Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2018, 7(4), 310-315
Published Online April 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.74037

A New Method to Find Eigenvalues of Special Matrices

Zunlin Tan, Chune Zhao, Zhiyuan Cheng

College of Science, China University of Petroleum, Qingdao Shandong
Email: tzlshare@163.com

Received: Apr. 3rd, 2018; accepted: Apr. 14th, 2018; published: Apr. 20th, 2018

Abstract

The eigenvalues of the matrix have an important role in many fields, but they are very complicated in practice. In this paper, we use the correlation property of determinant calculation and the multiplication of partitioned matrix to provide two general and simple methods for calculating eigenvalues of special matrices, simplifying calculation steps to improve computational efficiency.

Keywords

Partitioned Matrix, Determinant Calculation, Special Matrix

关于特殊矩阵求特征值的新方法

谭尊林，赵春娥，程志远

中国石油大学(华东)，理学院，山东 青岛
Email: tzlshare@163.com

收稿日期：2018年4月3日；录用日期：2018年4月14日；发布日期：2018年4月20日

摘 要

求矩阵的特征值在众多领域中有重要的作用，但实际操作起来比较繁琐。本文利用行列式计算的相关性质并结合分块矩阵的乘法，提供两种计算特殊矩阵求特征值的通用简便方法。简化计算步骤，提高计算效率。

关键词

分块矩阵，行列式计算，特殊矩阵

文章引用: 谭尊林, 赵春娥, 程志远. 关于特殊矩阵求特征值的新方法[J]. 应用数学进展, 2018, 7(4): 310-315.
DOI: 10.12677/aam.2018.74037

1. 引言

在线性代数领域中，矩阵的特征值在高等代数中占据着较为重要的地位。求矩阵 A 的一般方法为：通过一系列行列式的初等变换将 $|A-\lambda E|$ 化为特征多项式，然后求得特征值。对于此方法，计算量大，易于出错。本文给出的两种计算特殊矩阵的特征值的方法：其一，利用分块矩阵及行列式的计算性质，将 $2n$ 阶的方阵降阶为 n 阶；其二，利用矩阵的乘法，将 n 阶方阵降阶为向量的乘积。两种方法均简化计算，减轻了计算的工作量。

2. 特殊矩阵的分块求特征值

定理 1：设 $A_{2n}=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$，其中 A_{2n} 为 $2n$ 阶方阵，A、B、C、D 均为 n 阶方阵，若 A 可逆，且 $AC=CA$，则：

$$|A_{2n}-\lambda E|=|(A-\lambda E)(D-\lambda E)-CB|$$

证明：$\because A$，B，C，D 均为方阵，且 A 可逆，$AC=CA$ [1]。

$\therefore \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-CB|$

$\therefore |A_{2n}-\lambda E|=\begin{vmatrix} A-\lambda E & B \\ C & D-\lambda E \end{vmatrix}$

$\because (A-\lambda E)C=AC-\lambda EC=AC-\lambda C=CA-C\lambda E$

$\therefore (A-\lambda E)C=C(A-\lambda E)$ 且矩阵 $A-\lambda E$ 可逆；

$\therefore |A_{2n}-\lambda E|=|(A-\lambda E)(D-\lambda E)-CB|$

例 1. 已知 $A_4=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，求该矩阵的特征值。

解：1) 对于一般求解法：

$$|A_4-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & \lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ \lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & -\lambda \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ \lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\left[(1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ -\lambda & -\lambda \end{vmatrix}-\lambda\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -\lambda & -\lambda \end{vmatrix}\right]+\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2\lambda & \lambda \\ 0 & -\lambda & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3(\lambda-4)$$

求得矩阵 A_4 的特征值为：$\lambda_1 = 0$ (三重根)，$\lambda_2 = 4$。

2) 对于简便求解法：

将矩阵 A_4 分块为：$A_4 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$；其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -A$，$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = A$。

显然：矩阵 A 可逆；

又因为 $AC = -AA = CA$

$$|A_4 - \lambda E| = \left|(A - \lambda E)^2 - A^2\right| = \left|(A - \lambda E - A)(A - \lambda E + A)\right|$$

故由定理 1 得：

$$= \begin{vmatrix} \lambda(\lambda - 2) & 2\lambda \\ 2\lambda & \lambda(\lambda - 2) \end{vmatrix} = \lambda^3(\lambda - 4)$$

求得矩阵 A_4 的特征值为：$\lambda_1 = 0$ (三重根)，$\lambda_2 = 4$。

推论 1: 设 $A_{2n} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$，其中 A_{2n} 为 $2n$ 阶方阵，A、B、C、D 均为 n 阶方阵，若 D 可逆，且 $CD = DC$，

则：$|A_{2n} - \lambda E| = \left|(A - \lambda E)(D - \lambda E) - BC\right|$

证明：∵A，B，C，D 均为方阵，且 D 可逆，$CD = DC$；

∵ $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A - BD^{-1}C||D| = |AD - BD^{-1}CD| = |AD - BC|$

∴ $|A_{2n} - \lambda E| = \left|(A - \lambda E)(D - \lambda E) - BC\right|$

例 2. 已知 $A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0.5 & 0 \\ 1 & 1 & -0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 & 2 & 0 \\ -0.5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，求该矩阵的特征值。

解： 用推论 1 可将矩阵 A_4 分块为 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，其中 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix}$，$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$。

因为矩阵 D 可逆，且满足 $CD = DC$。

所以

$$\begin{aligned} |A_4 - \lambda E| &= |A_{2n} - \lambda E| = \left|(A - \lambda E)(D - \lambda E) - BC\right| \\ &= \left|\begin{bmatrix} (2-\lambda)^2 & 0 \\ 3 - 2\lambda & (2-\lambda)^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -0.75 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}\right| \\ &= \frac{1}{4}\lambda(2\lambda - 3)(2\lambda - 5)(\lambda - 2) \end{aligned}$$

解得特征值分别为：$\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 1.5$，$\lambda_3 = 2.5$，$\lambda_4 = 2$。

3. 特殊矩阵的分解求特征值

定理 2: 已知 n 阶方阵 $M_n = A^{\mathrm{T}}A$，其中 $A = (a_1\ a_2\ a_3 \cdots a_n)$，其中 $a_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 不全为 0。则 M_n 的特征值为：$\lambda_1 = 0$ $(n-1$ 重根$)$，$\lambda_2 = AA^{\mathrm{T}}$

M_n 的特征向量为：

当 $\lambda = 0$ 时：

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\quad \eta_2 = \begin{pmatrix} a_3 \\ 0 \\ -a_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\quad \eta_{n-1} = \begin{pmatrix} a_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -a_1 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 + a_n^2$ 时：

$$\eta_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

证明： 1) 对于一般解法：

$$A_n = \left|\lambda E - A^{\mathrm{T}} A\right| = \begin{vmatrix} \lambda - a_1^2 & -a_1 a_2 & \cdots & -a_1 a_n \\ -a_2 a_1 & \lambda - a_2^2 & \cdots & -a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n a_1 & -a_n a_2 & \cdots & \lambda - a_n^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 a_1 & \lambda - a_2^2 & \cdots & -a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n a_1 & -a_n a_2 & \cdots & \lambda - a_n^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_1^2 & -a_1 a_2 & \cdots & -a_1 a_n \\ -a_2 a_1 & \lambda - a_2^2 & \cdots & -a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n a_1 & -a_n a_2 & \cdots & \lambda - a_n^2 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda - a_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_3 a_2 & \lambda - a_3^2 & \cdots & -a_3 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n a_2 & -a_n a_3 & \cdots & \lambda - a_n^2 \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda A_{n-1} - a_1^2 \lambda^{n-1}$$

由于递推公式：

$$\begin{cases} A_n = \lambda A_{n-1} - a_1^2 \lambda^{n-1} \\ A_{n-1} = \lambda A_{n-2} - a_2^2 \lambda^{n-2} \\ \qquad \vdots \\ A_2 = \lambda A_1 - a_{n-1}^2 \lambda \end{cases}$$

可得：

$$A_n = \lambda^{n-1} A_1 - \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2\right)\lambda^{n-1} = \lambda^n - \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 + a_n^2\right)\lambda^{n-1}$$

显然， $A_n = 0$，即可求的特征值：

$\lambda_1 = 0$ （$n-1$ 重）， $\lambda_2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 + a_n^2$

根据特征值可求的特征向量分别为：

当 $\lambda = 0$ 时：

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} a_3 \\ 0 \\ -a_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_{n-1} = \begin{pmatrix} a_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -a_1 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 + a_n^2$ 时：

$$\xi_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

2) 对于简便解答方法：

运用特征值、特征向量的定义可求：

设 λ 是 $A^{\mathrm{T}}A$ 的特征值，ξ 是属于 λ 的特征向量，则：$A^{\mathrm{T}}A\xi = \lambda\xi$

若取 $\xi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

则有 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

1) 若 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$，则 $\lambda = 0$，$\xi_1 = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，$\xi_2 = \begin{pmatrix} a_3 \\ 0 \\ -a_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，$\xi_{n-1} = \begin{pmatrix} a_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -a_1 \end{pmatrix}$。

2) 若 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq 0$，则 $\lambda = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 + a_n^2$，

$$\xi_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

例 3. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&3&5&7\\3&9&15&21\\5&15&25&35\\7&21&35&49\end{pmatrix}$，求此矩阵的特征值与特征向量。

解：矩阵 A 可分解为：$A=\begin{pmatrix}1\\3\\5\\7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&5&7\end{pmatrix}$

当特征值 $\lambda_1=0$：

$$\xi_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}5\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}7\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

当特征值 $\lambda_1=84$：

$$\xi_4=\begin{pmatrix}1\\3\\5\\7\end{pmatrix}$$

4. 结论

对于定理 1 和定理 2 以及推论 1，均可以发现一般的求解方法在计算上较复杂，计算过程中也较容易出错，不方便检查正确与否；文中所给出的简便方法不仅简化了计算，而且便于检查。

致　谢

感谢老师给予的无私的指导与鼓励。

参考文献

[1] 陈志杰. 高等代数与解析几何(上) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2008: 330-340.