Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2018, 7(3), 243-248
Published Online March 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.73030

Hans汉斯

Algebraic Index of Eigenvalue of a Class of Hamilton Matrix

Yongxia Wu*, Deyu Wu*, Chunyuan Wang, Ruiting Dong, Yi Shen, Min Xiang

School of Mathematical Science, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia
Email: *wuyongxia0610@163.com, *wudeyu2585@163.com

Received: Feb. 22nd, 2018; accepted: Mar. 7th, 2018; published: Mar. 14th, 2018

Abstract

In this paper, the sufficient and necessary conditions of nonnegative Hamilton matrix are proved. Secondly, the problem of when the algebraic index of the eigenvalue of a class of Hamilton matrix is one is studied and the sufficient conditions are given.

Keywords

Hamilton Matrix, Eigenvalues, Eigenvectors, Algebraic Index

一类Hamilton矩阵特征值的代数指标

吴永霞*，吴德玉*，王婧瑗，董瑞婷，沈　易，向　民

内蒙古大学，数学科学学院，内蒙古　呼和浩特
Email: *wuyongxia0610@163.com, *wudeyu2585@163.com

收稿日期：2018年2月22日；录用日期：2018年3月7日；发布日期：2018年3月14日

摘　要

本文首先证明了非负Hamilton矩阵可逆的充分必要条件。其次研究了一类Hamilton矩阵特征值的代数指标何时为1的问题，并给出了特征值的代数指标为1的充分条件。

关键词

Hamilton矩阵，特征值，特征向量，代数指标

*通讯作者。

文章引用: 吴永霞, 吴德玉, 王婧瑗, 董瑞婷, 沈易, 向民. 一类 Hamilton 矩阵特征值的代数指标[J]. 应用数学进展, 2018, 7(3): 243-248. DOI: 10.12677/aam.2018.73030

1. 引言

英国数学家 W. R. Hamilton 根据光学与力学之间的深刻联系，对经典力学进行了创造性的研究得到了与 Newton 力学、Lagrange 力学等价的又一种力学表述——Hamilton 力学。Hamilton 力学以其严谨、对称的数学框架成为经典力学史上的美妙理论，并最终成为量子力学等许多学科的理论基础。量子力学创始人薛定谔曾说“Hamilton 原理已成为现代物理的基石，如果想要用现代理论解决任何物理问题，首先得把它表示成 Hamilton 形式”[1]。Hamilton 系统是 Hamilton 力学的数学表示，它在数学、物理和力学领域具有广泛应用。有限维线性 Hamilton 系统是 Hamilton 系统里最简单且最基本的形式，该系统对应的系数矩阵为如下形状的 $2n\times 2n$ 矩阵：

$$H=\begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix},$$

其中 B,C 是 Hermite 矩阵， A^* 是 A 的共轭转置，此时称 H 为 Hamilton 矩阵。Hamilton 矩阵的特征值问题以及可逆性问题在代数方程求解问题、控制论以及辛几何等领域有重要应用[2]。

据我们所知，矩阵特征值的代数重数与几何重数在研究矩阵若当标准型、对角化以及在可修复系统，向量型 Sturm-Liouville 问题，迁移理论等领域也具有重要应用。一般情况下，矩阵的代数重数与几何重数不一定相等。但是，当特征值的代数指标为 1 的时候，代数重数与几何重数相等，此时不存在广义特征向量。因此本文研究了 Hamilton 矩阵特征值的代数指标何时为 1 的问题，给出了 Hamilton 矩阵特征值的代数指标何时为 1 的一些充分条件。

2. 预备知识

为了证明主要结论首先给出下列定义及引理。

定义 1： 设 $D\in C^{n\times n}$ 为 Hermite 矩阵，如果对任意的 $0\neq x\in C^n$ 都有

$$x^*Dx>0\left(x^*Dx\geq 0\right),$$

则称 D 为 Hermite 正定矩阵(半正定矩阵) [3]。

定义 2： 分块矩阵 $H=\begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix}$，则其中 B,C 是 Hermite 矩阵， A^* 是 A 的共轭转置，此时称 H 为 Hamilton 矩阵。如果 B,C 是 Hermite 半正定矩阵，则称 H 为非负 Hamilton 矩阵[4]。

定义 3： 设 $\lambda\in C$，使得

$$N^K\left(D,\lambda\right)=N^{K+1}\left(D,\lambda\right),$$

成立的最小的非负整数 K 称为 λ 的代数指标，记为 $P_\lambda\left(D\right)$，其中

$$N^K\left(D,\lambda\right)=\left\{u\middle|\left(D-\lambda I\right)^K u=0\right\}.$$

引理 1： 设 D 是复数域上的 $C^{n\times n}$ 的矩阵，如果对任意的 $u\in N\left(D,\lambda\right)$ 存在 $v\in N^K\left(D^*,\bar{\lambda}\right)$ 使得 $v^*u\neq 0$，则 D 在 λ 处的代数指标不超过 K，特别的，若 $K=1$ 则 D 在 λ 处的代数指标为 1。

证明：假定 $P_\lambda\left(D\right)=K+1$，则存在 $u_0\in N^{K+1}\left(D,\lambda\right)$ 使得

$$\left(D-\lambda I\right)^{K+1}u_0=0,\ \ \left(D-\lambda I\right)^{K}u_0\neq 0,$$

即 $\left(D-\lambda I\right)^{K}u_0\in N\left(D,\lambda I\right)$。根据给定条件，存在 $v\in N^K\left(D^*,\bar{\lambda}\right)$ 使得

$$v^*\left(D-\lambda I\right)^{K}u_0\neq 0,$$

两边取共轭转置得

$$u_0^*\left(D^*-\bar{\lambda}I\right)^{K}v\neq 0,$$

这与 $v\in N^K\left(D^*,\bar{\lambda}\right)$ 矛盾。从而 $P_\lambda\left(D\right)\leq K$ 。

引理 2： $D\in C^{n\times n}$ 是 Hermite 半正定矩阵，如果存在向量 x_0 使得 $x_0^*Dx_0=0$ ，则 $Dx_0=0$ 。

证明： $D\in C^{n\times n}$ 是 Hermite 半正定矩阵，因此，存在矩阵 $P\in C^{n\times n}$ ，使得 $D=P^*P$ ，即得

$$x_0^*Dx_0=x_0^*P^*Px_0=\left(Px_0\right)^*Px_0=0,$$

故

$$Px_0=0,$$

两边同乘矩阵 P^* 得

$$P^*Px_0=Dx_0=0.$$

3. 主要结果及其证明

定理 1： 设 $H=\begin{bmatrix}A & B\\ C & -A^*\end{bmatrix}\in C^{2n\times 2n}$ 是非负 Hamilton 矩阵，则 H 可逆当且仅当

$$N\left(A\right)\cap N\left(C\right)=\{0\}$$

且 $N\left(A^*\right)\cap N\left(B\right)=\{0\}$ 。

证明： 必要性。当 H 可逆时，假设 $N\left(A\right)\cap N\left(C\right)\neq\{0\}$ ，则存在 $x_0\in N\left(A\right)\cap N\left(B\right)$ 使得

$$Ax_0=0,Cx_0=0.$$

令 $u=\left[x_0\quad 0\right]^{\mathrm{T}}$ ，则有

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & -A^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Ax_0\\ Cx_0\end{bmatrix}=0.$$

这与 H 可逆矛盾，假设不成立。

同理可证 $N\left(A^*\right)\cap N\left(B\right)\neq\{0\}$ 时与条件矛盾。由此可得 H 可逆时

$$N\left(A\right)\cap N\left(C\right)=\{0\}\text{ 且 }N\left(A^*\right)\cap N\left(B\right)=\{0\}.$$

充分性。假设矩阵 H 不可逆，则存在 $u=\left[x_0\quad y_0\right]^{\mathrm{T}}\neq 0$ ，使得

$$Ax_0+By_0=0,\ \ Cx_0-A^*y_0=0. \tag{3.1.1}$$

第一式两边与 y_0 作内积， x_0 与第二式两边作内积后两式相加得

$$x_0^*Cx_0+y_0^*By_0=0,$$

由于 B,C 是 Hermite 半正定矩阵，从而

$$x_0^* C x_0 = 0,\ y_0^* B y_0 = 0,$$

由引理 2 可知

$$Cx_0 = 0,\ By_0 = 0,$$

进而代入式(3.1.1)得

$$Ax_0 = 0,\ -A^* y_0 = 0.$$

则得出

$$Cx_0 = 0,\ Ax_0 = 0$$

这与条件矛盾。结论证毕。

定理 2: 设 $H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix} \in C^{2n\times 2n}$ Hamilton 矩阵，如果 B 是 Hermite 正定矩阵且 $B^{-1}A$ 是 Hermite 矩阵，则对任意 $0 \neq \lambda \in \sigma(H)$ 有 $P_\lambda(H) = 1$。其中 $\sigma(H)$ 表示 H 的特征值集合。

证明：对任意 $u = [x \quad y]^{\mathrm{T}} \in N(H,\lambda)$，考虑到

$$Ax + By = \lambda x,\ Cx - A^* y = \lambda y,$$

以及 B 是 Hermite 正定矩阵，有

$$\lambda^2 (x^* B^{-1} x) + \lambda (x^* A^* B^{-1} x) - \lambda (x^* B^{-1} A x) - (x^* C x) - (x^* A^* B^{-1} A x) = 0.$$

由于 $(x^* B^{-1} A x) \in R$，于是

$$\lambda (x^* A^* B^{-1} x) - \lambda (x^* B^{-1} A x) = 0,$$

且 $\sigma(H) \subset R \cup iR$。

当 $\sigma(H) \subset R$ 时，取 $v = \begin{bmatrix} -\lambda B^{-1} x - B^{-1} A x \\ -x \end{bmatrix}$，则

$$(H^* - \bar{\lambda}) v = (H^* - \lambda) v = J (H + \lambda) J v = 0,$$

其中 J 表示辛矩阵 $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$，$I_n$ 是单位矩阵。此时有

$$v^* u = \left(\begin{bmatrix} x \\ \lambda B^{-1} x - B^{-1} A x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\lambda B^{-1} x - B^{-1} A x \\ -x \end{bmatrix} \right) = -2\lambda (x^* B^{-1} x) \neq 0,$$

由引理 1 可知，$P_\lambda(H) = 1$。

当 $\lambda \in iR$ 时，取 $v = \begin{bmatrix} -\lambda B^{-1} x + B^{-1} A x \\ x \end{bmatrix}$，则

$$(H^* - \bar{\lambda}) v = (H^* + \lambda) v = J (H - \lambda) J v = 0,$$

并且

$$v^* u = \left(\begin{bmatrix} x \\ \lambda B^{-1} x - B^{-1} A x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\lambda B^{-1} x + B^{-1} A x \\ x \end{bmatrix} \right) = 2\lambda (x^* B^{-1} x) \neq 0,$$

由引理 1 可知，$P_\lambda(H) = 1$。结论证毕。

注：若把定理 2 的条件改成 C 是 Hermite 正定矩阵且 $C^{-1}A^*$ 是 Hermite 矩阵，则同理可证定理 2 的结论仍成立。

定理 2 的条件是对 $0 \neq \lambda \in \sigma(H)$ 来说的，而 $0 = \lambda \in \sigma(H)$ 时定理 2 的结论不一定成立。下面给出具体例子说明这一点。

例 1：令 $H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是 Hamilton 矩阵，则 B 是 Hermite 正定矩阵且 $B^{-1}A$ 是 Hermite 矩阵，满足定理 2 的条件。然而，经计算易得

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

并且

$$H^2 = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

取 $u = \begin{bmatrix} 0 & x \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \neq 0$，其中 x 是 n 维非零向量，则

$$Hu = \begin{bmatrix} x & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \neq 0,$$

但

$$H^2 u = 0.$$

从而得矩阵 H 的 $\lambda = 0$ 的代数指标为 2。

那么，当 $\lambda = 0$ 是 Hamilton 矩阵 H 的特征值时，代数指标何时为 1 呢？下面的定理将回答这个问题。

定理 3：设 $H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix} \in C^{2n\times 2n}$ Hamilton 矩阵，如果 B 是可逆矩阵且 Hermite 矩阵 $i\left(B^{-1}A - A^*B^{-1}\right)$ 或 $-i\left(B^{-1}A - A^*B^{-1}\right)$ 为正定矩阵时，当 $\lambda = 0$ 是 Hamilton 矩阵 H 的特征值时 $P_\lambda(H) = 1$。

证明：对任意 $u = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in N(H)$，有

$$Ax + By = 0, Cx - A^* y = 0,$$

得

$$u = \begin{bmatrix} x & -B^{-1}Ax \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

从而

$$Ju = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ -B^{-1}Ax \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B^{-1}Ax & -x \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in N\left(H^*\right),$$

并且

$$(Ju)^* u = \left(\begin{bmatrix} x \\ -B^{-1}Ax \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -B^{-1}Ax \\ -x \end{bmatrix}\right) = x^*\left(B^{-1}A - A^*B^{-1}\right)x \neq 0,$$

由引理 1 可知，$P_\lambda(H) = 1$。结论证毕。

注：若把定理 3 的条件改成 C 是可逆矩阵且 $i\left(B^{-1}A - A^*B^{-1}\right)$ 或 $-i\left(B^{-1}A - A^*B^{-1}\right)$ 为正定矩阵，则同理可证定理 3 的结论仍成立。

基金项目

内蒙古大学创新创业基金项目(批准号：201711204)，国家自然科学基金(批准号：11561048)。

参考文献

[1] 冯康. 哈密尔顿系统的辛几何算法[M]. 杭州: 浙江科技出版社, 2003.

[2] 吴德玉, 阿拉坦仓. 非负 Hamilton 算子的可逆性[J]. 数学年刊 A 辑(中文版), 2008, 29(5): 719-724.

[3] 朱元国, 饶玲, 严涛, 张军, 李宝成. 矩阵分析与计算[M]. 北京: 国防工业出版社, 2010.

[4] 吴德玉, 阿拉坦仓. 分块算子矩阵谱理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2013.