

Research on Three Common Regularized Image Processing Models

Beilei Tong^{1,2}, Qianshun Chang³

¹School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei Anhui

²School of Science, Southwest University of Science and Technology, Mianyang Sichuan

³Academy of Mathematics and Systems Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing

Email: beileitong@163.com

Received: May 1st, 2018; accepted: May 17th, 2018; published: May 25th, 2018

Abstract

Regularization is an important topic in inverse problems. Proper selection of regularization terms is essential for solving inverse problems. Image restoration is a typical inverse problem, so the discussion of regularization is also necessary for image restoration. Three regularization models, Tikhonov regularization, total variation regularization and gradient L_0 regularization are introduced. Examples are given to restore grayscale and RGB images. It is found that denoising with Tikhonov regularization can produce blurring, while denoising with total variation regularization can preserve the boundary and the detail information; however, the L_0 regularization smoothing is more sensitive to noise.

Keywords

Total Variation, Image Processing, Image Denoising, Tikhonov Regularization, L_0 -Smoothing, Bregman Iteration

三种常见的正则化图像处理模型研究

童蓓蕾^{1,2}, 常谦顺³

¹中国科学技术大学, 数学学院, 安徽 合肥

²西南科技大学, 理学院, 四川 绵阳

³中国科学院, 数学与系统科学研究院, 北京

Email: beileitong@163.com

收稿日期: 2018年5月1日; 录用日期: 2018年5月17日; 发布日期: 2018年5月25日

摘要

正则化是反问题中的一个重要课题, 恰当地选取正则化项对于反问题的求解至关重要。图像复原是一个典型的反问题, 因此正则化项的探讨对于图像复原也非常必要。介绍了Tikhonov正则、全变分正则及梯度的 L_0 正则等三种正则化模型, 分别给出算例对灰度图和RGB图进行了复原处理。发现Tikhonov正则化去噪时会产生模糊; 全变分正则化去噪能较好地保持边界; 而 L_0 正则化平滑方法对噪音比较敏感。

关键词

全变分, 图像处理, 图像去噪, Tikhonov正则, L_0 -平滑, Bregman迭代

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

1.1 背景

图像的传播利用与人们的生活密切相关。然而, 受传输过程中硬件性能的局限, 经过传递后的图像可能会产生降质, 如携带噪音、产生模糊或者缺损等等。为了得到比较理想的图像, 人们需要对这些退化的图像进行一些处理。基于变分法的图像处理方法是一类重要的方法, 已经被广泛研究, 例如, 基于变分法的图像去噪[1] [2] [3] [4] [5]、图像平滑[6] [7]、图像去模糊[8] [9] [10] [11]、图像填补[12] [13]等等。本文针对不同的图像处理目的, 列出几种带有不同正则化项的变分图像处理方法加以分析和比较, 揭示其中的规律, 以便于更进一步的研究。

1.2. 数字图像

本文所研究的图像均指数字图像, 着重研究对灰度图像和 RGB 图像的处理问题。灰度图的每个像素点上只有一个采样, 而该采样的值的取值范围是 0~255, 将取值为 0 时的黑色和取值为 255 的白色之间划分成 256 个灰度级。而 RGB 图则包括红色、绿色、蓝色三个通道, 每个像素点对应一个向量 (R, G, B) , 分别代表该点在“红、绿、蓝”三个通道上的灰度值。每个通道的最大亮度级是 255, 而通道中的最小亮度级是 0。

定义在平面几何区域 Ω 上的数字图像在数学上用空间二元函数 $u(i, j)$ 表示, 其中 $(i, j) \in \Omega$, $u(i, j) \in [0, 255]$ 。为方便研究, 通常选 Ω 为矩形区域, 这时, 灰度图和 RGB 图分别用一个二维矩阵和三维矩阵表示。

1.3. 图像复原

图像复原指的是用各种方法对降质的图像进行处理, 从而尽可能地恢复原始图像的图像处理过程。常见的图像复原方法有: 图像去噪、平滑、去模糊和填补等等。本文以图像去噪为例, 研究一幅带有加性噪音的图像

$$f = u + n \quad (1)$$

其中, f 指的是带有噪音的降质图像, u 表示未受噪音污染的原始图像, 而 n 代表一个均值为零的高斯白噪音。图像去噪的目的就是建立一个数学模型, 以 f 为基础反解出 u 。图像处理的效果很大程度上取决于所建立的数学模型。即使对同一幅图像, 利用不同的数学模型, 求出的结果可能会有很大的差别。所以, 图像复原的前期, 人们必须尽量利用已知的先验信息来建立一个恰当的数学模型。

建立好模型后, 图像复原就成了数学上逆问题的求解。最简单的求解办法就是用最小二乘法, 即求解如下的最小二乘模型

$$\min_u \|u - f\|_2^2 \quad (2)$$

这里, f 指的是降质的图像, u 代表将要被复原的图像。(2)式的目的是不让被复原的图像偏离降质图像太多, 但这可能会造成图像的过度拟合。而且, 由于(2)式的目标项没有其它的约束项, 所以得到的结果可能不唯一。因此, 最小二乘法是一个不适定的方法, 通常还需在(2)式中添加具有先验约束作用的正则化项来提高复原效果。本文介绍三种常见的正则化图像处理方法, 分析比较三种处理后结果的特点, 以便于有针对性地选择合适的正则化项来处理图像。

2. 正则化图像复原方法

2.1. Tikhonov 正则——用图像梯度的 L_2 模的平方做正则化项

图像的边界给人们提供了非常重要的视觉信息, 因此, 在图像复原时, 所提出的模型要能够尽可能地保留这些边界信息。而图像边界的梯度一般是比较大的, 于是人们考虑对图像梯度加以约束。首先取梯度的 L_2 模的平方最小作为正则约束条件, 转换为无条件的近似问题就是如下模型:

$$\min_u \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_2^2 \quad (3)$$

其中, 第一项称为 Tikhonov 正则项, 第二项是保真项, λ 是一个用来平衡正则项和保真项的正常数, 当 λ 趋于无穷大时, 模型(3)的解就可以无限接近约束最小化问题的解了。为求解 Tikhonov 正则化模型(3), 我们求解其对应的 Euler-Lagrange 方程

$$\lambda u - \Delta u = \lambda f \quad (4)$$

对(4)式做离散化处理。

假设平面矩形区域有 $N \times M$ 个像素点, 利用向前差分将拉普拉斯算子离散为:

$$\Delta u(i, j) = u(i+1, j) + u(i-1, j) - 4u(i, j) + u(i, j+1) + u(i, j-1), \quad 1 < i < M, 1 < j < N,$$

对边界进行镜像延拓得,

$$\Delta u(1, j) = u(2, j) - 3u(1, j) + u(1, j+1) + u(1, j-1), \quad 1 < j < N$$

$$\Delta u(1, 1) = u(2, 1) - 2u(1, 1) + u(1, 2),$$

类似可得当 $i = M, j \in \{1, N\}$ 时拉普拉斯算子的离散化表达式。

于是, 由(4)式离散解得:

$$u(i, j) = \frac{1}{\lambda + 4} (u(i+1, j) + u(i-1, j) + u(i, j+1) + u(i, j-1)) + \frac{\lambda}{\lambda + 4} f(i, j)$$

设 $u^0 = 0$, 利用 Jacobi 迭代法求解 u , 有:

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{\lambda + 4} (u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k) + \frac{\lambda}{\lambda + 4} f_{i,j}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5)$$

结果见数值算例 1。由算例 1 可以看出, 去噪的同时带来很大的模糊。

2.2. Total Variation (TV)正则——用图像的 TV 模(即图像梯度的 L_1 模)做正则项

2.2.1. 背景

由于 Tikhonov 正则化项可导, 因此 Tikhonov 正则化模型比较简单易求。但是由数值算例 1 可以看出, 该方法在去除图像噪声的同时会产生很严重的模糊。为了克服这个问题, 1992 年, Rudin, Osher, 和 Fetamin 等人提出了一种新的正则化模型——ROF (分别取三人姓名的首字母)模型[1]。ROF 模型采用图像梯度的 L_1 模做正则约束, 即

$$\min_u \|\nabla u\|_1 + \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_2^2 \quad (6)$$

其中 $\|\nabla u\|_1$ 是 u 的梯度的 L_1 模, 也称为 u 的全变分(total variation, 简称为 TV)。因此, (6)式所代表的模型被称为基于 TV 的正则化去噪模型。TV 正则项的引入使得在获取最佳图像的同时要限定总变差最小, 因此, 图像中的水平或者铅直的边界会被很好保持。相比用 Tikhonov 正则化去噪, 用 TV 正则化模型去噪, 效果更好模糊更少。ROF 模型具有保持边界的良好性质, 自提出以来受到了广泛地关注, 大量的学者提出了多种改进的求解方法。2004 年, Chambolle [2]提出一种对偶投影法求解 ROF 模型。该法将 TV 正则化模型(6)对应的欧拉 - 拉格朗日方程做等价变形, 把原始问题的求解转化为对偶空间上的一个投影问题的求解。该法简单快速, 去噪效果很好。传统的去噪方法在去除噪声的同时都会丢掉一些有用的细节信息, 为此, Osher 等人 2006 年提出了一个基于 Bregman 距离的 Bregman 迭代规则算法[3], 该法在每次迭代求解时都会加入前一步处理中丢弃的噪声。因为在被丢弃了的噪声项中会包含图像的部分边界和细节信息, 所以, 加入这些被丢弃的信息, 就可能会使后面的结果更接近原始图像。鉴于噪声较重时直接回带去噪效果不理想, 2017 年童将 Bregman 迭代规则算法和 Chambolle 的对偶投影法结合提出了一个加权噪声回带的去噪模型[4], 该法先给 Bregman 迭代规则算法的噪声回带项配以一个权重系数, 然后再用 Chambolle 的对偶投影法来求解每一单步, 去噪效果优于两种方法中的任意一种方法。本文的 TV 正则化部分的算例都将用此法实现。

为了将两种方法统一起来, 童将加权去噪算法的目标方程变为:

$$u_{k+1} = \operatorname{artmin}_{u \in BV(\Omega)} \left\{ \|\nabla u\|_1 + \frac{1}{2\lambda} \|g + b_k - u\|_2^2 \right\} \quad (7)$$

2.2.2. 算法

L_1 梯度最小化算法

输入: 图像 g , 均衡系数 β , 均衡系数 $\lambda = \lambda_0 > 0$

初始化: $b_0 \leftarrow 0, k \leftarrow 0$

循环迭代:

用 Chambolle 的投影法求解(7) 式得

$$u_{k+1} = g + b_k - \pi_{\lambda k}(g + b_k) \quad (8)$$

迭代更新:

$$b_{k+1} = b_k + \beta \pi_{\lambda k}(g + b_k) \quad (9)$$

直到: $\|u_{k+1} - u_k\| < tol$, tol 是容许误差

输出: 结果图 u_{k+1} .

2.3. 稀疏正则——用梯度的 L_0 模做正则项

2.3.1. 背景

前面, 我们介绍了两种正则化的去噪方法: Tikhonov 正则化去噪法和 TV 正则化去噪方法。这两种方法分别以图像梯度的 L_2 模的平方和图像梯度的 L_1 模作为正则项。Tikhonov 正则化模型具有一定的去噪能力, 但是会带来很大的模糊, 而 TV 正则化去噪模型能够有效去除噪音并保护水平和铅直边界。为了更好的提取图像的边界信息, 2011 年, 徐立等人提出了一种基于图像梯度 L_0 模的正则化图像稀疏平滑模型[6]。该方法以图像梯度的 L_0 模作为正则项, 对总体梯度的非零数加以限定, 不仅可以平滑掉内部低幅细节和纹理而且还能有效地保护图像的全局主要边界, 从而提高了图像边界的识别度, 便于边界检测等更进一步的图像处理。2018 年何等人提出了一个截断 L_0 正则化平滑方法[7], 改进了[6]的结果。本文我们着重介绍文章[6]提出的梯度的 L_0 模图像稀疏平滑模型:

$$\min_S \|S - I\|_2^2 + \lambda C(S) \quad (10)$$

其中, I 为输入图像, S 为平滑后的图像, $C(S)$ 代表非零梯度的个数(即梯度的 L_0 模)

$$C(S) = \# \left\{ p \mid \left| \partial_x S_p \right| + \left| \partial_y S_p \right| \neq 0 \right\} \quad (11)$$

2.3.2. 算法

通常, 梯度的 L_0 模计算比较困难, 徐等人给出了一种精巧的稀疏梯度计数格式, 使 L_0 模最小化问题(10)得到了很好的解决。

首先, 引入两个辅助变量 h_p, v_p 替换 $\partial_x S, \partial_y S$, 将目标变为:

$$\min_{S, h, v} \left\{ \sum_p (S_p - I_p)^2 + \lambda C(h, v) + \beta \left((\partial_x S_p - h_p)^2 + (\partial_y S_p - v_p)^2 \right) \right\} \quad (12)$$

这里, β 是一个自适应参数, 用来控制 (h_p, v_p) 和 $(\partial_x S_p, \partial_y S_p)$ 的近似程度, 其值越大, 误差越小。引入分裂迭代法, 对(12)的求解转化为两个子问题的迭代求解。

子问题 1: 计算 S

将目标函数(12)中含 S 的项分离出来, 得到子问题

$$\min_S \left\{ \sum_p (S_p - I_p)^2 + \beta \left((\partial_x S_p - h_p)^2 + (\partial_y S_p - v_p)^2 \right) \right\} \quad (13)$$

利用快速傅里叶变换, 算出

$$S = F^{-1} \left(\frac{F(I) + \beta \left(F(\partial_x)^* F(h) + F(\partial_y)^* F(v) \right)}{F(1) + \beta \left(F(\partial_x)^* F(\partial_x) + F(\partial_y)^* F(\partial_y) \right)} \right) \quad (14)$$

上式中的 F 表示快速傅里叶变换, $F(\cdot)^*$ 表示复共轭, $F(1)$ 表示狄拉克函数的傅里叶变换。由于引入了快速傅里叶变换, (14)式只需在傅里叶域上的进行做逐个像素的加、乘和除法运算而不需要处理矩阵逆的问题, 因此比原始方程的求解更简单。

子问题 2: 计算 (h, v)

新的子问题为:

$$\min_{h, v} \left\{ \sum_p \left((\partial_x S_p - h_p)^2 + (\partial_y S_p - v_p)^2 \right) + \frac{\lambda}{\beta} C(h, v) \right\} \quad (15)$$

此时, $C(h, v)$ 返回 $|h| + |v|$ 的非零元素个数。将上式中的最小化问题转化到在每一个像素上处理, 然后再连加得:

$$\sum_p \left\{ \min_{h_p, v_p} \left((\partial_x S_p - h_p)^2 + (\partial_y S_p - v_p)^2 \right) + \frac{\lambda}{\beta} H(h_p, v_p) \right\} \quad (16)$$

此时, 正则化函数变成了一个二值函数:

$$H(h_p, v_p) = \begin{cases} 1 & |h_p| + |v_p| \neq 0 \\ 0 & |h_p| + |v_p| = 0 \end{cases} \quad (17)$$

L₀ 梯度最小化算法

输入: 图像 I , 光滑权系数 λ , 参数 β_0, β_{\max} , 比率 κ

初始化: $S \leftarrow I, \beta \leftarrow \beta_0, i \leftarrow 0$

循环迭代:

对于已知的 $S^{(i)}$, 利用(17)式求解 $(h_p^{(i)}, v_p^{(i)})$;

对于已知的 $(h_p^{(i)}, v_p^{(i)})$, 利用(14)式求解 $S^{(i+1)}$

$\beta \leftarrow \kappa\beta, i++$

直到: $\beta > \beta_{\max}$

输出: 结果图 S .

3. 数值算例

算例 1. 用三种模型分别对 256×256 个像素的 Lena 灰度图做测试, 结果如图 1 所示。左上图是加了高斯白噪声的 Lena 图, 噪声均方差为 12。右上图显示的是用 Tikhonov 正则化方法做了 10 次迭代计算后的结果, 这里, 我们取 $\lambda = 0.01$ 。左下图是用 TV 正则化去噪方法处理的结果。在 TV 正则化算法中, 取 $\lambda = 0.0001, \beta = 0.1$, 做了 1 次外部 Bregman 迭代和 10 次投影迭代。右下图是用 L₀ 平滑方法处理的结果, 我们使用徐立的代码计算, 调用 L₀ Smoothing 函数时, 取平滑参数为 0.005, $\kappa = 2$ 。通过比较我们发现, Tikhonov 正则化方法去噪图像有明显的模糊。而 TV 正则化方法不但可以较好地保持大部分的边界, 没有造成太大的模糊。用 L₀ 正则化法求解后可以抹掉细节并且可以很好地保持边界。

算例 2. 仿照算例 1, 对 512×512 个像素 Lena 的 RGB 彩色图像进行了处理。分别在 R、G、B 三个通道上调用 L₀ Smoothing 函数进行平滑(参数设置同算例 1), 再调用 cat() 函数将各个通道的处理结果合并, 结果见图 2。

算例 3. 本算例对两幅 545×500 个像素的蝴蝶花和虞美人花分别进行了 L₀ 平滑实验, 结果见图 3。图 3 中第一行左右两边各是蝴蝶花和虞美人花。第二行给出的是用 L₀ 平滑方法处理的结果, 蝴蝶花瓣上大部分比较浅的细小线条被抹去了, 主要边界被完整地保留; 而虞美人花瓣上大部分不规则纹理也被平滑掉了, 较大的纹理边界被保留了下来。第三行是利用 sobel 算子提取的边界取反后的得到的边界图像。

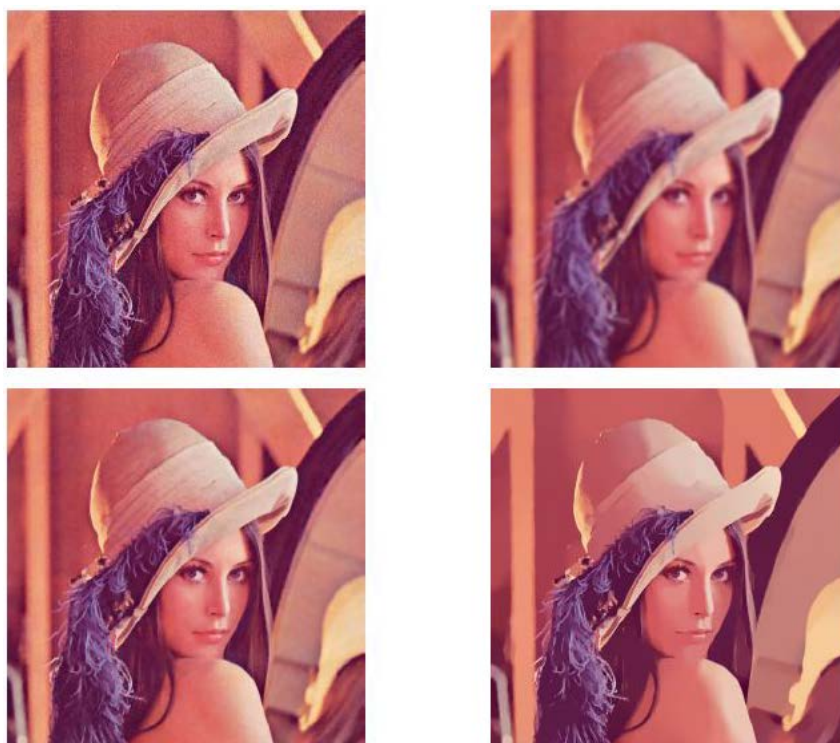
算例 4. 考察 L₀ 平滑方法对噪声的敏感性, 结果见图 4。图 4 第一行(a)图是 256×256 的 Lena 原图, (b)-(f)是带不同程度噪声的六幅图, 其噪声水平见表 1。图 4 中第二行和第三行分别是调用 L₀ Smoothing 函数对第一行图像的平滑结果, 平滑参数分别取 0.005 和 0.01, 其 PSNR 值见表 1 第二、三行。容易看出, 当平滑参数取 0.005 时, 对低噪声平滑效果比较好, 而对高噪声图像的平滑效果较差; 二当平



左上图: 256×256 个像素的 Lena 图像; 右上图: Tikhonov 正则化去噪结果; 左下图: TV 正则化去噪结果; 右下图: L_0 稀疏正则化结果

Figure 1. Noisy image and the processing results of a gray image

图 1. 噪音图和处理结果



左上图: 512×512 个像素的图像, 添加了均方差 $\sigma = 12$ 的高斯白噪音; 右上图: Tikhonov 正则化结果; 左下图: TV 去噪结果; 右下图: L_0 平滑结果

Figure 2. Noisy image and the processing results of a RGB images

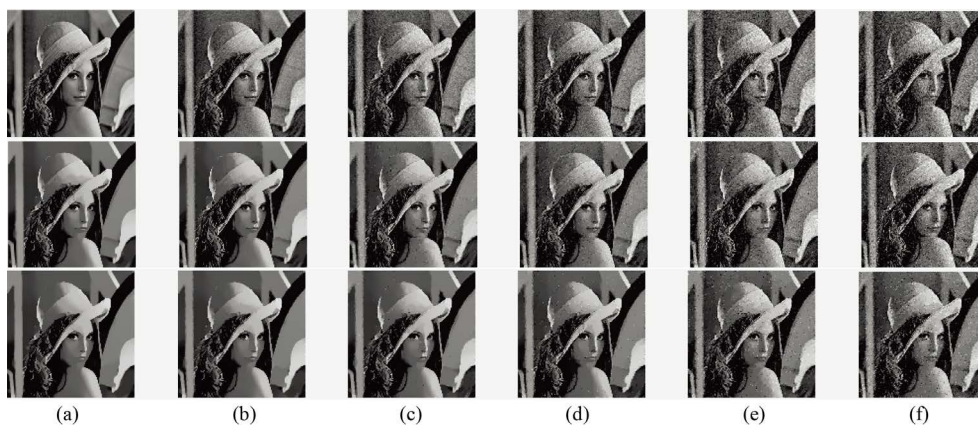
图 2. RGB Lena 图像的噪音图和处理结果



第一行图: 545×500 个像素的两幅图像; 第二行图: L_0 平滑的结果; 第三行图: 对平滑后的图像提取的边界

Figure 3. L_0 smoothing and sketching

图 3. L_0 平滑和边界提取



第一行: 待平滑的图像, 噪音程度见表 1 第一行; 第二行: 平滑参数取 0.005 时的平滑结果, PSNR 值见表 1 第二行; 第三行: 平滑参数取 0.01 时的平滑结果, PSNR 值见表 1 第三行

Figure 4. Images with different noise levels and their L_0 smoothing results

图 4. 带不同程度高斯白噪音的图像及其 L_0 平滑结果

Table 1. Noise levels and PSNR values after L_0 smoothing (unit: dB)
表 1. 噪音程度及 L_0 平滑后的 PSNR 值(单位: dB)

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
Inf	28	25	23.54	21.56	20.63
29.0256	28.8467	27.9730	26.1940	23.4210	22.0867
26.4466	26.6078	26.7883	26.5907	25.3244	24.1226

滑参数取 0.01 时, 对高噪音的图像平滑效果相对较好而对低噪音图像的平滑效果不好。但总的来说噪音越重平滑函数对噪音的去除效果越差。

4. 结论和展望

本文讨论了三种正则化图像处理方法, 其中 Tikhonov 正则化方法对噪音去除有一定的效果, 但是, 由于它是为中心像素周围像素做加权和, 因此会带来图像的模糊。而 TV 正则化方法, 由于运用了图像梯度的 L_1 模, 所以在去除噪音的同时能保持图像的边界和细节, 尤其是水平和铅直边界。TV 正则化去噪法的去噪效果非常明显, 同时不会引起严重的像素模糊, 因此是比较好的去噪方法。而 L_0 平滑法能够去除图像的大部分细节, 保持全局主要边界信息, 有利于对图像进行轮廓提取或者对图像做版画处理等艺术加工, 但是对噪音比较敏感。

本文仅以图像去噪为例, 只针对三种具有单一的正则项的模型进行了讨论。未来还可以对以下两方面问题进行探讨:

- 1) 含有其他单个正则项的方法;
- 2) 含单个正则项的图像处理模型和含多个正则项的图像处理模型的对比分析。

致 谢

本文工作得到了四川省教育厅科研项目(17ZB0447)的资助。

参考文献

- [1] Rudin, L.I., Osher, S. and Fatemi, E. (1992) Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithms. *Eleventh International Conference of the Center for Nonlinear Studies on Experimental Mathematics: Computational Issues in Nonlinear Science: Computational Issues in Nonlinear Science*, **60**, 259-268. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(92\)90242-F](https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90242-F)
- [2] Chambolle, A. (2004) An Algorithm for Total Variation Minimization and Applications. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, **20**, 89-97. <https://doi.org/10.1023/B:JMIV.0000011321.19549.88>
- [3] Osher, S., et al. (2006) An Iterative Regularization Method for Total Variation-Based Image Restoration. *SIAM Journal on Multiscale Modeling & Simulation*, **4**, 460-489. <https://doi.org/10.1137/040605412>
- [4] Tong, B. (2017) A Weighted Denoising Method Based on Bregman Iterative Regularization and Gradient Projection Algorithms. *Journal of Inequalities & Applications*, **2017**, 279. <https://doi.org/10.1186/s13660-017-1551-4>
- [5] Goldstein, T. (2009) The Split Bregman Method for l1-Egularized Problems. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **2**, 1-21. <https://doi.org/10.1137/080725891>
- [6] Xu, L., Lu, C., Xu, Y. and Jia, J. (2011) Image Smoothing via L_0 Gradient Minimization. *ACM Transactions on Graphics*, **30**, 1-12.
- [7] He, L. and Wang, Y. (2018) Image Smoothing via Truncated L_0 Gradient Regularisation. *IET Image Processing*, **12**, 226-234. <https://doi.org/10.1049/iet-ipr.2017.0533>
- [8] Wang, Y., Yang, J., Yin, W. and Zhang, Y. (2008) A New Alternating Minimization Algorithm for total Variation Image Reconstruction. *Siam Journal on Imaging Sciences*, **1**, 248-272. <https://doi.org/10.1137/080724265>
- [9] Zhang, X., Burger, M., Bresson, X. and Osher, S. (2010) Bregmanized Nonlocal Regularization for Deconvolution and

-
- Sparse Reconstruction. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **3**, 253-276. <https://doi.org/10.1137/090746379>
- [10] Pan, J., Hu, Z., Su, Z. and Yang, M.H. (2017) L_0 -Regularized Intensity and Gradient Prior for Deblurring Text Images and Beyond. *IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence*, **39**, 342-355. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2016.2551244>
- [11] Xu, L., Zheng, S. and Jia, J. (2013) Unnatural L_0 Sparse Representation for Natural Image Deblurring. *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, **9**, 1107-1114. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2013.147>
- [12] Chan, T.F. and Shen, J. (2010) Variational Image Inpainting. *Communications on Pure & Applied Mathematics*, **58**, 579-619. <https://doi.org/10.1002/cpa.20075>
- [13] Esedoglu, S. and Shen, J. (2002) Digital Inpainting Based on the Mumford-Shah-Euler Image Model. *European Journal of Applied Mathematics*, **13**, 353-370. <https://doi.org/10.1017/S0956792502004904>

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2324-7991, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: aam@hanspub.org