Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2018, 7(2), 139-144
Published Online February 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.72017

Topological Complexity Function on 3-Star Map

Qianghao Liu[1], Ziqing Fu[1], Simin Huang[1], Gengrong Zhang[2*]

[1]School of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning Guangxi
[2]School of Mathematics and Computing Science, Hunan First Normal University, Changsha Hunan
Email: *18152853519@163.com

Received: Jan. 17th, 2018; accepted: Feb. 2nd, 2018; published: Feb. 11th, 2018

Abstract

In this article, the concept of topological complexity function is used to research some equivalent conditions of the positive entropy of 3-star map, and some equivalent conclusions are obtained when the topological complexity function is greater than 3.

Keywords

Topological Complexity Function, Positive Entropy, 3-Star Map

3-星映射的拓扑复杂性函数

刘强豪[1]，符子晴[1]，黄思敏[1]，张更容[2*]

[1]广西大学，数学与信息科学学院，广西 南宁
[2]湖南第一师范学院，数学与计算科学学院，湖南 长沙
Email: *18152853519@163.com

收稿日期：2018年1月17日；录用日期：2018年2月2日；发布日期：2018年2月11日

摘 要

本文利用了拓扑复杂性函数的概念,研究3-星映射正熵的一些等价条件，得到了关于拓扑复杂性函数大于3的一些等价结论。

关键词

拓扑复杂性函数，正熵，3-星映射

*通讯作者。

文章引用: 刘强豪, 符子晴, 黄思敏, 张更容. 3-星映射的拓扑复杂性函数[J]. 应用数学进展, 2018, 7(2): 139-144.
DOI: 10.12677/aam.2018.72017

1. 引言

复杂性和混沌行为的研究是拓扑动力系统中一个极其重要的工作，这个研究最初是开始于 Li 和 Yorke。之后又有很多数学家根据他们对于这种现象的理解介绍了大量关于混沌的定义。而 Li-Yorke 混沌，Denavey 混沌和正熵是大家最感兴趣的。本文为了更好地研究 3-星映射的正熵的一些等价条件，借用拓扑复杂性函数的概念来刻画其性质，得出关于拓扑复杂性函数大于 3 的一些等价结论。

2. 预备知识

定义 1.1 [1] 设 T 是一个树，即不含圈的一维紧致连通的分支流形。T 的任一子集被称为 T 的子树，如果它本身是一个树。任取 $x \in T$，用 $V(x)$ 表示 $T-\{x\}$ 的连通分支的个数。若 $V(x) \geq 3$，则称 x 是 T 的一个分支点；若 $V(x)=1$，则称 x 是 T 的一个端点。记 $D(T)=\{x: V(x) \geq 3\}$，$E(T)=\{x: V(x)=1\}$。若 T 是一个树且只有一个分支点和三个端点，则称 T 为 3-星。

一个拓扑动力系统(缩写 TDS)。是指一个对 (X, f)，其中 X 是一个紧致度量空间，有度量 d，并且 $f: X \rightarrow X$ 是一个连续映射。

定义 1.2 令 (X, f) 是一个 TDS，这个系统 (X, f) (或者映射 f)被称为

(1) 拓扑传递的，如果对于任意两个 X 的非空开子集 U,V，存在 $n \geq 0$ 使得 $f^n U \cap V \neq \varnothing$。

(2) 强混合的，如果对于任意两个 X 的非空开子集 U,V，存在 $N \geq 0$ 使得 $f^n U \cap V \neq \varnothing$ 对任意 $n \geq N$。

定义 1.3 令 (X, f) 是一个 TDS，对一个 X 的子集的多元组 $\tilde{A}=(A_1, \cdots, A_k)$，一个子集 $J \subset Z_+$ 称为对 $\tilde{A}$ 的独立集，如果对于任意非空有限子集 $I \subset J$ 我们有

$$\bigcap_{i \in I} f^{-i} A_{s(i)} \neq \varnothing$$

对所有 $s \in \{1, \cdots, k\}^I$。

定义 1.4 一个多元组 $\tilde{x}=\langle x_1, \cdots, x_k\rangle \in X^k$ 被称为 IE-多元组，如果对于 $\tilde{x}$ 的任意乘积邻域 $U_1 \times \cdots \times U_k$，这个多元组 $(U_1, \cdots, U_k)$ 有一个正密度的独立集。

一个多元组 $\tilde{x}=\langle x_1, \cdots, x_k\rangle \in X^k$ 被称为基本的，如果 $x_i \neq x_j$ 对于任意 $1 \leq i<j \leq k$。

定义 1.5 [2] 令 (X, f) 是一个 TDS，这个系统 (X, f) 被称为

(1) 一致正熵，如果每个基本对 $\langle x_1, x_2\rangle \in X^2$ 是一个 IE-多元组。

(2) 拓扑 K，如果任意基本 k-多元组 $\langle x_1, \cdots, x_k\rangle \in X^k$ 是一个 IE-多元组对于任意 $k \geq 2$。

3. 主要结果和定理

引理 2.1 [3] 令 $f \in C^0(T)$，f 是拓扑传递的，则 $\overline{P(f)}=\overline{R(f)}=T$。

引理 2.2 [4] 令 $f \in C^0(T)$，下列几个条件是等价的。

(1) f 是拓扑传递的。

(2) 存在点 $x \in T$，使得 $\omega(x, f)=T$。

(3) 对每个非空开集 $U \subset T$，有 $\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U)}=T$。

定理 2.3 令 $f \in C^0(T)$，y 是不动点，$T-\{y\}$ 含有 l 个连通分支，下列几个条件是等价的：

(1) f^l 是拓扑传递的。

(2) f 是强混合的。

(3) T 中任一非退化的开的连通集 J 以及 $\operatorname{int} T$ 内任一闭连通集 H，存在一个 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时 $f^n(J) \supset H$。

证明：

(1)⇒(3)：因为 f^l 是拓扑传递的，所以 f 是拓扑传递的。由引理 2.1 可知，$\overline{P(f)}=T$，则 T 中任一非退化的开连通集 J 中有一个周期点 z，设 $T-H$ 的连通分支为 $C_1,C_2,\cdots,C_m$。对每个 $i \in N_m$，设 $x_i \in C_i$ 是 T 的内部的周期点，并设 α 是周期点 x_i 和 z 的周期的最小公倍数。设 $g=f^{\alpha}$，π_i 为 x_i 在 f 作用下的轨道，则 $\bigcup_{i=1}^{m}\pi_i$ 和 $\{z\}$ 内的点都是 $g=f^{\alpha}$ 的不动点。由引理 2.2 可知 $\bigcup_{n=0}^{\infty} g^n(J)$ 是一个连通开集且在 T 中稠密。所以每个 $u \in \bigcup_{i=1}^{m}\pi_i$，存在非负整数 k_u，使得 $u \in g^{k_u}(J)$。记 $\beta=\max\left\{k_u : u \in \bigcup_{i=1}^{m}\pi_i\right\}$。则 $H \subset \bigcup_{i=1}^{m}\pi_i \subset g^{\beta}(J)$。所以对一切 $n>\alpha\beta$，有 $f^n(J) \supset H$。

(3)⇒(2)：任意 T 中的两个开子集 U,V。取任一非退化的开连通集 $J \subset U$，任一闭连通集 $H \subset V$。存在 $N>0$ 使得 $k>N$ 时 $f^k(J) \supset H$，所以 $f^k(U) \supset f^k(J) \supset H$，所以 $f^k(U) \cap V \neq \varnothing$，即 f 是强混合的。

(2)⇒(1)：因为 f 是强混合的，由定义对任意 T 中的两个开子集 U,V，存在 $N \geq 0$ 对任意 $n \geq N$ 使得 $f^n U \cap V \neq \varnothing$。取 $n=lN$，当然 $n \geq N$ 且 $\left(f^l\right)^N(U) \cap V \neq \varnothing$。所以 f^l 是拓扑传递的。

即证定理 2.3。

定理 2.4 令 $f \in C^0(T)$，如果 f 是拓扑传递的，则下列其中的一个结论当且仅有一个成立。

(1) f 是强混合的。

(2) 存在一个不动点 y 和 $k>1$，并且 $T-\{y\}$ 有 k 个连通分支，存在非退化的闭子树 $\overline{T_1},\cdots,\overline{T_k}$，使得 $T=\bigcup_{i=1}^{k}\overline{T_i}$，$\overline{T_i} \cap \overline{T_j}=\{y\}$ 对 $i \neq j$，有 $f\left(\overline{T_i}\right)=\overline{T_{i+1}}$ 对 $i=1,\cdots,k-1$，并且 $f\left(\overline{T_k}\right)=\overline{T_1}$。

证明： 由引理 2.2，因为 f 是拓扑传递的，所以存在 $x \in T$，使得 $\omega(x,f)=T$。取一个任意正整数 s，设 $B_i=\omega\left(f^i(x),f^s\right)$ 对 $0 \leq i<s$，因为 $B_0 \cup \cdots \cup B_{s-1}=T$，所以至少有一个 B_i 有非空内部，又因为 $f(B_i)=B_{i+1}$ 对于 $0 \leq i \leq s-2$，$f(B_{s-1})=B_0$，所以每个 B_i 都有非空的内部。

假定 $\operatorname{int} B_i \cap \operatorname{int} B_j \neq \varnothing$，则存在正整数 n，使得 $f^{sn+i}(x) \in \operatorname{int} B_i \cap \operatorname{int} B_j$。因为 $B_i=\omega\left(f^{sn+i}(x),f^s\right)$，$B_j$ 是 f^s-不变的。所以 $B_i \subseteq B_j$，同样地 i,j 可以交换，所以我们有 $B_i=B_j$。即如果 B_i 和 B_j 的内部相交，则 $B_i=B_j$。

令 S 表示 T 的所有子树 T_i 的集合，且 T_i 是 B_i 内部的分支对于 $i \in \{0,\cdots,s-1\}$。因此 T_i 是一个互不相交的子树，它的并在 T 中稠密。因为 x 的轨道是稠密的，则对于任意 $T_2 \in T$，存在一个正整数 k 使得 $f^k\left(\overline{T_1}\right) \subseteq \overline{T_2}$。所以 S 是有限的，称 $S=\{T_1,\cdots,T_k\}$，$\overline{T_i}(i=1,\cdots,k)$ 被 f 周期性排队。如果 $h=1$，则 $B_i=T$ 对 $i=1,\cdots,s-1$，所以 f 是强混合的。如果 $k>1$，不妨假设 $k=2$，令 y 是 f 的一个不动点，如果 $y \in T_i$，则 $f\left(\overline{T_i}\right)=\overline{T_i}$，这与 $f\left(\overline{T_i}\right) \subseteq \overline{T_{i+1}}$ 且 T_i 互不相交矛盾。类似地 y 也不可能 T 的端点。故 y 只能是 $\overline{T_i}$ 和 $\overline{T_j}$ 的公共端点，则 $f\left(\overline{T_i}\right)=\overline{T_j}$，$f\left(\overline{T_j}\right)=\overline{T_i}$。因此我们有(2)中的情况且 f^2 不是拓扑传递的。

因为 s 是任意的，则证明了(1)成立如果 f^k 是拓扑传递的。(2)成立如果 f^k
不是拓扑传递的。由定理 2.3，f 的全拓扑传递与 f 强混合等价，即证明了定理 2.4。

引理 2.5 [5] 令 (X,f) 是一个拓扑动力系统，如果 $C(\mathcal{U})>2$ 对任意开覆盖 $\mathcal{U}$，$\mathcal{U}$ 包含两个非稠密的

开集，则 f 是拓扑传递的。其中 $C(\mathcal{U})=\lim_{n\to\infty}N\left(\vee_{i=1}^{n}f^{-i}(\mathcal{U})\right)$。

定理 2.6 令 f 是 3-星映射，则下列条件是等价的：

(1) f 是强混合的；

(2) 拓扑复杂性函数 $C(\mathcal{U})>3$ 对任意开覆盖 $\mathcal{U}$，$\mathcal{U}$ 包含两个非稠密的开集，其中 $C(\mathcal{U})=\lim_{n\to\infty}N\left(\vee_{i=1}^{n}f^{-i}(\mathcal{U})\right)$；

(3) f 是一致正熵；

(4) f 是拓扑 K 系统。

证明：(4)⇒(3)：

因为 f 是拓扑 K 系统，所以对于每个基本对的多元组 $\langle x_1,\cdots,x_k\rangle\in X^k$ 是一个 IE-多元组对所有 $k\ge 2$。当 $k=2$ 时每个基本对 $\langle x_1,x_2\rangle\in X^2$ 是一个 IE-多元组，所以 f 是一致正熵的。

(3)⇒(2)：

令 $\mathcal{U}=\{U_1,U_2\}$，因为 U_1,U_2 非稠密，所以 $U_1\cup U_2=X$，$\overline{U_1}\ne X$，$\overline{U_2}\ne X$，且 $C(\mathcal{U})$ 不可能等于 1。

用反证法，加假设存在一个 $\mathcal{U}$，使得 $C(\mathcal{U})\le 3$。不妨先设 $C(\mathcal{U})=3$。即存在 N_0 使得 $n\ge N_0$ 时 $N\left(\vee_{i=1}^{n}f^{-i}(\mathcal{U})\right)=3$。所以有

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n}f^{-i}\left(U_{a_i^n}\right)\right)\cup\left(\bigcap_{i=1}^{n}f^{-i}\left(U_{b_i^n}\right)\right)\cup\left(\bigcap_{i=1}^{n}f^{-i}\left(U_{c_i^n}\right)\right)=X$$

其中 $a_i^n,b_i^n,c_i^n\in\{1,2\}$，$\sum_{i=1}\left(a_i^n-b_i^n\right)^2\ne 0$，$\sum_{i=1}\left(b_i^n-c_i^n\right)^2\ne 0$，$\sum_{i=1}\left(a_i^n-c_i^n\right)^2\ne 0$。由狄默根律

$$\left[\left(\bigcap_{i=1}^{n}f^{-i}\left(U_{a_i^n}\right)\right)\cup\left(\bigcap_{i=1}^{n}f^{-i}\left(U_{b_i^n}\right)\right)\right]^c\cap\left(\bigcap_{i=1}^{n}f^{-i}\left(U_{c_i^n}\right)\right)^c=\varnothing$$

再次用狄默根律整理得：

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n}f^{-i}\left(U_{a_i^n}^c\right)\right)\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}f^{-i}\left(U_{b_i^n}^c\right)\right)\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}f^{-i}\left(U_{c_i^n}^c\right)\right)=\varnothing$$

那么对于任意 $j_1,j_2,j_3\le n$，$f^{-j_1}\left(U_{a_{j_1}^n}^c\right)\subset\left(\bigcup_{i=1}^{n}f^{-i}\left(U_{a_i^n}^c\right)\right)$，$f^{-j_2}\left(U_{a_{j_2}^n}^c\right)\subset\left(\bigcup_{i=1}^{n}f^{-i}\left(U_{b_i^n}^c\right)\right)$，$f^{-j_3}\left(U_{a_{j_3}^n}^c\right)\subset\left(\bigcup_{i=1}^{n}f^{-i}\left(U_{c_i^n}^c\right)\right)$。所以 $f^{-j_1}\left(U_{a_{j_1}^n}^c\right)\cap f^{-j_2}\left(U_{a_{j_2}^n}^c\right)\cap f^{-j_3}\left(U_{a_{j_3}^n}^c\right)=\varnothing$。取 $x_1\in X-\overline{U_1}$，$x_2\in X-\overline{U_2}$，$V_1=X-\overline{U_1}$，$V_2=X-\overline{U_2}$。则 $x_1\in V_1\subset U_1^c$，$x_2\in V_2\subset U_2^c$。所以

$$f^{-j_1}\left(V_{a_{j_1}^n}\right)\cap f^{-j_2}\left(V_{b_{j_2}^n}\right)\cap f^{-j_3}\left(V_{c_{j_3}^n}\right)=\varnothing$$

因为 f 是一致正熵，所以 $\langle x_1,x_2\rangle$ 的邻域 (V_1,V_2) 有一个正密度的独立集 J，因为 J 是有正密度的，所以 J 无限。对于任意非空有限子集 $I\subset J$ 我们有

$$\bigcap_{i\in I}f^{-i}A_{s(i)}\ne\varnothing$$

对所有 $s\in\{1,2\}^I$。取 $I\subset J$ 使得 $I\cap\{1,2,\cdots,N_0\}=\varnothing$。且 $|I|\ge 3$，$j_1',j_2',j_3'\ge N_0$。取 $n>\max\{j_1',j_2',j_3'\}$ 那么有

$$f^{-j_1'}\left(V_{s(j_1')}\right)\cap f^{-j_2'}\left(V_{s(j_2')}\right)\cap f^{-j_3'}\left(V_{s(j_3')}\right)\ne\varnothing$$

所以得出矛盾，同理$C(\mathcal{U})=2$时也与f是一致正熵矛盾。所以假设不成立，对任意开覆盖$\mathcal{U}$，$\mathcal{U}$包含两个非稠密的开集，拓扑复杂性函数$C(\mathcal{U})>3$。

(2)⇒(1)：

由引理2.5，因为$C(\mathcal{U})>3>2$，所以f是拓扑传递的，下证f是强混合的。

反证法：假设f不是强混合的，由定理2.4，则存在一个不动点y和$k>1$，并且$T-\{y\}$有k个连通分支，存在非退化的闭子树$\overline{T_1},\cdots,\overline{T_k}$，使得$T=\bigcup_{i=1}^{k}\overline{T_i}$，$\overline{T_i}\cap\overline{T_j}=\{y\}$对$i\neq j$，有$f\left(\overline{T_i}\right)=\overline{T_{i+1}}$对$i=1,\cdots,k-1$，并且$f\left(\overline{T_k}\right)=\overline{T_1}$。因为$f$是3-星映射，所以有两种情况。令$y$为不动点，$T$的三个端点分别为$e_1,e_2,e_3$，分支点为$O$。

情况1. y为分支点O，那么$k=3$，$T-\{y\}$有3个连通分支，存在非退化的闭子树$\overline{T_1},\overline{T_2},\overline{T_3}$使得$T=\bigcup_{i=1}^{3}\overline{T_i}$。$\overline{T_i}\cap\overline{T_j}=\{y\}$对于$i\neq j$，有$f\left(\overline{T_1}\right)=\overline{T_2},f\left(\overline{T_2}\right)=\overline{T_3},f\left(\overline{T_3}\right)=\overline{T_1}$成立。

令$\mathcal{U}=\{U_1,U_2\}$，$U_1=\overline{T_1}\cup B(y,\varepsilon)$，$U_2=\overline{T_2}\cup\overline{T_3}\cup B(y,\varepsilon)$，其中$\varepsilon=\min_{1\le i\le 3}1/2\,d(y,e_i)$，$A_1=f^{-1}U_1\cap f^{-2}U_2\cap f^{-3}U_2\supseteq\overline{T_3}$，$A_2=f^{-1}U_2\cap f^{-2}U_1\cap f^{-3}U_2\supseteq\overline{T_2}$，$A_3=f^{-1}U_2\cap f^{-2}U_2\cap f^{-3}U_1\supseteq\overline{T_1}$，$A_1\cup A_2\cup A_3=T$。

当$n\to\infty$时，

$A_1^n=\bigcap_{j=1}^{n}f^{-j}\left(U_{s(j)}\right)\supseteq\overline{T_3}$。其中$s(j)=1$当$j-1\equiv 0(\bmod 3)$，$s(j)=2$当$j$为其他值。

$A_2^n=\bigcap_{j=1}^{n}f^{-j}\left(U_{s(j)}\right)\supseteq\overline{T_2}$。其中$s(j)=1$当$j-2\equiv 0(\bmod 3)$，$s(j)=2$当$j$为其他值。

$A_3^n=\bigcap_{j=1}^{n}f^{-j}\left(U_{s(j)}\right)\supseteq\overline{T_1}$。其中$s(j)=1$当$j-3\equiv 0(\bmod 3)$，$s(j)=2$当$j$为其他值。

所以$A_1^n\cup A_2^n\cup A_3^n=T$。所以当$n\to\infty$时，$C(\mathcal{U})=3$，这与$C(\mathcal{U})>3$矛盾。所以$f$是强混合的。

情况2. y不为分支点O，不妨设y在(O,e_1)上，那么$k=2$，$T-\{y\}$有2个连通分支，存在非退化的闭子树$\overline{T_1},\overline{T_2}$使得$T=\overline{T_1}\cup\overline{T_2}$。$\overline{T_1}\cap\overline{T_2}=\{y\}$。有$f\left(\overline{T_1}\right)=\overline{T_2},f\left(\overline{T_2}\right)=\overline{T_1}$成立。

令$\mathcal{U}=\{U_1,U_2\}$，$U_1=\overline{T_1}\cup B(y,\varepsilon)$，$U_2=\overline{T_2}\cup B(y,\varepsilon)$，其中$\varepsilon=\min_{1\le i\le 3}1/2\,d(y,e_i)$，那么$A_1=f^{-1}U_1\cap f^{-2}U_2\supseteq\overline{T_2}$，$A_2=f^{-1}U_2\cap f^{-2}U_1\supseteq\overline{T_1}$，$A_1\cup A_2=T$。

当$n\to\infty$时，

$A_1^n=\bigcap_{j=1}^{n}f^{-j}\left(U_{s(j)}\right)\supseteq\overline{T_2}$，其中$s(j)=1$当$j-1\equiv 0(\bmod 2)$，$s(j)=2$当$j$为其他值。

$A_2^n=\bigcap_{j=1}^{n}f^{-j}\left(U_{s(j)}\right)\supseteq\overline{T_1}$，其中$s(j)=1$当$j-2\equiv 0(\bmod 2)$，$s(j)=2$当$j$为其他值。

所以$A_1^n\cup A_2^n=T$，当$n\to\infty$时，$C(\mathcal{U})=2$，这与$C(\mathcal{U})>3$矛盾。所以f是强混合的。

综合这两种情况，即证f是强混合的。

(1)⇒(4)：

因为f是强混合的。由定理2.3的(3)，存在$n\ge 1$和非空开子集$V_i\subset U_i$对$1\le i\le k$。使得$\bigcap_{i=1}^{n}f^{n}(U_i)\supset\bigcup_{i=1}^{k}V_i$。因为$f^{-n}U_{s(1)}\cap f^{-2n}U_{s(2)}\cap\cdots\cap f^{-mn}U_{s(m)}\neq\varnothing$对所有的$m\ge 1$，$s\in\{1,2,\cdots,k\}^m$。则$nN=\{n,2n,3n,\cdots\}$是$(U_1,\cdots,U_k)$的一个独立集。

所以每个非空开子集$(U_1,\cdots,U_k)$的k-多元组有一个正密度的独立集，即f是拓扑K系统。

即证定理2.6。

基金项目

国家自然基金(NO:11461002, 11771149)；广西自然科学基金(NO:2016GXNSFAA380317)。

参考文献 (References)

[1] 孙太祥, 席鸿建, 张更容. 树映射的动力学[M]. 南宁: 广西科学科技出版社, 2011.

[2] Blanchard, F., Host, B. and Maass, A. (2000) Topological Complexity. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **20**, 641-662. https://doi.org/10.1017/S0143385700000341

[3] Ye, X. (1999) No Division and Entropy of Tree Maps. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **9**, 1859-1865. https://doi.org/10.1142/S0218127499001334

[4] Block, L. and Coppel, W.A. (1992) Dynamics in One Dimension. Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/BFb0084762

[5] Li, J. (2011) Chaos and Entropy for Interval Maps. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **23**, 333-352. https://doi.org/10.1007/s10884-011-9206-5