

Mixed Finite Volume Element Method for Regularized Long Wave Burgers Equation

Xue Bai, Hong Li, Zhichao Fang

School of Mathematical Science, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia
Email: baixuemath@163.com, smslh@imu.edu.cn, mazcfang@aliyun.com

Received: Mar. 1st, 2018; accepted: Mar. 20th, 2018; published: Mar. 27th, 2018

Abstract

The mixed finite volume element method for the regularized long wave Burgers equation is developed and studied. By introducing a transfer operator which maps the trial function space into the test function space, the semi-discrete and linear backward Euler fully discrete mixed finite volume element schemes are constructed. Stability analysis for semi-discrete scheme is given, the existence and uniqueness of the solutions are proved, and optimal error estimates for these schemes are obtained. Finally, numerical experiments are given to verify the theoretical results and the effectiveness of the proposed schemes.

Keywords

Mixed Finite Volume Element Method, Regularized Long Wave Burgers Equation, Optimal Error Estimate

正则长波Burgers方程的混合有限体积元方法

白雪, 李宏, 方志朝

内蒙古大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特
Email: baixuemath@163.com, smslh@imu.edu.cn, mazcfang@aliyun.com

收稿日期: 2018年3月1日; 录用日期: 2018年3月20日; 发布日期: 2018年3月27日

摘要

本文研究了正则长波Burgers方程的混合有限体积元方法。引入迁移算子把试探函数空间映射为检验函数空间, 构造了半离散和线性向后Euler全离散混合有限体积元格式, 证明了两种离散格式解的存在唯一性, 并得到了最优阶误差估计。最后, 给出数值算例来验证理论分析结果和数值格式的有效性。

关键词

混合有限体积元方法, 正则长波Burgers方程, 最优阶误差估计

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文考虑如下正则长波 Burgers 方程

$$\begin{cases} (a) & u_t + \sigma u_x + \delta u u_x - \alpha u_{xx} - \beta u_{xxt} = 0, (x, t) \in \Omega \times \Gamma, \\ (b) & u(a, t) = u(b, t) = 0, t \in \bar{\Gamma}, \\ (c) & u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\Omega = (a, b)$, $\Gamma = (0, T]$, $0 < T < \infty$, 系数 α, δ, β 和 σ 是给定的正常数。 α 和 β 分别为耗散系数和色散系数。 $u_0(x)$ 为给定的初始函数。

RLW-Burgers 方程(1)又称为 Benjamin-Bona-Mahony-Burgers 方程, 是带有耗散项 $-\alpha u_{xx}$ 的正则长波方程, 这类数学物理方程在非线形波问题中有着十分重要的地位。因此, 求解此类问题的方法受到广泛的重视, 文献[1]利用未知函数变换的思想, 得到了 RLW-Burgers 方程的解析解, 文献[2]运用一类含参数的 G 展开法得到了多种函数形式的显式行波解。这些解析解是在限定了初边值条件下给出的, 因此研究该方程的数值计算方法是很有意义的。文献[3]研究了 RLW-Burgers 方程的有限差分法, 给出了收敛性和稳定性分析。文献[4]构造了 RLW-Burgers 方程的 H^1 -Galerkin 混合有限元格式, 给出了半离散和全离散格式的最优阶误差估计, 并给出数值实验算例。文献[5]运用径向基函数法数值求解了高维广义 Benjamin-Bona-Mahony-Burgers 方程。

混合有限体积元方法又称为混合控制体积方法, 最早是由 Russel 在文献[6]中求解线性椭圆问题时提出, 随后文献[7] [8]通过数值实验验证该方法的可行性。Chou 等人在文献[9] [10]中分别在三角形网格和矩形网格剖分下, 使用最低阶 Raviart-Thomas 有限元空间作为试探函数空间, 构造了椭圆方程的混合有限体积元格式并给出了最优阶误差估计。该方法不仅可以利用有限体积元方法的简便性同时求解多个不同的物理量, 而且还可以保持某些物理量的局部守恒性, 因此该方法自提出以来得到了很大的关注和发展, 已经被用来求解二阶拟线性椭圆方程[11]、正则长波方程[12]、抛物方程[13] [14]、阻尼 sine-Gordon 方程[15]等数学物理方程。本文研究了 RLW-Burgers 方程(1)的混合有限体积元方法, 构造了半离散和线性向后 Euler 全离散混合有限体积元格式, 给出了理论分析并通过数值算例验证了方法的有效性。

本文余下部分安排如下: 第 2 节, 给出混合有限元形式, 并引入迁移算子构造了半离散混合有限体积元格式; 第 3 节, 给出了迁移算子的一些性质, 并给出半离散格式解的存在唯一性和稳定性以及误差估计; 第 4 节, 构造了线性向后 Euler 全离散格式, 给出了全离散格式解的存在唯一性和最优阶误差估计; 第 5 节, 给出了数值算例验证该方法的有效性。本文理论分析时所用的 C 都是与空间网格参数 h 和时间离散步长 Δt 无关的正常数。

2. 半离散混合有限体积元形式

引入流量函数 $f(u) = \sigma u + \frac{\delta}{2} f(u) - \alpha u_x - \beta u_{xt}$, 其中 $f(u) = u^2$, 于是可以把原方程(1)改写为下面的

形式

$$\begin{cases} (a) & u_t + p_x = 0, (x, t) \in \Omega \times \Gamma, \\ (b) & p = \sigma u + \frac{\delta}{2} f(u) - \alpha u_x - \beta u_{xt}, (x, t) \in \Omega \times \Gamma, \\ (c) & u(a, t) = u(b, t) = 0, t \in \bar{\Gamma}, \\ (d) & u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega. \end{cases} \quad (2)$$

则相应的混合变分形式为: 求 $\{u(t), p(t)\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, 使得

$$\begin{cases} (a) & (u_t, v) - (v_x, p) = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ (b) & (p, q) - \sigma(u, q) + \alpha(u_x, q) + \beta(u_{xt}, q) = \frac{\delta}{2}(f(u), q), \forall q \in L^2(\Omega), \\ (c) & u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega. \end{cases} \quad (3)$$

现在对区域 $\bar{\Omega} = [a, b]$ 使用以下节点做原始网格剖分: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$. 对应的对偶网格剖分为: $a = x_0 < x_{1/2} < x_{3/2} < \dots < x_{N-1/2} < x_N = b$, 其中 $x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2, (0 \leq i \leq N-1)$. 则原始网格剖分 $T_h = \{A_i = [x_i, x_{i+1}]; i = 0, 1, \dots, N-1\}$. 记 $h_i = x_{i+1} - x_i$, $h = \max_{0 \leq i \leq N-1} h_i$. 假设 T_h 为拟一致剖分, 即存在正常数 α 使得 $h_i \geq \alpha h, (i = 0, 1, \dots, N-1)$. 记 $A_0^* = [x_0, x_{1/2}]$, $A_N^* = [x_{N-1/2}, x_N]$, $A_i^* = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}], (i = 1, 2, \dots, N-1)$, 则对偶剖分为 $T_h^* = \{A_i^*: i = 0, 1, \dots, N\}$. 基于剖分 T_h , 选取有限元空间 $H_{0h} \times L_h$ 作为试探函数空间, 其中

$$H_{0h} = \{\omega_h \in H_0^1(\Omega): \omega_h \in P_1(A), \forall A \in T_h\}, L_h = \{v_h \in L^2(\Omega): v_h|_A \in P_0(A), \forall A \in T_h\}.$$

记 $\{\phi_i: i = 1, 2, \dots, N-1\}$ 和 $\{\chi_{A_i}: i = 0, 1, \dots, N-1\}$ 分别为有限元空间 H_{0h} 和 L_h 的基, 其中 ϕ_i 是分段线性多项式(见文献[12]), χ_{A_i} 是集合 A_i 的特征函数.

定义迁移算子 $\gamma_h: H_{0h} \rightarrow L^2(\Omega)$ 如下

$$\gamma_h \omega_h = \sum_{i=1}^{N-1} \omega_h(x_i) \chi_{A_i^*}, \quad \forall \omega_h \in H_{0h}.$$

则有 $\gamma_h \phi_i = \chi_{A_i^*} (i = 1, 2, \dots, N-1)$. 选取检验函数空间 $Y_h = R(\gamma_h)$ 为 γ_h 的值域. 系统(1)中(a)和(b)方程分别在对偶剖分和原始剖分上进行积分, 得到

$$\begin{cases} (a) & \int_{A_i^*} u_t dx + p(x_{i+1/2}, t) - p(x_{i-1/2}, t) = 0, t \in \Gamma, (1 \leq i \leq N-1), \\ (b) & \int_{A_i} (p - \sigma u + \alpha u_x + \beta u_{xt}) dt = \frac{\delta}{2} \int_{A_i} f(u) dx, t \in \Gamma, (0 \leq i \leq N-1). \end{cases} \quad (4)$$

利用迁移算子 γ_h , 可以把(4)改写为下列的形式:

$$\begin{cases} (a) & (u_t + p_x, \gamma_h v_h) = 0, \forall v_h \in H_{0h}, \\ (b) & (p - \sigma u + \alpha u_x + \beta u_{xt}, q_h) = \frac{\delta}{2}(f(u), q_h), \forall q_h \in L_h. \end{cases} \quad (5)$$

注意到

$$(p_x, \gamma_h v_h) = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{A_i^*} (p_x v_h(x_i)) dx = \sum_{i=1}^{N-1} v_h(x_i) (p(x_{i+1/2}) - p(x_{i-1/2})) dx = b(\gamma_h v_h, p). \quad (6)$$

通过计算可知 $b(\gamma_h v_h, q_h) = -(v_{hx}, q_h), \forall v_h \in H_{0h}, \forall q_h \in L_h$, 利用形式(5)可以得到半离散混合有限体积

元格式: 求 $\{u_h(t), p_h(t)\} \in H_{0h} \times L_h$, 使得

$$\begin{cases} (a) (u_{ht}, \sigma_h v_h) - (v_{ht}, p_h) = 0, \forall v_h \in H_{0h}, \\ (b) (p_h, q_h) - \sigma(u_h, q_h) + \alpha(u_{hx}, q_h) + \beta(u_{hxt}, q_h) = \frac{\delta}{2}(f(u_h), q_h), \forall q_h \in L_h, \\ (c) u_h(0) = \pi_h u_0, \end{cases} \quad (7)$$

其中 π_h 是椭圆投影算子, 具体定义见第 3 节。

3. 半离散混合有限体积元形式的误差估计

为了进行误差估计, 首先给出迁移算子 γ_h 的性质。

引理 3.1 [12]: 迁移算子 γ_h 是有界的, 且满足

$$\|\gamma_h \omega_h\| \leq \sqrt{3} \|\omega_h\|, \forall \omega_h \in H_{0h}. \quad (8)$$

引理 3.2 [12]: 迁移算子 γ_h 满足对称性, 即有

$$(\omega_h, \gamma_h v_h) = (\gamma_h \omega_h, v_h), \forall v_h, \omega_h \in H_{0h}. \quad (9)$$

引理 3.3 [12]: 迁移算子 γ_h 满足下述正定性

$$(\gamma_h \omega_h, \omega_h) \geq \frac{3}{4} \|\omega_h\|^2, \forall \omega_h \in H_{0h}. \quad (10)$$

引理 3.4 [12]: 设 I 是恒等算子, 则迁移算子 γ_h 满足下述性质

$$\|(I - \gamma_h) \omega_h\| \leq \frac{\sqrt{12}}{12} h |\omega_h|_1, \forall \omega_h \in H_{0h}. \quad (11)$$

$$|(v_h, (I - \gamma_h) \omega_h)| \leq \frac{\sqrt{12}}{12} h |p_h|_1 \|\omega_h\|, \forall p_h, \omega_h \in H_{0h}. \quad (12)$$

下面引入椭圆投影算子 $\pi_h: H_0^1(\Omega) \rightarrow H_{0h}$, 满足

$$((\omega - \pi_h \omega)_x, v_h) = 0, \forall v_h \in L_h, \text{ 其中 } \omega \in H_0^1(\Omega). \quad (13)$$

同时引入 L^2 正交投影算子 $R_h: L^2(\Omega) \rightarrow L_h$, 满足

$$(\varphi - R_h \varphi, v_h) = 0, \forall v_h \in L_h, \text{ 其中 } \varphi \in L^2(\Omega). \quad (14)$$

由文献[16] [17]可知, 对 $i=0,1$, 下列估计式成立

$$\left\| \frac{\partial^i \omega}{\partial t^i} - \frac{\partial^i \pi_h \omega}{\partial t^i} \right\| \leq Ch \left\| \frac{\partial^i \omega}{\partial t^i} \right\|, \text{ 其中 } \frac{\partial^i \omega}{\partial t^i} \in H_0^1(\Omega), \quad (15)$$

$$\left\| \frac{\partial^i \omega}{\partial t^i} - \frac{\partial^i \pi_h \omega}{\partial t^i} \right\|_1 \leq Ch \left\| \frac{\partial^i \omega}{\partial t^i} \right\|_2, \text{ 其中 } \frac{\partial^i \omega}{\partial t^i} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad (16)$$

$$\left\| \frac{\partial^i \varphi}{\partial t^i} - \frac{\partial^i R_h \varphi}{\partial t^i} \right\| \leq Ch \left\| \frac{\partial^i \varphi}{\partial t^i} \right\|, \text{ 其中 } \frac{\partial^i \varphi}{\partial t^i} \in H^1(\Omega). \quad (17)$$

利用算子 γ_h , 可以得到下述引理。

引理 3.5 [12]: 存在与 h 无关的正常数 C 使得

$$\|v - \gamma_h \pi_h v\| \leq Ch \|v\|_1, \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (18)$$

$$\left| (v, (I - \gamma_h) \omega_h) \right| \leq Ch \|v\|_1 \|\omega_h\|, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \forall \omega_h \in H_{0h}. \quad (19)$$

为了对半离散格式进行误差估计, 将误差写为

$$\begin{aligned} u - u_h &= u - \pi_h u + \pi_h u - u_h = \xi + \eta, \\ p - p_h &= p - R_h p + R_h p - p_h = \rho + \varepsilon. \end{aligned}$$

格式(3)和格式(7)作差, 利用投影算子可得误差方程为

$$\begin{cases} (a) \quad (\eta_t, \gamma_h v_h) - (v_{hx}, \varepsilon) = -(\xi_t, \gamma_h v_h) - (u_t, (I - \gamma_h) v_h), \quad \forall v_h \in H_{0h}, \\ (b) \quad \alpha(\eta_x, q_h) + \beta(\eta_{xt}, q_h) + (\varepsilon, q_h) - \sigma(\eta, q_h) = (\xi, q_h) - \frac{\delta}{2}(f(u_h) - f(u), q_h), \quad \forall q_h \in L_h, \\ (c) \quad \eta(0) = \pi_h u(0) - u_h(0) = 0. \end{cases} \quad (20)$$

类似于文献[12]中的证明, 可以得到下述半离散格式解的存在唯一性和稳定性。

定理 3.1: 半离散格式(7)存在唯一解 $\{u_h, p_h\}$, 且存在与 h 和 t 无关的正常数 C , 使得

$$\begin{aligned} \|u_h(t)\|_1 &\leq C \|u_0\|_1, \quad \|u_h(t)\|_\infty \leq C \|u_0\|_1, \\ \|u_{ht}(t)\|_1 + \|p_h(t)\| &\leq C \left(\|u_0\|_1 + \|u_0\|_1^2 + \|u_0\|_1^3 \right). \end{aligned}$$

下面给出半离散格式(7)的误差估计。

定理 3.2: 设 $\{u, p\}$ 是混合变分形式(3)的解, $\{u_h, p_h\}$ 是半离散格式(7)的解, 则存在与 h 和 t 无关的正常数 C , 使得

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_h(t)\|_1 &\leq Ch \left(\|u(t)\|_2 + \left(\int_0^t (\|u\|_1^2 + \|u_t\|_1^2) ds \right)^{\frac{1}{2}} \right), \\ \|u_t(t) - u_{ht}(t)\|_1 &\leq Ch \left(\|u_t(t)\|_2 + \|u(t)\|_1 + \left(\int_0^t (\|u\|_1^2 + \|u_t\|_1^2) ds \right)^{\frac{1}{2}} \right), \\ \|p(t) - p_h(t)\| &\leq Ch \left(\|p(t)\|_1 + \|u(t)\|_1 + \|u_t\|_1 + \left(\int_0^t (\|u\|_1^2 + \|u_t\|_1^2) ds \right)^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

证明: 在误差方程(20)中取 $v_h = \eta, q_h = \eta_x$, 则有

$$\begin{aligned} &\alpha(\eta_x, \eta_x) + \beta(\eta_{xt}, \eta_x) + (\eta_t, \gamma_h \eta) - \sigma(\eta, \eta_x) \\ &= -(\xi_t, \gamma_h \eta) - (u_t, (I - \gamma_h) \eta) + (\xi, \eta_x) - \frac{\delta}{2}(f(u_h) - f(u), \eta_x). \end{aligned} \quad (21)$$

则由引理 3.5 及引理 3.1, 有

$$\begin{aligned} &\alpha \|\eta_x\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\beta \|\eta_x\|^2 + (\eta, \gamma_h \eta)) - \sigma(\eta, \eta_x) \\ &= -(\xi_t, \gamma_h \eta) - (u_t, (I - \gamma_h) \eta) + (\xi, \eta_x) - \frac{\delta}{2}(f(u_h) - f(u), \eta_x). \end{aligned} \quad (22)$$

易知 $\|f(u) - f(u_h)\| \leq C(\|\xi\| + \|\eta\|)$, $(\eta, \eta_x) = 0$ 。则(22)式可变为

$$\alpha \|\eta_x\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\beta \|\eta_x\|^2 + (\eta, \gamma_h \eta)) \leq \frac{\alpha}{2} \|\eta_x\|^2 + C(\|\xi\|^2 + \|\xi_t\|^2 + h^2 \|u_t\|_1^2 + \|\eta\|^2). \quad (23)$$

对(23)两边关于 t 积分, 可得

$$\alpha \int_0^t \|\eta_x\|^2 dt + \beta \|\eta_x\|^2 + \frac{3}{4} \|\eta\|^2 \leq C \int_0^t (\|\xi\|^2 + \|\xi_t\|^2 + h^2 \|u_t\|_1^2 + \|\eta\|^2) ds. \tag{24}$$

由 Gronwall 引理, 可得

$$\|\eta\|_1^2 + \int_0^t \|\eta_x\|^2 ds \leq C \int_0^t (\|\xi\|^2 + \|\xi_t\|^2 + h^2 \|u_t\|_1^2) ds. \tag{25}$$

为估计 $\|u_t - u_{ht}\|$, 在(20)中取 $v_h = \eta_t, q_h = \eta_{xt}$, 则有

$$\begin{aligned} & (\eta_t, \gamma_h \eta_t) + \alpha (\eta_x, \eta_{xt}) + \beta (\eta_{xt}, \eta_{xt}) - \sigma(\eta, \eta_{xt}) \\ &= -(\xi_t, \gamma_h \eta_t) - (u_t, (I - \gamma_h) \eta_t) + (\xi, \eta_{xt}) - \frac{\delta}{2} (f(u_h) - f(u), \eta_{xt}). \end{aligned} \tag{26}$$

利用迁移算子的性质, 并应用 Cauchy-Schwarz 不等式和 Young 不等式, 可得

$$\frac{3}{4} \|\eta_t\|^2 + \beta \|\eta_{xt}\|^2 \leq C (\|\xi_t\|^2 + \|\eta\|^2 + h^2 \|u_t\|_1^2 + \|\xi\|^2 + \|\eta_x\|^2) + \frac{3}{8} \|\eta_t\|^2 + \frac{\beta}{2} \|\eta_{xt}\|^2. \tag{27}$$

整理可得

$$\frac{3}{8} \|\eta_t\|^2 + \frac{\beta}{2} \|\eta_{xt}\|^2 \leq C (\|\eta\|_1^2 + \|\xi\|^2 + \|\xi_t\|^2 + h^2 \|u_t\|_1^2). \tag{28}$$

将(25)式代入到(28)式, 得到

$$\|\eta_t\|_1^2 \leq C (\|\xi_t\|^2 + \|\xi_t\|^2 + h^2 \|u_t\|_1^2) + C \int_0^t (\|\xi\|^2 + \|\xi_t\|^2 + h^2 \|u_t\|_1^2) ds. \tag{29}$$

为估计 $\|p - p_h\|$, 在(20)式中取 $q_h = \varepsilon$, 则有

$$\|\varepsilon\|^2 \leq C (\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2 + \|\eta_x\|^2 + \|\eta_{xt}\|^2) + \frac{1}{2} \|\varepsilon\|^2. \tag{30}$$

将(25)式和(29)式代入到(30)式, 得到

$$\|\varepsilon\|^2 \leq C (\|\xi\|^2 + \|\xi_t\|^2 + h^2 \|u_t\|_1^2) + C \int_0^t (\|\xi\|^2 + \|\xi_t\|^2 + h^2 \|u_t\|_1^2) ds. \tag{31}$$

最后利用投影估计和三角不等式完成定理的证明。

4. 全离散混合有限体积元格式的误差估计

令 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$ 是时间区域 $[0, T]$ 的剖分, $t_n = n\Delta t$, 其中时间步长 $\Delta t = T/M$, M 是某一正整数。为了构造全离散格式, 对于 $[0, T]$ 上函数 φ , 记 $\varphi^n = \varphi(t_n)$, $\partial_t \varphi^n = (\varphi^n - \varphi^{n-1})/\Delta t$ 。并记 u_h^n 和 p_h^n 分别是 u 和 p 在 $t = t_n$ 处的全离散解, 现在给出线性向后 Euler 全离散混合有限体积元格式: 求

$\{u_h^n, p_h^n\} \in H_{0h} \times L_h, (n=1, 2, \dots, M)$, 满足

$$\begin{cases} (a) \quad (\partial_t u_h^n, \gamma_h v_h) - (v_{hx}, p_h^n) = 0, \forall v_h \in H_{0h}, \\ (b) \quad (p_h^n, q_h) - \sigma(u_h^n, q_h) + \alpha(u_{hx}^n, q_h) + \beta(\partial_t u_{hx}^n, q_h) = \frac{\delta}{2} (f(u_h^{n-1}), q_h), \forall q_h \in L_h, \\ (c) \quad u_h^n = \pi_h u_0. \end{cases} \tag{32}$$

首先给出全离散格式的解的存在唯一性证明。

定理 4.1: 设 u_h^0 和 $\{u_h^i, p_h^i\}_{i=1}^{n-1}$ 是已知的, 则线性向后 Euler 混合有限体积元格式(32)存在唯一解 $\{u_h^n, p_h^n\}$ 。

证明: 全离散格式(32)可以改写为, 对 $\forall v_h \in H_{0h}, \forall q_h \in L_h$, 有

$$\Delta t(p_h^n, q_h) - \Delta t\sigma(u_h^n, q_h) + \alpha\Delta t(u_{hx}^n, q_h) + \beta(u_{hx}^n, q_h) = \beta(u_{hx}^{n-1}, q_h) + \frac{\delta\Delta t}{2}(f(u_h^{n-1}), q_h), \quad (33)$$

$$(u_h^n, \gamma_h v_h) - \Delta t(v_{hx}, p_h^n) = (u_h^{n-1}, \gamma_h v_h). \quad (34)$$

由于 $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N-1}$ 和 $\{\chi_{A_j}\}_{j=1}^{N-1}$ 分别是有限元空间 H_{0h} 和 L_h 的基函数, 则 $u_h^n \in H_{0h}, p_h^n \in L_h$ 可以表示为

$$u_h^n(x) = \sum_{j=1}^{N-1} u_{hj}^n \varphi_j(x), \quad p_h^n(x) = \sum_{j=1}^{N-1} p_{hj}^n \chi_{A_j}.$$

将上述表达式应用在(33)式和(34)式上, 并取 $v_h = \phi_i (i=1, 2, \dots, N-1), v_h = \chi_{A_i} (i=0, 1, 2, \dots, N-1)$, 则全离散格式可以写为下述矩阵形式: 求 $\{\tilde{u}_h^n, \tilde{p}_h^n\}, (n \geq 1)$, 使得

$$\begin{pmatrix} \Delta t A & (\beta + \alpha\Delta t)B - \sigma\Delta t C \\ -\Delta t B^T & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_h^n \\ \tilde{u}_h^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta B \tilde{u}_h^{n-1} + 0.5\delta\Delta t F(\tilde{u}_h^{n-1}) \\ D \tilde{u}_h^{n-1} \end{pmatrix}, \quad (35)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{u}_h^n &= (u_{h1}^n, u_{h2}^n, \dots, u_{hN-1}^n)^T, \quad \tilde{p}_h^n = (p_{h1}^n, p_{h2}^n, \dots, p_{hN-1}^n)^T, \\ A &= (\chi_{A_i}, \chi_{A_j})_{i=0, \dots, N-1; j=0, \dots, N-1}, \quad B = (\phi_{jx}, \chi_{A_i})_{i=0, \dots, N-1; j=0, \dots, N-1}, \\ C &= (\phi_j, \chi_{A_i})_{i=0, \dots, N-1; j=0, \dots, N-1}, \quad D = (\phi_j, \gamma_h \phi_i)_{i=1, \dots, N-1; j=1, \dots, N-1}, \\ F(\tilde{u}_h^{n-1}) &= (f(u_h^{n-1}), \chi_{A_i})_{i=0, \dots, N-1}^T \end{aligned}$$

注意到矩阵 A 和 D 是对称正定矩阵, 则(35)可变形为

$$\begin{pmatrix} \Delta t A & (\beta + \alpha\Delta t)B - \sigma\Delta t C \\ 0 & D + (\beta + \alpha\Delta t)B^T A^{-1} B - \sigma\Delta t B^T A^{-1} C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_h^n \\ \tilde{u}_h^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta B \tilde{u}_h^{n-1} + 0.5\delta\Delta t F(\tilde{u}_h^{n-1}) \\ H \end{pmatrix}, \quad (36)$$

其中 $H = D \tilde{u}_h^{n-1} + \beta B^T A^{-1} B \tilde{u}_h^{n-1} + \frac{\delta\Delta t}{2} B^T A^{-1} F(\tilde{u}_h^{n-1})$ 。当 Δt 充分小的时候, 系统(36)的系数矩阵是可逆的, 从而有唯一解, 于是全离散格式(32)有唯一解。

下面给出全离散格式(32)的误差估计。将误差写为

$$\begin{aligned} u(t_n) - u_h^n &= u(t_n) - \pi_h u(t_n) + \pi_h u(t_n) - u_h^n = \xi^n + \eta^n, \\ p(t_n) - p_h^n &= p(t_n) - R_h p(t_n) + R_h p(t_n) - p_h^n = \rho^n + \varepsilon^n. \end{aligned}$$

将格式(7)与格式(32)作差, 利用投影算子可得误差方程为

$$\begin{cases} (a) \quad (\partial_t \eta^n, \gamma_h v_h) - (v_{hx}, \varepsilon^n) = -(u_t^n, (I - \gamma_h) v_h) - (\tau^n, \gamma_h v_h) - (\partial_t \xi^n, \gamma_h v_h), \quad \forall v_h \in L_h, \\ (b) \quad (\varepsilon^n, q_h) - \sigma(\xi^n, q_h) - \sigma(\eta^n, q_h) + \alpha(\eta_x^n, q_h) + \beta(\partial_t \eta_x^n, q_h) + \beta(\lambda^n, q_h) \\ \quad = -\frac{\delta}{2}(f(u_h^n) - f(u_h^{n-1}), q_h), \quad \forall q_h \in H_h, \\ (c) \quad u_h^n = \pi_h u_0. \end{cases} \quad (37)$$

其中 $\tau^n = u_t^n - \partial_t u^n, \lambda^n = u_{xt}^n - \partial_t u_x^n$ 。

定理 4.2: 设 $\{u_h^n, p_h^n\}$ 是系统(32)的解, 系统(3)的解 $\{u, p\}$ 满足正则性质:

$$u, u_t \in L^\infty(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), P \in L^\infty(H^1(\Omega)), u_{tt} \in L^\infty(H_0^1(\Omega)),$$

则存在与 h 和 Δt 无关的正常数 C , 使得

$$\max_{1 \leq n \leq M} (\|u(t_n) - u_h^n\| + \|u_t(t_n) - \partial_t u_h^n\| + \|p(t_n) - p_h^n\|) \leq C(h + \Delta t). \tag{38}$$

证明: 在(37)中取 $v_h = \eta^n, q_h = \eta_x^n$, 得到

$$\begin{aligned} & (\partial_t \eta^n, \gamma_h \eta^n) - \sigma(\eta^n, \eta_x^n) + \alpha(\eta_x^n, \eta_x^n) + \beta(\partial_t \eta_x^n, \eta_x^n) \\ & = -(u_t^n, (I - \gamma_h)\eta^n) - (\tau^n, \gamma_h \eta^n) - \beta(\lambda^n, \eta_x^n) - (\partial_t \xi^n, \gamma_h \eta^n) \\ & \quad + \sigma(\xi^n, \eta_x^n) - \frac{\delta}{2}(f(u_h^{n-1}) - f(u^n), \eta_x^n). \end{aligned} \tag{39}$$

通过简单的计算, 可知

$$(\partial_t \eta_x^n, \eta_x^n) \geq \frac{1}{2\Delta t} [\|\eta_x^n\|^2 - \|\eta_x^{n-1}\|^2], \tag{40}$$

$$(\partial_t \eta^n, \gamma_h \eta^n) \geq \frac{1}{2\Delta t} [(\eta^n, \gamma_h \eta^n) - (\eta^{n-1}, \gamma_h \eta^{n-1})]. \tag{41}$$

应用上述不等式及 Cauchy-Schwarz 不等式和 Young 不等式, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t} [(\eta^n, \gamma_h \eta^n) - (\eta^{n-1}, \gamma_h \eta^{n-1})] + \frac{1}{2\Delta t} (\|\eta_x^n\|^2 - \|\eta_x^{n-1}\|^2) + \alpha \|\eta^n\|^2 \\ & \leq \frac{\alpha}{2} \|\eta_x^n\|^2 + C \left(h^2 \|u_t^n\|_1^2 + \|\tau^n\|^2 + \|\lambda^n\|^2 + \|\eta^n\|^2 + \|\xi^n\|^2 + \|\partial_t \xi^n\|^2 + \|f(u_h^{n-1}) - f(u^n)\|^2 \right). \end{aligned} \tag{42}$$

通过计算可得

$$\|f(u_h^{n-1}) - f(u^n)\|^2 \leq C(\|\xi^{n-1}\|^2 + \|\eta^{n-1}\|^2) + C\Delta t \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|u_t\|^2 dt \tag{43}$$

在(42)式两端同乘 $2\Delta t$, 并令 n 由 1 到 m 求和, 可得

$$\begin{aligned} & (\eta^m, \gamma_h \eta^m) + \|\eta_x^m\|^2 + \alpha \Delta t \sum_{n=1}^m \|\eta_x^n\|^2 \\ & \leq C(\|\eta^0\|_1^2 + \|\xi^0\|^2) + C\Delta t \sum_{n=1}^m \left(\|\eta^n\|_1^2 + h^2 \|u_t^n\|_1^2 + \|\tau^n\|^2 + \|\lambda^n\|^2 + \|\xi^n\|^2 + \|\partial_t \xi^n\|^2 + \Delta t \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|u_t\| dt \right). \end{aligned} \tag{44}$$

注意到 $\eta^0 = 0$, 选取 p_h^0 满足 $\xi^0 = 0$, 应用引理 3.3 及离散的 Gronwall 引理, 可知

$$\|\eta^m\|_1^2 \leq C\Delta t \sum_{n=1}^m \left(h^2 \|u_t^n\|_1^2 + \|\tau^n\|^2 + \|\lambda^n\|^2 + \|\xi^n\|^2 + \|\partial_t \xi^n\|^2 + \Delta t \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|u_t\| dt \right). \tag{45}$$

下面来估计 $\|u_t(t_n) - \partial_t u_h^n\|$, 在(37)式中取 $v_h = \partial_t \eta^n, q_h = \partial_t \eta_x^n$, 可得

$$\begin{aligned} & (\partial_t \eta^n, \gamma_h \partial_t \eta^n) - \sigma(\eta^n, \partial_t \eta_x^n) + \alpha(\eta_x^n, \partial_t \eta_x^n) + \beta(\partial_t \eta_x^n, \partial_t \eta_x^n) \\ & = -(u_t^n, (I - \gamma_h)\partial_t \eta^n) - (\tau^n, \gamma_h \partial_t \eta^n) - (\partial_t \xi^n, \gamma_h \partial_t \eta^n) \\ & \quad + \sigma(\xi^n, \partial_t \eta_x^n) - \frac{\delta}{2}(f(u_h^{n-1}) - f(u^n), \partial_t \eta_x^n) - (\lambda^n, \partial_t \eta_x^n). \end{aligned} \tag{46}$$

根据(43)式及引理 3.1, 可得

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{4} \|\partial_t \eta^n\|^2 + \beta \|\partial_t \eta_x^n\|^2 \\
& \leq C \left(\|\eta^n\|_1^2 + h^2 \|u_t^n\|_1^2 + \|\xi^n\| + \|\partial_t \xi^n\|^2 + \|\tau^n\|^2 + \|\lambda^n\|^2 \right. \\
& \quad \left. + \Delta t \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|u_t\|^2 dt + \|\eta^{n-1}\|^2 + \|\xi^{n-1}\|^2 \right) + \frac{3}{8} \|\partial_t \eta^n\|^2 + \beta \|\partial_t \eta_x^n\|^2.
\end{aligned} \tag{47}$$

将式(45)代入式(47), 可得

$$\begin{aligned}
\|\partial_t \eta^n\|_1^2 & \leq C \left(\|\xi^n\| + \|\partial_t \xi^n\|^2 + \|\tau^n\|^2 + \|\lambda^n\|^2 + h^2 \|u_t^n\|_1^2 + \Delta t \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|u_t\|^2 dt + \|\xi^{n-1}\|^2 \right) \\
& \quad + C \Delta t \sum_{k=1}^n \left(\|\xi^k\| + \|\partial_t \xi^k\|^2 + \|\tau^k\|^2 + \|\lambda^k\|^2 + h^2 \|u_t^k\|_1^2 + \Delta t \int_{t^{k-1}}^{t^k} \|u_t\|^2 dt \right).
\end{aligned} \tag{48}$$

下面估计 $\|p^n - p_h^n\|$. 在(37)式中取 $q_h = \varepsilon^n$, 利用引理 3.1, 可得

$$\|\varepsilon^n\|^2 \leq \frac{1}{2} \|\varepsilon^n\|^2 + C \left(\|\eta^n\|_1^2 + \|\partial_t \eta_x^n\|^2 + \|\xi^n\| + \|\lambda^n\|^2 + \Delta t \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|u_t\|^2 dt + \|\eta^{n-1}\|^2 + \|\xi^{n-1}\|^2 \right). \tag{49}$$

把(45)式和(48)式代入(49)式中, 有

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon^n\|^2 & \leq C \left(\|\xi^n\|^2 + \|\partial_t \xi^n\|^2 + \|\tau^n\|^2 + \|\lambda^n\|^2 + h^2 \|u_t^n\|_1^2 + \Delta t \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|u_t\|^2 dt + \|\xi^{n-1}\|^2 \right) \\
& \quad + C \Delta t \sum_{k=1}^n \left(\|\xi^k\|^2 + \|\partial_t \xi^k\|^2 + \|\tau^k\|^2 + \|\lambda^k\|^2 + h^2 \|u_t^k\|_1^2 + \Delta t \int_{t^{k-1}}^{t^k} \|u_t\|^2 dt \right).
\end{aligned} \tag{50}$$

为了(45)式和(50)式的右端项, 利用 Taylor 展开的积分余项公式, 可以得到

$$\begin{aligned}
\|\partial_t \xi^n\|^2 & \leq \frac{C}{\Delta t} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\xi_t\|^2 ds, \quad n \geq 1, \\
\|\tau^n\|^2 & \leq C \Delta t \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|u_{xxt}\|^2 ds, \quad \|\lambda^n\|^2 \leq C \Delta t \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|u_{xxt}\|^2 ds, \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

最后使用上述不等式以及三角不等式完成定理的证明.

5. 数值算例

例 1: 本例考虑方程(1)中取 $\sigma = \delta = \alpha = \beta = 1$, 计算区域 $\Omega = (-10, 10)$, $\Gamma = (0, 10]$, 初始函数 $u_0(x) = e^{-x^2}$. 空间和时间步长为 $h = \Delta t = 0.1$. 图 1 为数值解 $u_h(x, t)$ 在时间 $t = 0, 1, 2, \dots, 10$ 时的图像, 图 2 为数值解 $p_h(x, t)$ 在时间 $t = 0, 1, 2, \dots, 10$ 时的图像.

例 2: 文中的格式和理论分析的结果也适合于下述广义正则长波 Burgers 方程

$$\begin{cases} (a) \quad u_t + \sigma u_x + \delta u u_x - \alpha u_{xx} - \beta u_{xxt} = g(x, t), & (x, t) \in \Omega \times \Gamma, \\ (b) \quad u(a, t) = u(b, t) = 0, & t \in \bar{\Gamma}, \\ (c) \quad u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{51}$$

在(51)中取 $\sigma = \delta = \alpha = \beta = 1$, 计算区域 $\Omega = (0, 1)$, $\Gamma = (0, 10]$, 初始函数 $u_0(x) = \sin(\pi x)$, 源项函数 $g(x, t) = e^{-t} \left(\pi \cos(\pi x) - \sin(\pi x) + \frac{\pi}{2} e^{-t} \sin(2\pi x) \right)$, 则精确解为

$$u(x, t) = e^{-t} \sin(\pi x), \quad p(x, t) = e^{-t} \sin(\pi x) + \frac{1}{2} e^{-2t} (\sin(\pi x))^2.$$

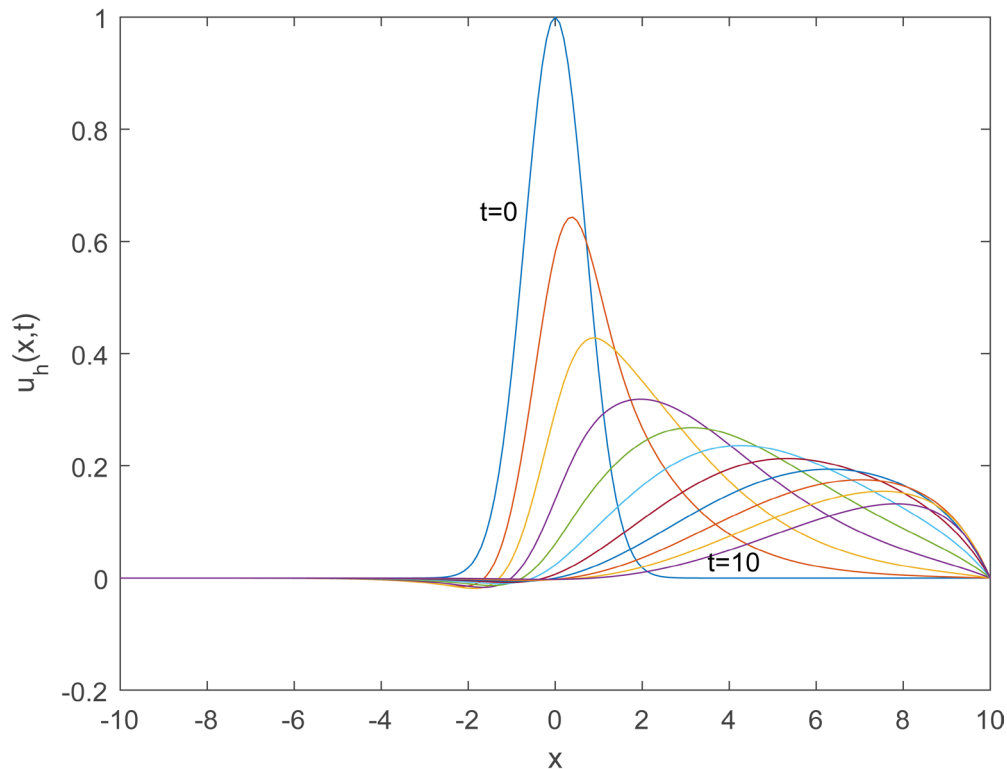


Figure 1. The numerical solution of $u_h(x,t)$
图 1. 数值解 $u_h(x,t)$

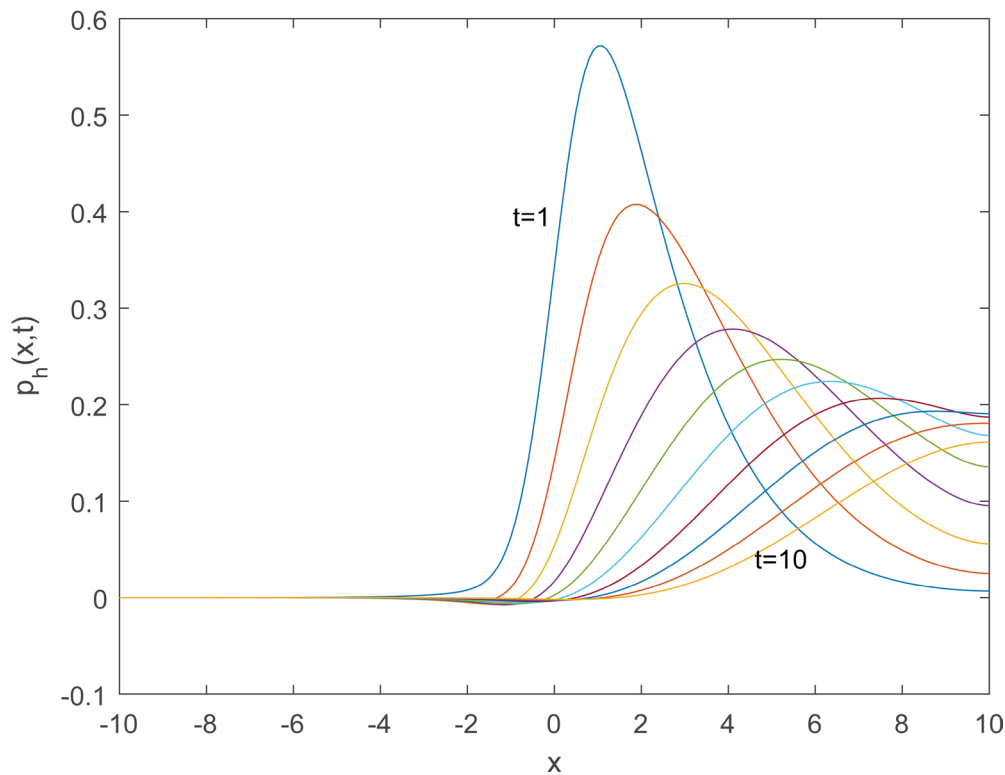


Figure 2. The numerical solution of $p_h(x,t)$
图 2. 数值解 $p_h(x,t)$

Table 1. Error estimate and order of convergence
表 1. 误差估计和收敛阶

$h, \Delta t$	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	收敛阶	$\ P - P_h\ _{L^2(\Omega)}$	收敛阶
1/40, 1/40	8.5168e-02		1.1649e-02	
1/80, 1/80	4.3098e-02	0.9827	6.0366e-03	0.9484
1/160, 1/160	2.1679e-02	0.9913	3.0718e-03	0.9747
1/320, 1/320	1.0872e-02	0.9957	1.5493e-03	0.9875

表 1 给出了上述广义正则长波 Burgers 方程(51)的混合有限体积元格式在不同的空间和时间等距剖分下的误差估计和收敛精度, 可以看出收敛精度与理论分析结果是一致的, 这表明混合有限体积元方法求解广义正则长波 Burgers 方程和正则长波 Burgers 方程是有效的。

基金项目

国家自然科学基金(11701299, 11761053), 内蒙古自治区自然科学基金(2016BS0105, 2017MS0107), 内蒙古自治区高等学校青年科技英才支持计划(NJYT-17-A07)。

参考文献

- [1] 王明亮. RLW-Burgers 方程的精确解[J]. 应用数学, 1995(1): 51-55.
- [2] 王鑫. RLW-Burgers 方程的新显式行波解[J]. 应用数学进展, 2017(6): 619-626.
- [3] Zhao, X.H., Li, D.S. and Shi, D.M. (2008) A Finite Difference Scheme for RLW-Burgers Equation. *Journal of Applied Mathematics & Informatics*, **26**, 573-581.
- [4] 刘洋. 非标准混合元方法分析及数值模拟[D]: [博士学位论文]. 呼和浩特: 内蒙古大学, 2011.
- [5] Dehghan, M., Abbaszadeh, M. and Mohebbi, A. (2014) The Numerical Solution of Nonlinear High Dimensional Generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers Equation via the Meshless Method of Radial Basis Functions. *Computers & Mathematics with Applications*, **68**, 212-237. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2014.05.019>
- [6] Russell, T.F. (1995) Rigorous Block-Centered Discretizations on Irregular Grids: Improved Simulation of Complex Reservoir Systems. Technical Report No. 3, Project Report, Reservoir Simulation Research Corporation, Denver.
- [7] Jones, J.E. (1995) A Mixed Finite Volume Element Method for Accurate Computation of Fluid Velocities in Porous Media. Doctoral Thesis, University of Colorado, Denver.
- [8] Cai, Z., Jones, J.E., McCormick, S.F. and Russell, T.F. (1997) Control-Volume Mixed Finite Element Methods. *Computers & Geosciences*, **1**, 289-315. <https://doi.org/10.1023/A:1011577530905>
- [9] Chou, S.H., Kwak, D.Y. and Vassilevski, P.S. (1998) Mixed Covolume Methods for the Elliptic Problems on Triangular Grids. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **35**, 1850-1861. <https://doi.org/10.1137/S0036142997321285>
- [10] Chou, S.H. and Kwak, D.Y. (2000) Mixed Covolume Methods on Rectangular Grids for Elliptic Problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **37**, 758-771. <https://doi.org/10.1137/S0036142996305534>
- [11] Kwak, D.Y. and Kim, K.Y. (2000) Mixed Covolume Methods for Quasi-Linear Second-Order Elliptic Problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **38**, 1057-1072. <https://doi.org/10.1137/S003614299935855X>
- [12] Fang, Z.C. and Li, H. (2013) Numerical Solutions of the Regularized Long Wave Equation Based on Mixed Covolume Method. *Applied Mathematics and Mechanics*, No. 34, 907-920.
- [13] Yang, S.X. and Jiang, Z.W. (2009) Mixed Covolume Method for Parabolic Problems on Triangular Grids. *Applied Mathematics and Computation*, No. 215, 1251-1265. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.06.068>
- [14] Rui, H.X. (2002) Symmetric Mixed Covolume Methods for Parabolic Problems. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, No. 18, 561-583.
- [15] Fang, Z.C. and Li, H. (2013) Mixed Covolume Methods for a Damped Sine-Gordon Equation on Triangular Grids. *Advances in Mathematics*, No. 42, 441-457.

- [16] Brezzi, F. and Fortin, M. (1991) Mixed and Hybrid Finite Element Methods. Springer-Verlag, New York.
<https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3172-1>
- [17] Chen, Z.X. (2005) Finite Element Methods and Their Applications. Springer-Verlag, Berlin.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：aam@hanspub.org