Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2018, 7(5), 525-529**
Published Online May 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.75064

Truncation Errors for Multi-Dimensional Whittaker-Shannon Sampling Expansion

Tongxin Wang, Jin Chen, Wenjing Lu, Yongjie Han

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan
Email: lwjzbl@163.com, hanyj@mail.xhu.edu.cn

Received: Apr. 26th, 2018; accepted: May 15th, 2018; published: May 22nd, 2018

Abstract

In this paper, we study a general model that uses linear functionals to cover several errors in one formula, consider sampling series with measured sampled values for band limited signals without decay assumption, and obtain the optimal bounds of truncation errors for band limited signal functions from Paley-Wiener space $B_{\upsilon}^{2}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$.

Keywords

Band-Limited Functions, Whittaker-Shannon Theorem, Localized Sampling, Truncation Error

多元Whittaker-Shannon采样展开的截断误差

王桐心，陈　锦，陆文静，韩永杰

西华大学理学院，四川 成都
Email: lwjzbl@163.com, hanyj@mail.xhu.edu.cn

收稿日期：2018年4月26日；录用日期：2018年5月15日；发布日期：2018年5月22日

摘　要

本文利用线性泛函构造采样级数，研究了一个覆盖几个误差的通用模型。并考虑了在无衰减假设条件下，Paley-Wiener函数类 $B_{\upsilon}^{2}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ 的截断误差的最优边界。

文章引用: 王桐心, 陈锦, 陆文静, 韩永杰. 多元 Whittaker-Shannon 采样展开的截断误差[J]. 应用数学进展, 2018, 7(5): 525-529. DOI: 10.12677/aam.2018.75064

关键词

有限带宽函数，Whittaker-Shannon定理，局部采样，截断误差

1. 引言

令 $L_p(\mathbb{R}^d)$，$1\le p\le\infty$，表示赋予以下范数的全体在 $\mathbb{R}^d$ 上具有 p 次勒贝格可积函数所组成的空间。其范数可表示为

$$\|f\|_{L_p} := \begin{cases} \left(\int_{R^d} |f(\boldsymbol{t})^p| \mathrm{d}\boldsymbol{t}\right)^{1/p}, & 1\le p<\infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{t}\in R^d} |f(\boldsymbol{t})|, & p=\infty. \end{cases}$$

记 $Z_d=\{1,2,3,\cdots,d\}$。如果对于任意的正坐标向量 $\boldsymbol{v}:=(\upsilon_j : j\in Z_d)$，且对 $\forall\varepsilon>0$ 都存在一个正整数 c，使得对所有的复向量 $\boldsymbol{z}:=(z_j : j\in Z_d)\in\mathbb{C}^d$，有

$$|h(\boldsymbol{z})|\le c\exp\left(\sum_{j\in Z_d}(\upsilon_j+\varepsilon)|z_j|\right).$$

则称 h 是指数型 $\boldsymbol{v}$ 的整函数。

我们用 $E_{\boldsymbol{v}}(\mathbb{C}^d)$ 表示所有指数型 $\boldsymbol{v}$ 的整函数所构成的空间。令 $B_{\boldsymbol{v}}(R^d)$ 为 $E_{\boldsymbol{v}}(\mathbb{C}^d)$ 的子空间，并且在 $\mathbb{R}^d$ 上是有界的。对于任意的 $1\le p\le\infty$，我们记

$$B_{\boldsymbol{v}}^p(\mathbb{R}^d) := B_{\boldsymbol{v}}(\mathbb{R}^d)\cap L_p(\mathbb{R}^d).$$

对于向量 $\boldsymbol{v}=(\upsilon_j : j\in Z_d)\in\mathbb{R}_+^d$，有如下矩形：

$$I_{\boldsymbol{v}}^d := \prod_{j\in Z_d}[-\upsilon_j,\upsilon_j]$$

当 $\boldsymbol{v}=\upsilon\boldsymbol{e},\upsilon\in R_+$，我们用 I_υ^d 来表示。根据 Schwartz 定理，我们有

$$B_{\boldsymbol{v}}^p(R^d)=\left\{f\in L_p(R^d) : \sup p\hat{f}\subseteq I_{\boldsymbol{v}}^d\right\}$$

其中，$\hat{f}$ 是 f 在分布意义下的傅里叶变换。特别地，当 $p=2$ 时，它就是典型的 Paley-Wiener 定理[1]。

著名的 Whittaker-Shannon 采样定理描述的是对于每一个信号函数 $f\in B_\upsilon^2(\mathbb{R})$ 可以被实际的采样值 $\{k/\upsilon\}_{k\in Z}$ 完全的重构[2]。房艮孙[3]得到了多维的 Whittaker-Shannon 表示定理。

定理 A 令 $f\in B_{\boldsymbol{v}}^p(\mathbb{R}^d), 1<p<\infty$。那么对于任意的 $\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d$ 有

$$f(\boldsymbol{t})=(S_{\boldsymbol{v}}f)(\boldsymbol{t}) := \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} f\left(\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{v}}\right)\operatorname{sin}c(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}-\boldsymbol{k}), \tag{1}$$

其中，$\operatorname{sin}c(\boldsymbol{t})=\prod_{j=1}^d \operatorname{sin}ct_j, \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{v}} := (k_1/\upsilon_1,\cdots,k_d/\upsilon_d)$ 且 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t} := (\upsilon_1t_1,\cdots,\upsilon_dt_d)$。公式(1)右边的级数在 $\mathbb{R}^d$ 上完全

一致收敛。

在实际情况下，我们只有有限多个采样值可用，因此就产生了截断误差

$$\left| f(\boldsymbol{t}) - \sum_{|k_d| \le N_d} \cdots \sum_{|k_1| \le N_1} f\left(\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{v}}\right) \sin c(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t} - \boldsymbol{k}) \right|$$

在假定 f 满足衰减条件 $|f(\boldsymbol{t})| \le \frac{C}{|\boldsymbol{t}|^{\delta}}$ 下的截断误差已经被广泛的研究，其中 $\delta > 0$ [4] [5]。

为了得到我们的主要结果，我们需要误差模量

$$\Omega_{\boldsymbol{v}}(f, \lambda) := \sup\left|\lambda_k f(\cdot + \boldsymbol{k}/\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{k}/\boldsymbol{v})\right|, \Omega > 0$$

其中 $\lambda = \{\lambda_k\}$ 是连续线性泛函 $C_0(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ 的任意序列，$C_0(\mathbb{R}^d)$ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上所有连续且趋于零的函数所构成的 Banach 空间。如果没有出现混淆，我们可以将 $\Omega_{\boldsymbol{v}}(f, \lambda)$ 写为 $\Omega(f, \lambda)$。误差模量 Ω 为一个信号的测量采样值的质量提供了一个量。当这个函数的 λ 是具体的，我们可以对 Ω 得到一些合理的估计。采样值的采样级数可表示为

$$\left(S_{\boldsymbol{v}}^{\lambda} f\right)(\boldsymbol{t}) := \sum \lambda_k f(\cdot + \boldsymbol{k}/\boldsymbol{v}) \sin c(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t} - \boldsymbol{k}).$$

本文受文献[6] [7] [8]研究内容的启发，以局部采样为基础，用不同的方式截断上式中右端的级数。

对于任何 $N \in \mathbb{N}^d$，我们考虑有限和

$$\left(S_{\boldsymbol{v},N}^{\lambda} f\right)(\boldsymbol{t}) := \sum_{\mathrm{k\text{-}v\cdot t} \in I_N^d} \lambda_k f(\cdot + \boldsymbol{k}/\boldsymbol{v}) \sin c(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t} - \boldsymbol{k}),$$

其中，$\sin c(t) = \prod_{j=1}^{d} \sin c(t_j), t \in \mathbb{R}^d$。相应的截断误差定义如下：

$$\left(E_{\boldsymbol{v},N}^{\lambda} f\right)(\boldsymbol{t}) := \left| f(\boldsymbol{t}) - \left(S_{\boldsymbol{v},N}^{\lambda} f\right)(\boldsymbol{t}) \right|.$$

在下文中，我们用 C 来表示正常数。其中 C 与 $N, \boldsymbol{v}$ 无关。

2. 有限带函数的截断误差

通常在研究有限带函数的截断误差时，假设信号函数满足某些衰减条件。在本文中，我们将对 $B_{\boldsymbol{v}}^{p}(\mathbb{R}^d)$ 函数使用 Marcinkiewicz 类型不等式来代替衰变条件。

引理 2.1. [1] [9] 令 $1 \le p < \infty, f \in B_{\boldsymbol{v}}^{p}(\mathbb{R}^d)$。那么我们有

$$\left(\frac{1}{\prod_{j=1}^{d} \upsilon_j} \sum_{k \in \mathbb{Z}_d} \left| f\left(\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{v}}\right) \right|^p \right)^{1/p} \le C \|f\|_{L_p}. \tag{2}$$

定理 2.1. 令 $f \in B_{\upsilon e}^{p}(\mathbb{R}^d), 1 \le p < \infty, \Omega \le \upsilon^{-(d+1)r+d/p}$，则对任意的 $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^d$，有

$$\left(E_{\upsilon e, Ne}^{\lambda} f\right)(\boldsymbol{t}) \le C \upsilon^{-r+d/p} \ln^d \upsilon,$$

其中，$\boldsymbol{e} = (1, \cdots, 1)$。

为了证明定理 2.1，我们需要 $\sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d} |\sin c(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{k})|^q$ 的边界。

引理 2.2. [4]令 $d \ge 1, q > 1$。则对任意的 $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^d$,我们有

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d} |\sin c(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{k})|^q \le \left(\frac{q}{q-1}\right)^d. \tag{3}$$

定理 2.1 的证明： 由定理 A 我们有 $f(\boldsymbol{t})=(S_{\upsilon e}f)(\boldsymbol{t})$.则由 Hölder 不等式对常数 p 我们有

$$\left(E_{\upsilon e,Ne}^{\lambda}f\right)(\boldsymbol{t})\le I_1+I_2$$

其中

$$I_1=\left(\sum_{v\cdot\boldsymbol{t}-\boldsymbol{k}\notin I_{Ne}^d}\left|f\left(\frac{\boldsymbol{k}}{\upsilon}\right)\right|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{v\cdot\boldsymbol{t}-\boldsymbol{k}\notin I_{Ne}^d}\left|\sin c\left(\upsilon\cdot\boldsymbol{t}-\boldsymbol{k}\right)\right|^q\right)^{1/q},\tag{4}$$

$$I_2=\left(\sum_{v\cdot\boldsymbol{t}-\boldsymbol{k}\in I_{Ne}^d}\left|f\left(\frac{\boldsymbol{k}}{\upsilon}\right)-\lambda_k f\left(\cdot+\boldsymbol{k}/v\right)\right|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{v\cdot\boldsymbol{t}-\boldsymbol{k}\in I_{Ne}^d}\left|\sin c\left(\upsilon\cdot\boldsymbol{t}-\boldsymbol{k}\right)\right|^q\right)^{1/q}.\tag{5}$$

且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, p\ge 1$。

令

$$h(\boldsymbol{t})=\left(\sum_{v\cdot\boldsymbol{t}-\boldsymbol{k}\notin I_{Ne}^d}\left|\sin c\left(\upsilon\cdot\boldsymbol{t}-\boldsymbol{k}\right)\right|^q\right)^{1/q},$$

其中 $h(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{m}/\upsilon)=h(\boldsymbol{t})$，$\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d$ 和 $\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^d$。因此我们需要求 $\boldsymbol{t}\in[0,1/\upsilon]^d$ 的 $h(\boldsymbol{t})$。根据

$$\left\{\boldsymbol{k}:\boldsymbol{k}\notin I_{Ne}^d\right\}\subset\bigcup_{j=1}^d\left\{\boldsymbol{k}:k_j\notin[-N,N]\right\}$$

得

$$\sum_{v\cdot\boldsymbol{t}-\boldsymbol{k}\notin I_{Ne}^d}\left|\sin c(\upsilon\cdot t-k)\right|^q\le\sum_{j=1}^d\sum_{k_j\notin(-N,N]}\left|\sin c\left(\upsilon t_i-k_j\right)\right|^q\prod_{i\in Z_d\setminus j}\sum_{k_i\in\mathbb{Z}}\left|\sin c\left(\upsilon t_i-k_i\right)\right|^q.\tag{6}$$

记

$$l(t)=\left(\sum_{k\notin(-N,N]}\left|\sin c(\upsilon t-k)\right|^q\right)^{1/q}.$$

对任意 $t\in[0,1/\upsilon]$，

$$l(t)\le\left(C\sum_{k\notin(-N,N]}\frac{1}{|k|^q}\right)^{1/q}\le\left(C\cdot\int_N^\infty t^{-q}\mathrm{d}t\right)^{1/q}\le C\cdot N^{-1/P}.$$

由(2)(3)(6)式，我们有

$$I_1\le C\cdot\left(\frac{\upsilon^d}{N}\right)^{1/p}\|f\|_{L_p}.\tag{7}$$

对指数 $\ln(2N+1)$ 和引理 2.2 利用 Hölder 不等式，我们有

$$\sum_{v\cdot\boldsymbol{t}-\boldsymbol{k}\in I_{Ne}^d}\left|\sin c\left(\upsilon\cdot\boldsymbol{t}-\boldsymbol{k}\right)\right|\le C\cdot\ln^d N.$$

然后我们有

$$I_2\le C\cdot(2N+1)^{d/p}\,\Omega\cdot\ln^d N.\tag{8}$$

结合(7)式和(8)式得

$$\left(E_{\upsilon e,Ne}^{\lambda}f\right)(\boldsymbol{t})\le C\left(\left(\upsilon^{d}/N\right)^{1/P}\|f\|_{L_p}+N^{d/p}\Omega\cdot\ln^{d}N\right). \tag{9}$$

令 $c=\max\left\{\|f\|_p,1\right\}$， $N=\left[\upsilon^{rp}\right]$，则

$$\left(E_{\upsilon e,Ne}^{\lambda}f\right)(t)\le C\upsilon^{-r+d/p}\ln^{d}\upsilon.$$

因此定理 2.1 的证明完成了。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(项目编号：15233593)。

参考文献

[1] Nikolskii, S.M. (1975) Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, New York.

[2] Shannon, C.E. (1948) A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Technical Journal*, **27**, 397-423, 623-656.

[3] Wang, J.J. and Fang, G.S. (1996) Multidimensional Sampling Theorem and Estimate of Aliasing Error. *ACTA Mathematicae Applicatae Sinica*, **19**, 481-488. (In Chinese)

[4] Li, X.M. (1998) Uniform Bounds for Sampling Expansions. *Journal of Approximation Theory*, **93**, 100-113. https://doi.org/10.1006/jath.1996.3090

[5] Long, J.F. and Fang, G.S. (2003) On Uniform Truncation Error Bounds and Aliasing Error for Multidimensional Sampling Expansion. *Sampling Theory in Signal and Image Processing*, **2**, 103-115.

[6] Helms, H.D. and Thomas, J.B. (1962) Truncation Error of Sampling-Theorem Expansions. *Proceedings of the IRE*, **50**, 179-184. https://doi.org/10.1109/JRPROC.1962.287980

[7] Jagerman, D. (1966) Bounds for Truncation Error of the Sampling Expansion. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **14**, 714-723. https://doi.org/10.1137/0114060

[8] Micchelli, C.A., Xu, Y.S. and Zhang, H.Z. (2009) Optimal Learning of Bandlimited Functions from Localized Sampling. *Journal of Complexity*, **25**, 85-114. https://doi.org/10.1016/j.jco.2009.02.005

[9] Boas Jr., R.P. (1954) Entire Functions. Academic Press, New York.