of Mathematical Biology*, **40**, 229-250. https://doi.org/10.1007/s002850050179

[10] Alvarez-Vázquez, L.J., Fernández, F.J. and R. Muñoz-Sola, R. (2009) Mathematical Analysis of a Three-Dimensional Eutrophication Model. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **349**, 135-155. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.08.031

[11] Chakraborty, K., Jana, S. and Kar, T.K. (2012) Global Dynamics and Bifurcation in a Stage Structured Prey-Predator Fishery Model with Harvesting. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 9271-9290. https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.03.005

[12] Wang, Y., Zhao, M., Dai, C. and Pan, X. (2014) Nonlinear Dynamics of a Nutrient-Plankton Model. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**, Article ID: 451757. https://doi.org/10.1155/2014/451757

[13] Gao, M., Shi, H. and Li, Z. (2009) Chaos in a Seasonally and Periodically Forced Phytoplankton-Zooplankton System.

Nonlinear Analysis Real World Applications, **10**, 1643-1650. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2008.02.005

[14] Zhao, J. and Wei, J. (2009) Stability and Bifurcation in a Two Harmful Phytoplankton-Zooplankton System. *Chaos Solitons and Fractals*, **39**, 1395-1409. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2007.05.019

[15] Yu, H., Zhao, M. and Wang, Q. (2013) Analysis of Mathematics and Sustainability in an Impulsive Eutrophication Controlling System. *Abstract and Applied Analysis*, **2013**, Article ID: 726172. https://doi.org/10.1155/2013/726172

[16] Banerjee and Venturino, E. (2011) A Phytoplankton-Toxic Phytoplankton-Zooplankton Model. *Ecological Complexity*, **8**, 239-248. https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2011.04.001

[17] Deng, Y.L., Zhao, M., Yu, H.G. and Wang, Y. (2015) Dynamical Analysis of a Nitrogen-Phosphorus-Phytoplankton Model. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2015**, Article ID: 823026. https://doi.org/10.1155/2015/823026

[18] Wang, P.F. and Zhao, M. (2016) Nonlinear Dynamics of a Toxin-Phytoplankton-Zooplankton System with Self- and Cross-Diffusion. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2016**, Article ID: 4893451. https://doi.org/10.1155/2016/8035746

[19] Smith, R.J. and Wolkowicz, G.S.K. (2003) Growth and Competition in the Nutrient Driven Self-Cycling Fermentation Process. *Canadian Applied Mathematics Quarterly*, **10**, 171-177.

[20] Zhao, Z., Luo, C., Pang, L. and Chen, Y. (2016) Nonlinear Modeling of the Interaction between Phytoplankton and Zooplankton with the Impulsive Feedback Control. *Chaos Solitons and Fractals*, **87**, 255-261. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2016.04.011

[21] Pang, G.P. and Chen, L.S. (2014) Periodic Solution of the System with Impulsive State Feedback Control. *Nonlinear Dynamics*, **78**, 743-753. https://doi.org/10.1007/s11071-014-1473-3

[22] Zhao, Z., Pang, L.Y. and Song, X.Y. (2017) Optimal Control of Phytoplankton-Fish Model with the Impulsive Feedback Control. *Nonlinear Dynamics*, **88**, 2003-2011. https://doi.org/10.1007/s11071-017-3358-8

[23] Dai, C.J., Zhao, M. and Chen, L.S. (2012) Dynamic Complexity of an Ivlev-Type Prey-Predator System with Impulsive State Feedback Control. *Journal of Applied Mathematics*, **2012**, 341-360. https://doi.org/10.1155/2012/534276

[24] Nie, L.F., Teng, Z.D., Hu, L. and Peng, J.G. (2009) Existence and Stability of Periodic Solution of a Predator-Prey Model with State-Dependent Impulsive Effects. *Mathematics and Computers in Simulation*, **79**, 2122-2134. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2008.11.015

[25] Jiang, G. and Lu, Q. (2007) Impulsive State Feedback Control of a Predator-Prey Model. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **200**, 193-207. https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.12.013

[26] Jiang, G. and Lu, Q. (2006) The Dynamics of a Prey-Predator Model with Impulsive State Feedback Control. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **6**, 1301-1320. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2006.6.1301

[27] Liu, X. and Chen, L. (2003) Complex Dynamics of Holling Type II Lotka-Volterra Predator-Prey System with Impulsive Perturbations on the Predator. *Chaos Solitons and Fractals*, **2**, 311-320. https://doi.org/10.1016/S0960-0779(02)00408-3

[28] Liu, B., Zhang, Y. and Chen, L. (2005) Dynamic Complexities in a Lotka-Volterra Predator-Prey Model Concerning Impulsive Control Strategy. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, **2**, 517-531. https://doi.org/10.1142/S0218127405012338

[29] Samoilenko, A.M. and Perestyuk, N.A. (1995) Impulsive Differential Equations. World Scientific, Singapore. https://doi.org/10.1142/2892

[30] Zavalishchin, S.T. and Sesekin, A.N. (1997) Dynamic Impulse Systems Theory and Applications. Mathematics and Its Applications. Kluwer, Dordrecht, 394.

[31] Lakshmikantham, V. and Liu, X. (1989) On Quasi-Stability for Impulsive Differential Systems. *Nonlinear Analysis*, **13**, 819-828. https://doi.org/10.1016/0362-546X(89)90074-6

[32] Li, Z.X., Chen, L.S. and Liu, Z.J. (2012) Periodic Solution of a Chemostat Model with Variable Yield and Impulsive State Feedback Control. *Applied Mathematical Modelling*, **36**, 1255-1266.

[33] Zhao, Z., Zhang, J.Y., Pang, L.Y. and Chen, Y. (2015) Nonlinear Modelling of Ethanol Inhibition with the State Feedback Control. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **48**, 205-219.

[34] Dai, C.J., Zhao, M. and Yu, H.G. (2016) Dynamics Induced by Delay in a Nutrient-Phytoplankton Model with Diffusion. *Ecological Complexity*, **26**, 29-36. https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2016.03.001

[35] Liang, Z.Q. and Zeng, X.P. (2017) Periodic Solution of a Leslie Predator-Prey System with Ratio-Dependent and State Impulsive Feedback Control. *Nonlinear Dynamics*, **89**, 2941-2955. https://doi.org/10.1007/s11071-017-3637-4

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org