Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2018, 7(4), 334-337
Published Online April 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.74041

Incidence Coloring of Graphs G with $\Delta(G)\le 4$*

Zhenzhen Li[1], Xiaoping Liu[2]

[1]College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang
[2]College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang Institute of Engineering, Urumqi Xinjiang
Email: lizz0530@163.com

Received: Apr. 7th, 2018; accepted: Apr. 19th, 2018; published: Apr. 26th, 2018

Abstract

An incidence in a graph G is a pair (v,e), where v is a vertex of G and e is an edge of G incidence to v. Two incidence (v,e) and (u,f) are a djacent if at least one of the following holds: $u = v$, or $e = f$ or $uv\in\{e,f\}$. An incidence coloring of G is a coloring of its incidence assigning distinct colors to adjacent incidences. The incidence chromatic number of G, denoted by $\chi_i(G)$, is the smallest number of colors used in a incidence coloring of G. Recently, Gregor, luzar, and Sotak showed that $\chi_i(G)\le 7$ for a graph G with maximum degree at most 4. The aim of the present paper is to present a short proof of this result.

Keywords

Incidence Coloring, Incidence Chromatic Number

最大度为4的图的关联着色数

李珍珍[1]，刘晓平[2]

[1]新疆大学数学与系统科学学院，新疆 乌鲁木齐
[2]新疆工程学院，新疆 乌鲁木齐
Email: lizz0530@163.com

收稿日期：2018年4月7日；录用日期：2018年4月19日；发布日期：2018年4月26日

摘 要

图中的关联是由图G中的顶点v和图G中与v关联的边e所构成的有序对(v,e)，两个关联对(v,e)和(u,f)相邻

文章引用: 李珍珍, 刘晓平. 最大度为 4 的图的关联着色数[J]. 应用数学进展, 2018, 7(4): 334-337.
DOI: 10.12677/aam.2018.74041

当且仅当$u=v$或$e=f$或$uv\in\{e,f\}$成立。图的关联着色是指对图中G的关联有序对进行着色，使得相邻关联对着不同的颜色。图G的关联色数$\chi_i(G)$，是指图G的所有关联着色方式中使用的最小颜色的个数。近期，Gregor，luzar和Sotak证明对于$\Delta\le 4$的图G，$\chi_i(G)\le 7$。本文主要目标是对于这一结果给以短的证明。

关键词

关联着色，关联着色数

1. 引言

图的关联着色的概念是在 1993 年由 Brualdi 和 Massy [1]引入的。图 G 的关联是指由图 G 中相关联的点 v 和边 e 构成的有序对(v,e)。我们称两个关联(v,e)和(u,f)相邻当且仅当，$u=v$ 或 $e=f$ 或 $uv\in\{e,f\}$ 成立。图 G 的关联着色是指对图 G 中相邻的关联给以不同的颜色。图 G 的所有关联着色方式中所用的最少颜色数称为图 G 的关联着色数，记为 $\chi_i(G)$。Brualdi 和 Massy [1]提出猜想：对任意图 G，$\chi_i(G)\le\Delta(G)+2$。这一猜想在 1997 年被 Guiduli [2]证明是错误的。但是外平面图、超立方体图等诸多图类使猜想成立。Maydanskiy [3]证明了 Brualdi-Massy 猜想对 3-正则图成立。

引理 1.1：(Maydanskiy [3])对任意 3-正则图 G，$\chi_i(G)\le 5$.

近期，Gregor, Luzar, Sotak [4]证明了下述定理：

定理 1.2：(Gregor, Luzar, Sotak [4])若 G 是一个最大度为 4 的图，则 $\chi_i(G)\le 7$。

本篇文章主要目标是对这个定理 1.2 给予新的简短证明。

我们证明的主要思想是借助于 Guiduli [2]提出的关联着色数的一个等价形式。如果一个有向图 D，它的连通分支都是有向星(边的方向由中心点指向外)，我们称 D 为有向星森林。一个有向图 D 的有向星荫度[5]，记为 $dst(D)$，是指覆盖 D 的所有弧所用的有向星森林数的最小值。一个图 G 的伴随有向图，记为 $D(G)$,是把 G 的每条边用一对双向弧替代所得到的有向图。图 G 的一个关联对 (v,e) 可看作是 $D(G)$的指向 v 的一个弧，这样图 G 的一个关联着色就转化为 $D(G)$的弧着色，其每个色类都是一个有向星森林。因此，任何图 G，$\chi_i(G)=dst(D(G))$。

2. 定理 1.2 的证明

如果 $\Delta(G)\le 3$，由定理 1.1，结论成立。以下对 $\Delta(G)=4$ 的情形进行证明.

首先，用 Gregor，Luzar，与 Sotak [4]所用方法，选取 G 的一个最大匹配 M。则 $V(G)\setminus V(M)$ 是一个独立集。用 A 表示 G 中所有未被 M 覆盖的 4 度点的集合。为了描述方便，我们称 $V(M)$ 中点及 M 中边为红色点或红色边，A 中点为黑色点。显然 G 中可能会有既不是黑色又不是红色的点。由 Hall 定理可证明存在匹配 $M'=\{vv':v\in A,v'\in V(M)\}$ 覆盖点集 A。我们称 M' 中边为黑色边。令 $G'=G\setminus(M\cup M')$，并称 G' 中边为蓝色边。如图 1 所示。

注意到 M' 中任意两个元素不会与 M' 中同一边的两个端点关联，由 M 与 M' 选取可得 $\Delta(G')\le 3$。由

定理 1.1，存在 $D(G')$ 的弧着色 $\varphi': A(D(G')) \to \{1,2,3,4,5\}$ 使得其每个色类都是一个有向星森林。对于任意点 x，我们用 $\varphi'(x)$ 表示 $D(G')$ 中与点 x 关联的弧所用的颜色集。

下面我们所采用的步骤有别于 Gregor，Luzar，与 Sotak [4]的证明方法：修改 φ'，进而得到我们所希望的 $D(G)$的弧着色。

步骤 1. 对图 G 的黑色边 $xy\left(x \in A, y \in N(A)\right)$，着 $D(G)$中弧 $a=(x,y)$ 颜色 $\varphi(a)$，$\varphi(a) \in \{1,2,3,4,5\} \setminus \varphi'(y)$。注意到，这里可能存在蓝色边 $xz\left(z \in N(A)\right)$ 使得弧 $b=(z,x)$ 满足 $\varphi'(b)=\varphi(a)$。如果这种情况发生，我们把蓝色弧 b 所着的颜色去掉。

经过步骤 1，图 $D(G)$中没有着色的弧由以下三类集合构成：所有红色弧构成的集合，由 $N(A)$指向 A 的黑色弧所构成集合，步骤 1 中蓝色弧 b 所构成的集合。用 D' 表示由 $D(G)$中没有被着色的弧所导出的 $D(G)$的子有向图，如图 2 所示。

以下证明 $dst(D')=2$。由 M 是最大匹配，得 D' 具有下列性质：

1) $\forall x \in V(D') \cap V(A), d_{D'}^{-}(x) \le 2$，$x$ 所关联的弧为黑色或蓝色；

2) 任意两条蓝色弧的头部端点互不相同；

3) 如果红色边 uv 的两个端点都与非红色弧关联，则 $N_{D'}^{+}(u)\setminus\{v\} = N_{D'}^{+}(v)\setminus\{u\}$ 且 $\left|N_{D'}^{+}(u)\setminus\{v\}\right|=1$(如图 2 中的 D_3)。

由上述性质((1)~(3))知，D' 的任 D' 意连通分支 C' 同构于 D_3，C 或 $D(K_2)$(如图 2)。显然有 $dst(D_3)=2$ 且 $dst(D_3)=2$，因此我们假定 C' 既不同构于 D_3，也不同构于 $D(K_2)$。对 C' 可以借助于步骤 1 对 $\varphi(a)$ 的选择做适当调整，使得任意连通分支都不包含黑蓝边交错圈 C_0，$|C_0|=2(\bmod 4)$，这类连通分支如图 2 中 C。

如果经过步骤 1 所得到的 D' 的连通分支 C 中包含黑蓝边交错圈 C_0，$|C_0|=2(\bmod 4)$ 则对 C_0 中黑色弧 $a=(x,y)$ 的对应颜色 $\varphi(a)$ 重新选择(此时 $\varphi(a)$ 至少有两种选着)，通过改变 $\varphi(a)$ 的选择消去圈 C_0 再次得到图 D'，此时中若包含 C_0，重复此过程且不选择相同黑色弧做颜色替换，依次下去，考虑到性质(1)及点的度数限制，有限步可得到 D'，使其连通分支都不包含黑蓝边交错圈 C_0，$|C_0|=2(\bmod 4)$。

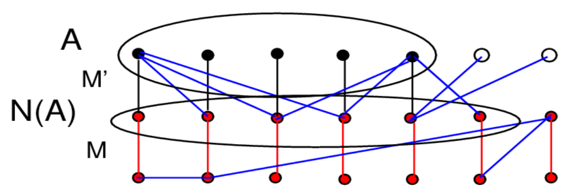

Figure 1. M, M', G' and their colors
图 1. M，M'，G'及它们的颜色

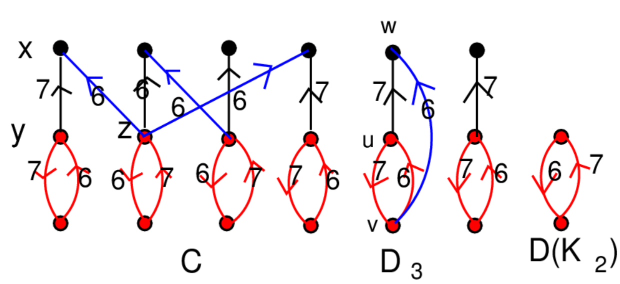

Figure 2. The subdigraph D' and its possible component C, D_3 or $D(K_2)$
图 2. 子有向图 D'及其可能的分支 $C, D_3, D(K_2)$

步骤 2. 对与图 C 同构的连通分支进行弧着色，首先把图中 C 蓝色弧用颜色 6 进行着色，且对图 C 中与蓝色弧具有相同尾部端点的红色弧和黑色弧用颜色 6 进行着色；其次把剩余的未被着色的黑色弧全部着 7 色并且把与黑色弧有公共尾部端点的红色弧着为颜色 7；最后把所有未被着色的红色弧用颜色 6 进行弧着色(如图 2)，因中 C 不具有黑蓝边交错圈 C_0，$|C_0| = 2(\mathrm{mod}\,4)$，此着色方式可行。

通过步骤 2 所得的 C 中的每个色类均为有向星森林，所以 $dst(D') = 2$。

因此，$\chi_i(G) = dst(D(G)) \le 7$。

参考文献

[1] Brualdi, R.A. and Massy, J.J.Q. (1993) Incidence and Strong Edge Colorings of Graphs. *Discrete Mathematics*, **122**, 51-58. https://doi.org/10.1016/0012-365X(93)90286-3

[2] Guiduli, B. (1997) On Incidence Coloring and Star Arboricity of Graphs. *Discrete Mathematics*, **163**, 275-278. https://doi.org/10.1016/0012-365X(95)00342-T

[3] Maydanskiy, M. (2005) The Incidence Coloring Conjecture for Graphs of Maximum Degree 3. *Discrete Mathematics*, **292**, 131-141. https://doi.org/10.1016/j.disc.2005.02.003

[4] Gregor, P., Luzar, B. and Sotak, R. (2017) Note on Incidence Chromatic Number of Subquartic Graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, **34**, 174-181. https://doi.org/10.1007/s10878-016-0072-2

[5] Algor, I. and Alon, N. (1989) The Star Arboricity of Graphs. *Discrete Mathematics*, **75**, 11-22. https://doi.org/10.1016/0012-365X(89)90073-3