

The Planarity of G^{+--}

Dan Wang¹, Xiaoping Liu²

¹College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang

²Xinjiang Institute of Engineering, Urumqi Xinjiang

Email: danxjwang@163.cn

Received: Feb. 22nd, 2018; accepted: Mar. 5th, 2018; published: Mar. 13th, 2018

Abstract

Let G be a simple graph. The transformation graph G^{+--} of G is the graph with vertex set $V(G) \cup E(G)$ in which the vertex x and y are joined by an edge if and only if the following condition holds: 1) $x, y \in V(G)$ and x and y are adjacent in G , 2) $x, y \in E(G)$, and x and y are not adjacent in G , 3) one of x and y is in $V(G)$ and the other is in $E(G)$, and they are not incident in G . In this paper, it is shown that G^{+--} is planar if and only if $|E(G)| \leq 2$ or G is isomorphic to one of the following graphs: $C_3, C_3 + K_1, P_4, P_4 + K_1, P_3 + K_2, P_3 + K_2 + K_1, K_{1,3}, K_{1,3} + K_1, 3K_2, 3K_2 + K_1, 3K_2 + 2K_1, C_4, C_4 + K_1, 2P_3$.

Keywords

Total Graph, Planarity, Transformation Graph

G^{+--} 的平面性

王丹¹, 刘晓平²

¹新疆大学, 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐

²新疆工程学院, 新疆 乌鲁木齐

Email: danxjwang@163.cn

收稿日期: 2018年2月22日; 录用日期: 2018年3月5日; 发布日期: 2018年3月13日

摘要

对于一个简单图 G , 变换图 G^{+--} 定义为 $V(G^{+--}) = V(G) \cup E(G)$, 且两个顶点 $x, y \in V(G^{+--})$ 相邻当且仅当满足下列三个条件: 1) $x, y \in V(G)$ 并且 $x, y \in E(G)$, 2) $x, y \in E(G)$ 并且 x, y 在 G 中不相邻, 3) x 和

y , 其中一个在 $V(G)$ 中, 另一个在 $E(G)$ 中, 并且它们在 G 中关联。在这篇文章里, 我们将证明 G^{+-} 是平面的当且仅当 $|E(G)| \leq 2$ 或者与下列的某个图同构: $C_3, C_3 + K_1, P_4, P_4 + K_1, P_3 + K_2, P_3 + K_2 + K_1, K_{1,3}, K_{1,3} + K_1, 3K_2, 3K_2 + K_1, 3K_2 + 2K_1, C_4, C_4 + K_1, 2P_3$ 。

关键词

全图, 平面性, 变换图

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

这篇文章里所有的图都是有限的, 简单的, 无向的。在[1]中可以找到没有被定义的术语和符号。图 $G = (V(G) \cup E(G))$, $|V(G)|$ 是 G 的顶点的个数, $|E(G)|$ 是 G 的边的个数, v 的邻集 $N_G(v)$ 是 G 中所有与 v 相邻的顶点的集合。因为 G 是简单图, 所以有 $|N_G(v)| = d_G(v)$ 。

假设 V' 是 $V(G)$ 的一个非空子集。图 G 的导出子图 $G[V']$ 定义为 $V(G[V']) = V'$ 并且 $uv \in E(G[V'])$ 当且仅当 $uv \in E(G)$ 。两个图 $G = (V(G), E(G))$, $H = (V(H), E(H))$ 的并, 记为 $G \cup H$, 点集是 $V(G) \cup V(H)$, 边集是 $E(G) \cup E(H)$ 。如果它们不交, 即 $V(G) \cap V(H) = \emptyset$, 它们的并记为 $G + H$ 。

图 G 的线图 $L(G)$ 的点集是 $E(G)$, 其两个顶点相邻当且仅当它们在 G 中相邻。图 G 的全图 G^{+++} , 它的点集是 $V(G) \cup E(G)$, 任意两点相邻当且仅当它们在 G 中或者是相邻的, 或者是关联的。吴和孟[2]推广了全图的概念, 并且引入了一些新的变换图。我们也采用了 G^{xyz} 这个符号, $x, y, z \in \{+, -\}$, 这个符号是在[2]中被引入的。

如果一个图可以在平面中画出来使得他们的边不交, 只有在端点处相交, 我们就说这个图在平面上是可嵌入的, 或者是可平面的。图 G 的剖分是在 G 的边上插入一系列的点之后得到的。Behzad [3]刻画了图 G 的变换图 G^{+++} 是可平面的。刘[4]给出了图 G 的变换图 G^{---} 是可平面的充要条件。吴等[5]证明了图 G 的变换图 G^{++} 可平面的充要条件是 G 点数至多为 4。读者可参考[6]-[13]了解更多的关于图 G^{xyz} 的结论。按习惯, n 个顶点的完全图, 圈, 路分别记为 K_n, C_n, P_n 。两部分中的顶点数分别为 m, n 的完全二部图记为 $K_{m,n}$ 。

文章的第二部分我们使用了著名的 Kuratowski [1]定理。

定理 1.1: 一个图是可平面的当且仅当它不包含 K_5 或者 $K_{3,3}$ 的剖分。

推论 1.2: 每个可平面简单图都有一个顶点的度数至多为 5。

下面是这篇文章的主要结论。

定理 1.3: 对于一个边数为 m 的图 G , G^{+-} 是可平面的当且仅当 $m \leq 2$ 或者 G 与下面的某个图同构: $C_3, C_3 + K_1, P_4, P_4 + K_1, P_3 + K_2, P_3 + K_2 + K_1, K_{1,3}, K_{1,3} + K_1, 3K_2, 3K_2 + K_1, 3K_2 + 2K_1, C_4, C_4 + K_1, 2P_3$ 。

证明: 由引理 2.1~2.5 的结论可以立即得到。

2. 证明

下面的结论容易证明, 但很有用。

引理 2.1: 如果 H 是 G 的子图, 那么 H^{+-} 是 G^{+-} 的子图。

由引理 2.1, 如果 H^{+-} 是非可平面的, $G = H + kK_1$, k 是一个整数, 并且 $k \geq 1$, 那么 G^{+-} 是非可平面的。我们很容易检测到对于边数 $m \leq 2$ 的图, G^{+-} 是非可平面的。接下来我们考虑边数为 3 的图, 在图 1 中我们精确地给出了所有边数为 3 的并且没有孤立点的 5 个图。

引理 2.2: 对于一个边数为 3 的图 G , G^{+-} 是可平面的当且仅当

$$G \in \{C_3, C_3 + K_1, P_4, P_4 + K_1, P_3 + K_2, P_3 + K_2 + K_1, K_{1,3}, K_{1,3} + K_1, 3K_2, 3K_2 + K_1, 3K_2 + 2K_1\}.$$

证明: 充分性: 正如图 2 中所示:

G^{+-} : $3K_2 + 2K_1, P_3 + K_2 + K_1, K_{1,3} + K_1, C_3 + K_1, P_4 + K_1$ 的变换图 G^{+-} 是可平面的。根据引理 2.1, $C_3, P_4, P_3 + K_2, K_{1,3}, 3K_2, 3K_2 + K_1$ 的变换图 G^{+-} 也是可平面的。

必要性: 对于每一个图 $G \in \{P_3 + K_2 + 2K_1, K_{1,3} + 2K_1, C_3 + 2K_1, P_4 + 2K_1\}$, 其变换图 $(G + 2K_1)^{+-}$ 是非可平面的, 因为它们都包含 $K_{3,3}$ 的剖分, 如图 3 所示。

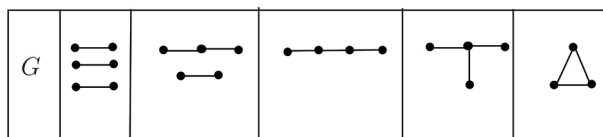


Figure 1. All graphs of size 3 without isolated vertices
图 1. 所有边数为 3 的没有孤立点的图

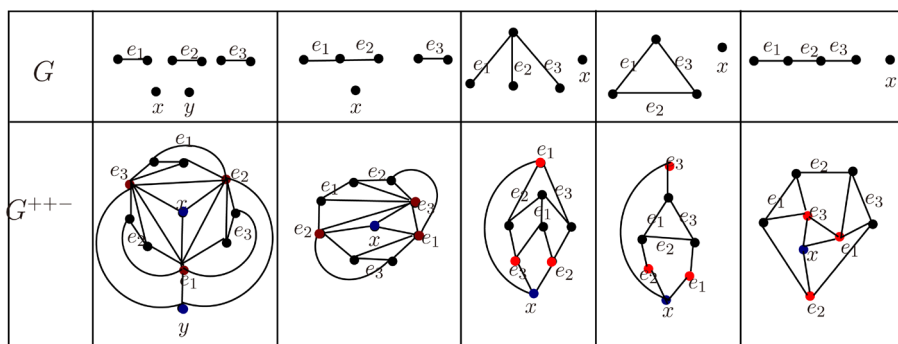


Figure 2. Transformation graph G^{+-} of $3K_2 + 2K_1, P_3 + K_2 + K_1, K_{1,3} + K_1, C_3 + K_1, P_4 + K_1$
图 2. $3K_2 + 2K_1, P_3 + K_2 + K_1, K_{1,3} + K_1, C_3 + K_1, P_4 + K_1$ 的变换图 G^{+-}

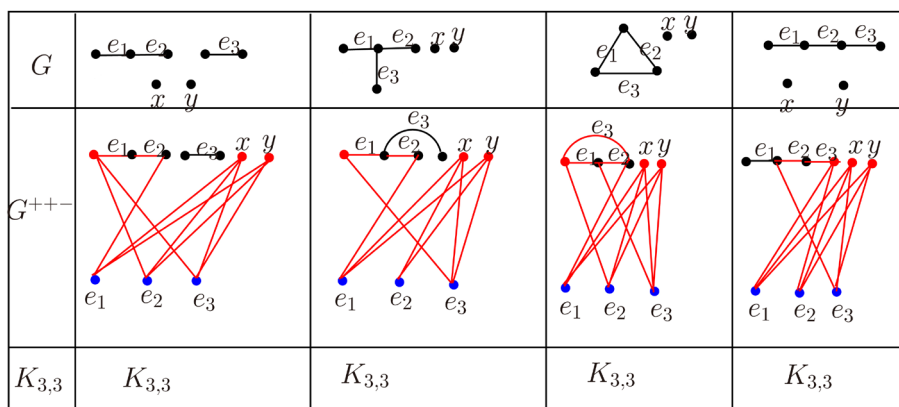


Figure 3. Transformation graph G^{+-} of $P_3 + K_2 + 2K_1, K_{1,3} + 2K_1, C_3 + 2K_1, P_4 + 2K_1$
图 3. $P_3 + K_2 + 2K_1, K_{1,3} + 2K_1, C_3 + 2K_1, P_4 + 2K_1$ 的变换图 G^{+-}

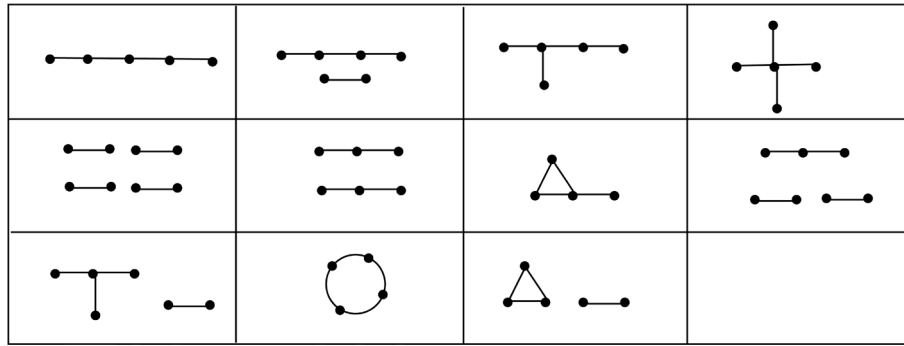


Figure 4. All graphs of size 4 without isolated vertices

图 4. 所有边数为 4 的没有孤立点的图

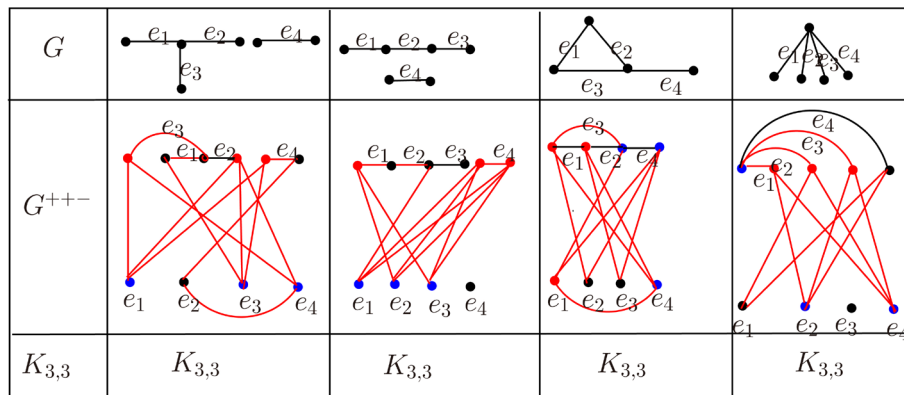


Figure 5. Transformation graph of some graphs of size 4

图 5. 一些边数为 4 的变换图

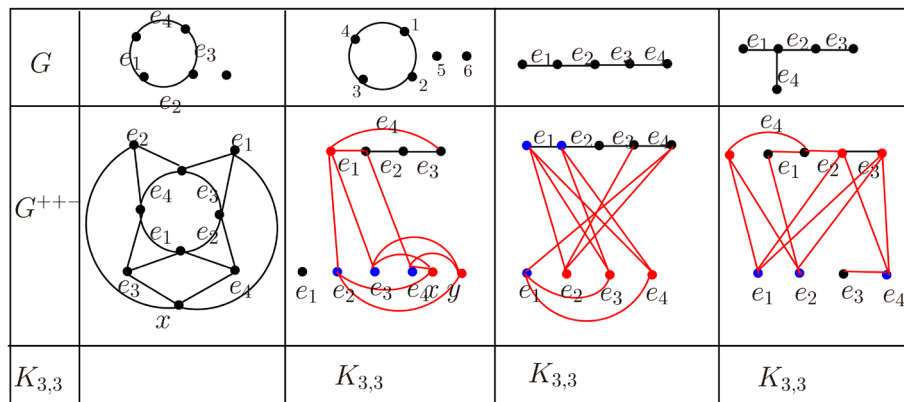


Figure 6. Transformation graph of some graphs of size 4

图 6. 一些边数为 4 的变换图

现在我们来考虑边数为 4 的图, 我们精确地给出了 11 种边数为 4 的没有孤立点的图, 如图 4 所示。

引理 2.3: 对于一个边数为 4 的图 G , G^{+-} 是可平面的当且仅当 $G \in \{C_4, C_4 + K_1, 2P_3\}$ 。

证明: 充分性: 在图 6 和图 7 中我们给出了 $(C_4 + K_1)^{+++}$, $(2P_3)^{+++}$ 平面嵌入, 因此 $(C_4 + K_1)^{+++}$, $(2P_3)^{+++}$ 是可平面的, 由引理 2.1, $(C_4)^{+++}$ 也是可平面的。

必要性: 设 G 是一个边数为 4 的图, 那么 G 可以由图 4 增加一些孤立点得到, 由图 4~图 7 和引理 2.1,

如果 $G \notin \{C_4, C_4 + K_1, 2P_3\}$, G^{+-} 是非可平面的。

现在我们来考虑边数为 5 的图。我们精确地给出了边数为 5 的没有孤立点的图, 如图 8 所示。

引理 2.4: 对于边数为 5 的图 G , 其变换图 G^{+-} 是非可平面的。

证明: 因为图 G 是一个边数为 5 的图(如图 8 所示), G 包含一个边数为 4 的子图 H , 不同构于 $C_4, C_4 + K_1, 2P_3$ 。由引理 2.3, H^{+-} 是非平面图。又由引理 2.1 知, H^{+-} 是 G^{+-} 的子图。所以, G^{+-} 也是非平面的。

引理 2.5: 如果图 G 的边数 $m \geq 6$, 那么 G^{+-} 是非可平面的。

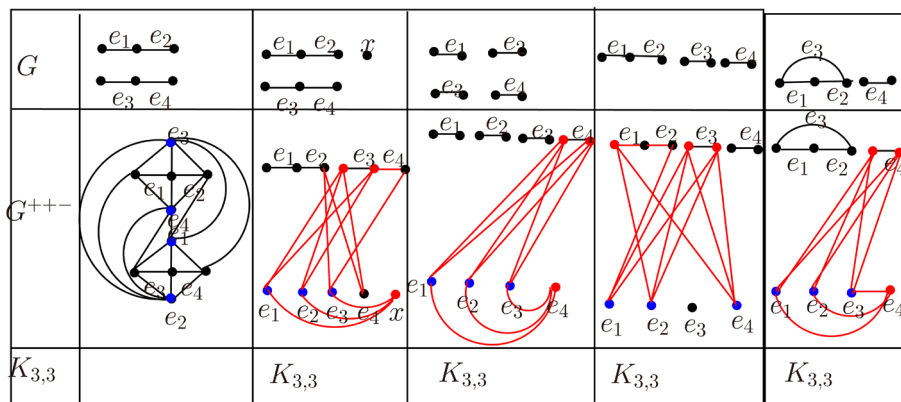


Figure 7. Transformation graph of some graphs of size 4

图 7. 一些边数为 4 的变换图

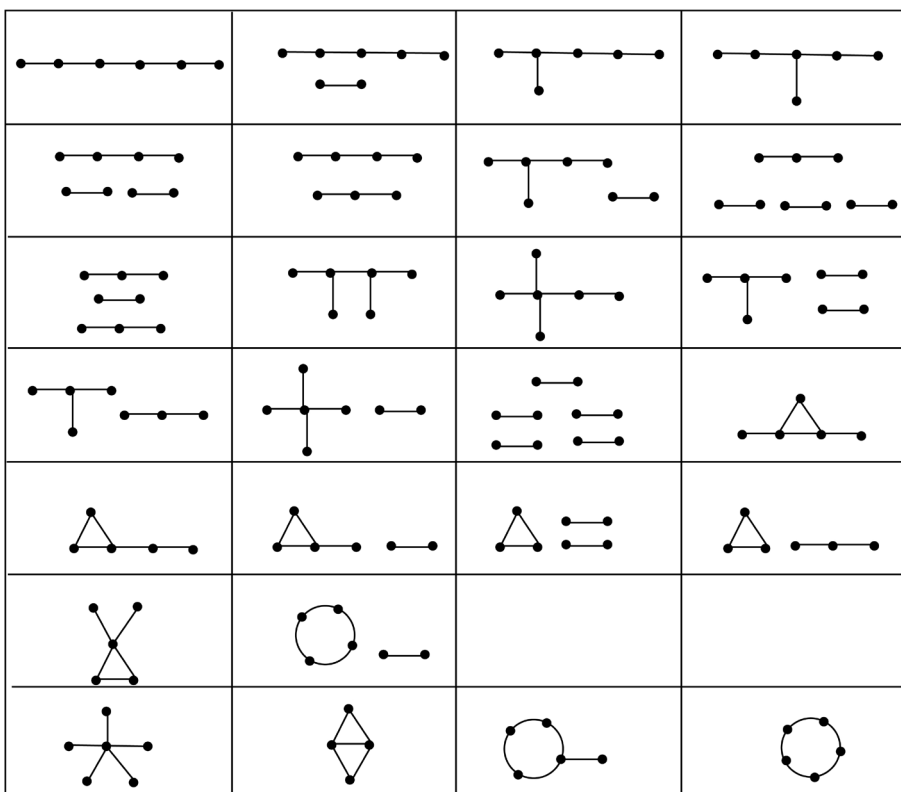


Figure 8. All graphs of size 5 without isolated vertices

图 8. 所有边数为 5 的没有孤立点的图

证明: 显然, G 包含一个边数为 5 的子图 H , 由引理 2.1 得到 H^{+-} 是 G^{+-} 的子图。更进一步, 由引理 2.4 得到 G^{+-} 是非可平面的。

参考文献

- [1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) Graph Theory with Applications. Macmillan, London. <https://doi.org/10.1007/978-1-349-03521-2>
- [2] Wu, B. and Meng, J. (2001) Basic Properties of Total Transformation Graphs. *Journal of Mathematical Study*, **34**, 109-116.
- [3] Behzad, M. (1967) A Criterion for the Planarity of the Total Graph of a Graph. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **63**, 679-681. <https://doi.org/10.1017/S0305004100041657>
- [4] Liu, X. (2006) On the Planarity of G^{-} . *Journal of Xinjiang University (Science & Engineering)*, **23**, 159-161.
- [5] Wu, B., Zhang, L. and Zhang, Z. (2005) The Transformation Graph G^{xyz} When $x, y, z \in \{+, -\}$. *Discrete Mathematics*, **296**, 263-270. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2005.04.002>
- [6] Chen, J., Huang, L. and Zhou, J. (2012) Super Connectivity and Super Edge-Connectivity of Transformation Graphs G^{+-} . *Ars Combinatoria*, **105**, 103-115.
- [7] Deng, A. and Kelmans, A. (2017) Laplacian Spectra of Digraph Transformations. *Linear and Multilinear Algebra*, **65**, 699-730. <https://doi.org/10.1080/03081087.2016.1202183>
- [8] Deng, A., Feng, M. and Kelmans, A. (2016) Adjacency Polynomials of Digraph Transformations. *Discrete Applied Mathematics*, **206**, 15-38. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2016.01.032>
- [9] Deng, A., Kelmans, A. and Meng, J. (2013) Laplacian Spectra of Regular Graph Transformations. *Discrete Applied Mathematics*, **161**, 118-133. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2012.08.020>
- [10] Li, J. and Liu, J. (2014) Some Basic Properties of a Class of Total Transformation Digraphs. *Ars Combinatoria*, **116**, 205-211.
- [11] Xu, L. and Wu, B. (2008) Transformation Graph G^{+-} . *Discrete Mathematics*, **308**, 5144-5148. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2007.09.040>
- [12] Yi, L. and Wu, B. (2009) The Transformation Graph G^{+-} . *Australasian Journal of Combinatorics*, **44**, 37-42.
- [13] Zhen, L. and Wu, B. (2013) Hamiltonicity of Transformation Graph G^{+-} . *Ars Combinatoria*, **108**, 117-127.

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2324-7991, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>
期刊邮箱: aam@hanspub.org