Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2018, 7(5), 519-524
Published Online May 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.75063

Hans汉斯

Kolmogorov n-Width of Infinite Dimension Identity Operator

Tongxin Wang, Wenjing Lu, Yongjie Han, Liu Liang

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan
Email: lwjzbl@163.com, hanyj@mail.xhu.edu.cn

Received: Apr. 26th, 2018; accepted: May 15th, 2018; published: May 22nd, 2018

Abstract

In this paper, we study the Kolmogorov n-width of infinite dimension identity operator $I_{p,q}: l_{p,r} \to l_q \left(1 \le q \le p < \infty, r > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$, and obtain its asymptotic degree.

Keywords

Infinite Dimension Identity Operator, Kolmogorov n-Width, Sequence Space, Asymptotic Degree

无穷维恒等算子的Kolmogorov n-宽度

王桐心，陆文静，韩永杰，梁　柳

西华大学理学院，四川 成都
Email: lwjzbl@163.com, hanyj@mail.xhu.edu.cn

收稿日期：2018年4月26日；录用日期：2018年5月15日；发布日期：2018年5月22日

摘　要

本文讨论了无穷维恒等算子 $I_{p,q}: l_{p,r} \to l_q \left(1 \le q \le p < \infty, r > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$ 的Kolmogorov n-宽度，并计算了其精确渐近阶。

关键词

无穷维恒等算子，Kolmogorov n-宽度，序列空间，渐近阶

文章引用: 王桐心，陆文静，韩永杰，梁柳. 无穷维恒等算子的 Kolmogorov n-宽度[J]. 应用数学进展，2018，7(5): 519-524. DOI: 10.12677/aam.2018.75063

1. 引言及主要结果

宽度理论是函数逼近论的重要内容之一，也是国内外研究的热点之一，它与计算复杂性有着密切的联系[1]。宽度问题是 A. N. Kolmogorov [2]在 1936 年首次提出的一个概念，并给出了 Sobolev 函数类 B_2^r 到 L_2 上的 Kolmogorov n-宽度的精确渐近阶。1954 年，S. R. Stechkin [3]研究了在 $p=1,q=2$ 特殊情况下有限维空间的 Kolmogorov n-宽度的精确渐近阶与线性 n-宽度的精确渐近阶。1960 年，V. M. Tikhomirov [4]给出了宽度 $d_n\left(B_\infty^r\right)_\infty$ 的精确渐近阶。此后两年，A. Pietsch [5]和 M. I. Stein [6]研究了在一般情形下，$p \ge q$ 时 Kolmogorov n-宽度的精确渐近阶与线性 n-宽度的精确渐近阶。1974 年，Ismagilov [7]研究了当 $q>p$ 时的精确渐近阶估计。1985 年，Pinkus [8]给出了有限维恒等算子的 Kolmogorov n-宽度。本文主要讨论无穷维恒等算子的 Kolmogorov n-宽度。首先，介绍 Kolmogorov n-宽度的定义。

定义 1.1. 设 W 为赋范线性空间 $(Z,\|\cdot\|)$ 的一非空子集，$n=0,1,2,\cdots$，称

$$d_n(W,Z)=\inf_{F_n}\sup_{x\in W}\inf_{y\in F_n}\|x-y\|$$

为 W 在 Z 中的 Kolmogorov n-宽度，其中 F_n 取遍 Z 中的维数不超过 n 的所有线性子空间。

定义 1.2. 设 X,Y 为两个赋范线性空间，其范数分别为 $\|\bullet\|_X$ 与 $\|\bullet\|_Y$，T 是 X 到 Y 的有界线性算子，$n=0,1,2,\cdots$，称

$$d_n(T:X\to Y)=d_n\left(T\left(B_z\right),\bar{Y}\right)$$

为算子 T 的 Kolmogorov n-宽度，其中 B_X 表示 X 的单位球，即 $B_X:=\left\{x\in X \mid \|x\|_X\le 1\right\}$.

关于 Kolmogorov n-宽度的一些重要性质可参见 Pinkus [8]的专著《n-width in Approximation Theory》。特别地，Pinkus 在这本专著讨论了有限维恒等算子的 Kolmogorov n-宽度，并得到了精彩的结果。本文将继续这一工作，讨论无限维恒等算子的 Kolmogorov n-宽度。为此，继续介绍有关概念。

设 $1\le p\le\infty$，对任一实序列 $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，令

$$\|x\|_{l_p}=\begin{cases}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}, & 1\le p<\infty\\ \sup\limits_{n\ge 1}|x_n|, & p=\infty\end{cases}$$

l_p 表示满足条件 $\|x\|_{l_p}<\infty$ 的实序列 x 所构成的集合。众所周知，$\|\bullet\|_{l_p}$ 为 l_p 上的一个范数。而且 l_p 是一个 Banach 空间。易见，l_p 空间具有如下性质：

1) $l_p\subset l_q\ (1\le p\le q\le\infty)$
2) $l_p\not\subset l_q\ (1\le q<p\le\infty)$

因此无穷维恒等算子 I 是从 l_p 到 $l_q\ (1\le p\le q\le\infty)$ 的有界线性算子，而不是 l_p 到 $l_q\ (1\le q<p\le\infty)$ 的算子。

对于 $1\le p\le\infty, r>0, x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in l_p$，令

$$x^r:=\left\{n^r x_n\right\}_{n=1}^{\infty},\quad \|x\|_{l_{p,r}}=\left\|x^{(r)}\right\|_{l_p}$$

和

$$l_{p,r} := \left\{ x \in l_p \mid \|x\|_{l_{p,r}} < \infty \right\}$$

则易见 $\|\bullet\|_{l_{p,r}}$ 为 $l_{p,r}$ 上的范数，且 $l_{p,r}$ 为 Banach 空间。用 $B_{p,r}$ 表示 $l_{p,r}$ 中的单位球。

令 $1 \le q < p \le \infty$， $r > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$，（$p = \infty$ 时，记 $\frac{1}{p} = 0$）。对任意的 $x = \{x_n\} \in l_{p,r}$， 由 Hölder 不等式有

$$\|x\|_{l_q} \le \begin{cases} \|x\|_{l_{p,r}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{pr}{p-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} < \infty, & 1 \le q < p < \infty \\ \|x\|_{l_{p,r}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-rq} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty, & p = \infty \end{cases}$$

因此 $x \in l_q$。从而无穷维恒等算子 $\left(1 \le q < p \le \infty, r > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$

$$I_{p,q} : l_{p,r} \to l_q$$
$$x \mapsto x$$

为 $l_{p,r}$ 到 l_q 的有界线性算子。

本文利用离散化的方法讨论了无穷维恒等算子 $I_{p,q}\left(1 \le q < p \le \infty\right)$ 的 Kolmogorov n-宽度，并得到其精确渐近阶。这就是本文的主要结果，即

定理 1. 设 $1 \le q < p < \infty$， $r > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$， $n = 0,1,2,\cdots$ 则

$$d_n\left(I_{p,q} : l_{p,r} \to l_q\right) \asymp n^{-\left(r - \frac{1}{q} + \frac{1}{p}\right)}$$

其中，符号“ $\asymp$ ”的定义如下：假设 $c_i, i = 0,1,\cdots$ 是和参数 p,q,r 有关的非负常数。对两个正函数 $a(y)$ 和 $b(y)$， $y \in D$，如果存在正常数 c_1 满足条件 $a(y) \le c_1 b(y)$，则记 $a(y) \ll b(y)$。若存在正常数 c_2 满足条件 $c_2 a(y) \ge b(y)$，则记 $a(y) \gg b(y)$，若 $a(y) \ll b(y)$ 且 $a(y) \gg b(y)$，则记 $a(y) \asymp b(y)$。

2. 主要结果的证明

为了证明定理 1，首先讨论有限维空间的 Kolmogorov n-宽度。令

$$\mathbb{R}^m = \left\{ x = (x_1, \cdots, x_m) \mid x_i \in R, i = 1, \cdots, m \right\}$$

设 $1 \le p \le \infty$， $x = (x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m$。令

$$\|x\|_{l_p^m} = \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^{m} |x_n|^p \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \max_{1 \le n \le m} |x_n|, & p = \infty \end{cases}$$

则 $\|\bullet\|_{l_p^m}$ 为 $\mathbb{R}^m$ 上的范数。用 l_p^m 表示 $\mathbb{R}^m$ 按照范数 $\|\bullet\|_{l_p^m}$ 所构成的 Banach 空间。用 B_p^m 表示 l_p^m 中的单位球。易见 $\{e_n'\}_{n=1}^{m}$ 为 l_p^m 的基，其中 $e_n' = (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0) \in \mathbb{R}^m$ （第 n 个分量为 1，其余分量为 0)。

引理 1. [8]设 $1 \le q < p \le \infty$， $n = 0,1,2,\cdots$， 则

$$d_n\left(B_p^m, l_q^m\right) = \begin{cases} (m-n)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, & 0 \le n \le m \\ 0, & n > m \end{cases}$$

下面建立估计定理 1 上界的离散化定理。首先介绍一些记号。

对 $\forall k\in\mathbb{N}$，其中 $\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\}$，记 $S_k=\left\{n\in N\,|\,2^{k-1}\le n<2^k\right\}$。则对任意的 $k,k'\in\mathbb{N}$，且 $k\ne k'$ 有 $S_k\cap S_{k'}=\varnothing$，$\mathbb{N}=\bigcup_{k=1}^{\infty}S_k$。用 m_k 表示 S_k 中元素的个数，则 $m_k=|S_k|=2^{k-1}$。

以下我们总是假设 $1\le p<\infty$。用 e_n 表示第 n 个分量为 1，其余分量为 0 的无穷维实序列，则 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $l_p(1\le p<\infty)$ 的 Schauder 基。从而对 $\forall x=\{x_n\}\in l_p$，有 $x=\sum_{n=1}^{\infty}x_ne_n$。

对 $k\in\mathbb{N}$，记 $F_k=span\{e_n\,|\,n\in S_k\}$，则 $\dim F_k=m_k=2^{k-1}$。令

$$I_k:F_k\to R^{m_k}$$

$$x=\sum_{n\in S_k}x_ne_n\mapsto\sum_{j=1}^{m}x_{2^{k-1}+j-1}e'_{2^{k-1}+j-1}$$

则对 $\forall x=\sum_{n\in S_k}x_ne_n\in F_k$，有

$$\begin{aligned}\|x\|_{l_{p,r}}&=\left(\sum_{n\in S_k}\left|n^rx_n\right|^p\right)^{1/p}\asymp\left(\sum_{n\in S_k}\left|2^{rk}x_n\right|^p\right)^{1/p}\\&=2^{rk}\left(\sum_{n\in S_k}|x_n|^p\right)^{1/p}=2^{rk}\|I_kx\|_{l_p^{m_k}}\end{aligned}\tag{2.1}$$

且

$$\|x\|_{l_p}=\left(\sum_{n\in S_k}|x_n|^p\right)^{1/p}=\|I_kx\|_{l_p^{m_k}}.\tag{2.2}$$

从而 I_k 为 $l_p\cap F_k$ 到 $l_p^{m_k}$ 上的等距同构映射。

引理 2. 设 $1\le q<p<\infty$，$r>\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$，非负整数序列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足 $0\le n_k\le m_k$，且 $\sum_{k=1}^{\infty}n_k\le n$。则

$$d_n\left(B_{p,r},l_q\right)\ll\sum_{n=1}^{\infty}2^{-rk}d_{n_k}\left(B_p^{m_k},l_q^{m_k}\right).$$

证明：对 $\forall k$，由(2.1)知，对 $\forall x\in B_{l_{p,r}}\cap F_k$，有

$$1\ge\|x\|_{l_{p,r}}\gg2^{rk}\|I_kx\|_{l_p^{m_k}}$$

$\forall y\in F_k$，由(2.2)知

$$\|y\|_{l_q}=\|I_ky\|_{l_q^{m_k}}$$

所以

$$d_{n_k}\left(B_{p,r}\cap F_k,l_q\cap F_k\right)\ll2^{-rk}d_{n_k}\left(B_p^{m_k},l_q^{m_k}\right)$$

由 Kolmogorov n-宽度的定义知，存在 $l_q\cap F_k$ 的一个维数不超过 n_k 的线性子空间 M_k 使得

$$\sup_{x\in B_{p,r}\cap F_k}\inf_{y\in M_k}\|x-y\|_{l_q}\ll2^{-rk}d_{n_k}\left(B_p^{m_k},l_q^{m_k}\right)$$

令 $M=\sum_{k=1}^{\infty}M_k$ （直和）。则 M 为 l_q 的线性子空间，且

$$\dim M \le \sum_{k=1}^{\infty} \dim M_k \le \sum_{k=1}^{\infty} n_k \le n.$$

从而

$$\begin{aligned} d_n\left(B_{p,r}, l_q\right) &\ll \sup_{x\in B_{p,r}} \inf_{y\in M} \|x-y\|_{l_q} \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{x\in B_{p,r}\cap F_k} \inf_{y\in M_k} \|x-y\|_{l_q} \\ &\ll \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-rk} d_{n_k}\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right) \end{aligned}$$

下面引理 3 是估计定理 1 下界的离散化定理。

引理 3. 令$1\le q<p<\infty$，$r>\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$，$n=0,1,2,\cdots$，则

$$d_n\left(B_{p,r}, l_q\right) \gg 2^{-rk} d_n\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right)$$

其中$n \succ\prec 2^k \gg 2n$。

证明：对$\forall x\in B_p^{m_k}$，则由(2.1)有

$$1 \ge \|x\|_{l_p^{m_k}} \ge 2^{rk} \left\|I_k^{-1} x\right\|_{l_{p,r}}$$

对$\forall y\in l_q^{m_k}$，则由(2.2)有

$$\|y\|_{l_q^{m_k}} = \left\|I_k^{-1} y\right\|_{l_q}$$

所以

$$d_n\left(B_{p,r}, l_q\right) \ge d_n\left(B_{p,r}\cap F_k, l_q\cap F_k\right) \gg 2^{-rk} d_n\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right)$$

定理 1 的证明：

由定义 1.1 及定义 1.2 和无穷维恒等算子$I_{p,r}$的定义，易见$d_n\left(I_{p,q}: l_{p,r} \to l_p\right) = d_n\left(B_{p,r}, l_q\right)$。

首先估计定理 1 的上界。

对$\forall k\in\mathbb{N}$，令$k' = [\lg n]$，

$$n_k = \begin{cases} m_k, & 1\le k<k' \\ 2^{k'}\cdot 2^{\beta(k'-k)}, & k\ge k' \end{cases}$$

其中，$0<\beta<1$，易见$\{n_k\}$满足引理 2 的条件。

由引理 2 和引理 1 有

$$\begin{aligned} & d_n\left(I_{p,q}: l_{p,r} \to l_q\right) \\ & \ll \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-rk} d_{n_k}\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right) = \sum_{k=k'}^{\infty} 2^{-rk} d_{n_k}\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right) \\ & \ll \sum_{k=k'}^{\infty} 2^{-rk}\cdot 2^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)k} = \sum_{k=k'}^{\infty} 2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k} \ll 2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k'} \ll n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)} \end{aligned}$$

估计定理 1 的下界。

取满足引理 3 中条件的k，则由引理 3 和引理 1 有

$$d_n\left(I_{p,q}:l_{p,r}\to l_q\right)\gg 2^{-rk}d_n\left(B_p^{m_k},l_q^{m_k}\right)\gg 2^{-rk}\cdot n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\gg n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}$$

综上，定理 1 得证。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(项目编号：15233593)。

参考文献

[1] Traub, J.F. Wasilkowski, G.W. and Wozniakowski, H. (1988) Information-Based Complexity. Academic Press, Boston, 1988.

[2] Kolmogorov, A.N. (1936) Uber die deste Annaherung yon funktionen einer gegebenen funktioneklasse. *Annals of Mathematics*, **37**, 107-111. https://doi.org/10.2307/1968691

[3] Stechkin, S.R. (1954) On Best Approximation of Given Classes of Functions by Arbitrary Polynomials. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, **9**, 133-134. (In Russian)

[4] Tikhomirov, V.M. (1960) Diameters of Sets in Function Spaces and the Theory of Best Approximations. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, **15**, 81-120.

[5] Pietsch, A. (1974) s-Numbers of Operators in Banach Spaces. *Studia Mathematica*, **51**, 201-223. https://doi.org/10.4064/sm-51-3-201-223

[6] Stesin, M.I. (1975) Aleksandrov Widths of Finite—Dimensional Sets and Classes of Smooth Functions. *Doklady Akademii Nauk*, **220**, 1278-1281.

[7] Ismagilov, R.S. (1974) Widths of Sets in Normed Linear Spaces and Approximation of Functions by Trigonometric Polynomials. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, **29**, 161-178.

[8] Pinkus, A. (1985) n-Widths in Approximation Theory. Springer, Berlin.