Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2018, 7(5), 510-518
Published Online May 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.75062

Hans汉斯

Finite Spectrum of a Class of Fourth Order Boundary Value Problems on Time Scales

Juan Wang, Jijun Ao*

College of Sciences, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot Inner Mongolia
Email: 454359597@qq.com, *george_ao78@sohu.com

Received: Apr. 26th, 2018; accepted: May 12th, 2018; published: May 21st, 2018

Abstract

The spectral analysis of a class of fourth order boundary value problems with self-adjoint boundary conditions on time scales is investigated. By partitioning the bounded time scale and making the coefficients of the fourth order Sturm-Liouville equation satisfy certain conditions on the adjacent subintervals, the finite eigenvalue results are obtained.

Keywords

Fourth Order Boundary Value Problems, Time Scales, Finite Spectrum

一类时标上四阶边值问题的有限谱

王　娟，敖继军*

内蒙古工业大学理学院，内蒙古　呼和浩特
Email: 454359597@qq.com, *george_ao78@sohu.com

收稿日期：2018年4月26日；录用日期：2018年5月12日；发布日期：2018年5月21日

摘　要

本文讨论了一类时标上四阶边值问题在自共轭边界条件下的谱问题。通过分割时标，并且使得四阶Sturm-Liouville方程的系数函数在相邻子区间上满足特定的条件，从而得出具有有限谱的结论。

关键词

四阶边值问题，时标，有限谱

*通讯作者。

文章引用: 王娟, 敖继军. 一类时标上四阶边值问题的有限谱[J]. 应用数学进展, 2018, 7(5): 510-518.
DOI: 10.12677/aam.2018.75062

1. 引言

经典的 Sturm-Liouville (S-L)理论中通常谱都是无穷的，即有无穷多个谱点。1964 年，Atkinson 提出了二阶的 S-L 问题在某些条件下可能存在有限谱[1]。2001 年 Kong，Wu 和 Zettl 通过构造的方法证实了 Atkinson 论断的合理性[2]，由此展开了有限谱问题(也称为 Atkinson 类型)的研究。近十几年来，Volkmer，Zettl，Kong，敖继军，孙炯等学者在 S-L 问题的有限谱理论方面做了许多开拓性的研究，并在该领域内得到了很多创新性的研究成果[3] [4] [5] [6]。2009 年，Kong 等人在文献[3]中研究了一类与 S-L 方程在实分离型和实耦合型自共轭边界条件下的有限谱问题等价的矩阵特征值问题，给出了矩阵表示的结论；2011 年，敖继军等在文献[4]中研究了二阶带有转移条件的 S-L 问题的有限谱，得出 S-L 问题的有限特征值在自伴边界条件下分布在实轴上，在非自伴边界条件情形下分布在复平面上的结论，之后又在文献[5]中给出四阶边值问题带有一般的自共轭边界条件的有限谱结论；2012 年，Kong 在文献[6]中研究了一类用两组谱来重构具有有限谱的 S-L 问题的逆问题等等。

时标也称为时间标度或测度链，这一概念由德国数学家 Stefan Hilger 于 1988 年在他的博士论文中首次提出。时标理论可以将离散系统和连续系统结合起来，以便更好的研究两类不同系统之间的本质差异，并且能够运用于实际问题中两者共存的情形，避免研究的重复性。时标上边值问题的研究是近年来一个新的研究热点。一些学者将时标理论运用到算子谱理论的研究和完善中，并且得到了一些相应的结论[7] [8] [9] [10]。研究内容包括时标上 S-L 问题在带有不同边界条件情形下特征值的存在性[7] [8]，时标上高阶自共轭微分方程带有自共轭边界条件的形式，相应格林函数的对称性与其在取定时标上的特殊形式[9]，以及二阶耗散 S-L 问题的完备性[10]等。

对于时标上边值问题的有限谱，2013 年，赵娜在文献[11]中考虑了时标上的 S-L 方程 $-\left(px^{\Delta}\right)^{\Delta}+qx^{\sigma}=\lambda wx^{\sigma}, t\in\mathbb{T}$，在系数函数满足条件 $1/p, q, w\in C_{prd}\left(\mathbb{T}\right)$ 的情形下，仿照文献[4]的研究方法，分别讨论了分离型和耦合型 S-L 问题的有限特征值问题，给出了特征值不等式，并且将结论推广到较一般的时标上。

本文考虑一类时标 $\mathbb{T}$ 上的四阶 S-L 方程：

$$\left(px^{\Delta\nabla}\right)^{\nabla\Delta}+qx=\lambda wx, t\in\mathbb{T}, \tag{1.1}$$

其中系数函数满足条件

$$r=1/p, q, w\in C_{prd}\left(\mathbb{T}\right), \tag{1.2}$$

具有自共轭边界条件形如：

$$AX\left(a\right)+BX\left(b\right)=0,\ X=\begin{bmatrix} x \\ x^{\Delta} \\ px^{\Delta\nabla} \\ -\left(px^{\Delta\nabla}\right)^{\nabla} \end{bmatrix},\ A,B\in M_4\left(\mathbb{C}\right), \tag{1.3}$$

其中 $M_4\left(\mathbb{C}\right)$ 表示四阶复矩阵组成的集合。

众所周知，四阶边值问题自共轭边界条件(1.3)中，矩阵 A,B 满足 $rank(A:B)=4, AE_4A^*=BE_4B^*$，其中 E_4 为四阶单位辛矩阵，$E_4=\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$。

本文在文献[11]的基础上，考虑时标上四阶边值问题的有限谱。采用文献[5]的方法，分割时标 $\mathbb{T}$，使得系数函数在相邻小区间上满足特定的条件，从而构造出一类时标上具有有限谱的四阶边值问题，并且在一般的自共轭边界条件下得出有限谱的结论。

2. 预备知识

为了得出主要结论，在本节中我们给出一些时标上的相关概念，以及证明主要结论所需的部分引理。

定义 2.1. [11]设 $\mathbb{T}$ 是一个时标。$\forall t\in\mathbb{T}$，定义前跳算子 σ 为：$\sigma(t):=inf\{s\in\mathbb{T}:s>t\}$；后跳算子 ρ 为：$\rho(t):=sup\{s\in\mathbb{T}:s<t\}$，其中 $inf\varnothing:=sup\mathbb{T}, sup\varnothing:=inf\mathbb{T}$。

定义 2.2. [11] $\forall t\in\mathbb{T}$ 若 $t<sup\mathbb{T}$，且 $\sigma(t)=t$，则称 $t\in\mathbb{T}$ 为右稠密(rd)的；若 $t>inf\mathbb{T}$，且 $\rho(t)=t$，则称 $t\in\mathbb{T}$ 为左稠密(ld)的；若 $t<\rho(t)$，则称 $t\in\mathbb{T}$ 为右分散(rs)的；若 $t>\rho(t)$，则称 $t\in\mathbb{T}$ 为左分散(ls)的。步长函数 $\mu:\mathbb{T}\to[0,\infty),\mu(t):=\sigma(t)-t$。

函数 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ 为 rd 连续的，是指它在左稠密的点处极限存在，右稠密的点处连续，rd 连续的函数记为 $C_{rd}(\mathbb{T})$；函数 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ 为 prd 连续的，是指它在左稠密的点处极限存在，在除有限个右稠密的点处均为连续的，prd 连续的函数记为 $C_{prd}(\mathbb{T})$。

定义 2.3. [9]记 $\mathbb{T}^\kappa=\mathbb{T}\setminus\{b\}$，$b$ 为 $\mathbb{T}$ 的最大值且为左分散的，否则 $\mathbb{T}^\kappa=\mathbb{T}$。假设 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ 是一个函数，令 $t\in\mathbb{T}^\kappa$。定义 $f^\Delta(t)$ (假设其存在):任意 $\varepsilon>0$，存在一个 t 的邻域 $U\subset\mathbb{T}$，使得对所有 $s\in U$ 有：

$$\left|f(\sigma(t))-f(s)-f^\Delta(t)[\sigma(t)-s]\right|\le\varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|,$$

则称函数 $f^\Delta(t)$ 是函数 f 在 t 点的 Δ 导数。

定义 2.4. [9]令 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ 是一个函数，$a,b\in\mathbb{T}$。如果存在一个函数 $F:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$，使得对所有 $t\in\mathbb{T}^\kappa$ 有 $F^\Delta(t)=f(t)$，则 F 是 f 的 Δ 积分，并且由以下公式给出：

$$\int_a^b f(\tau)\Delta\tau=F(b)-F(a), a,b\in\mathbb{T}.$$

同样可定义函数 f 的 ∇ 导数和 ∇ 积分，由于本文研究过程中未用到，故此处不再罗列。

引理 2.1. 方程(1.1)等价于以下形式：

$$X^\Delta=A(t)X, \tag{2.1}$$

其中 $X=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}$，$A(t)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\ \dfrac{\mu^2(t)}{p^\sigma(t)}(\lambda w(t)-q(t))&0&\dfrac{1}{p^\sigma(t)}&-\dfrac{\mu(t)}{p^\sigma(t)}\\ \mu(t)(\lambda w(t)-q(t))&0&0&-1\\ -(\lambda w(t)-q(t))&0&0&0\end{bmatrix}$。这里 $u_1(t)=x(t)$，$u_2(t)=x^\Delta(t)$，$u_3(t)=p(t)x^{\Delta\nabla}(t)$，$u_4(t)=-\left(p(t)x^{\Delta\nabla}(t)\right)^\nabla$。

证明： 该引理的证明由文献[9]第 7 节和直接计算可得。

引理 2.2. [11] $\forall t_0\in[a,b]_\mathbb{T}$，$n\times n$ 函数矩阵 $A\in C_{prd}$，且 $\forall t\in[a,t_0]_\mathbb{T}$，$I+\mu(t)A(t)$ 为可逆阵，则初

始值问题

$$X^{\Delta}=A(t)X,\ X(t_0)=x_0,\ x_0\in\mathbb{C}^n,$$

存在惟一解 $X\in C_{prd}^{1}$。

证明：该引理的证明参见文献[12]中 2.2 部分。

设 $\Phi(t,\lambda)=\left[\phi_{ij}(t,\lambda)\right]$，$t\in[a,b]_{\mathbb{T}}$ 为方程(2.1)满足初始条件 $\Phi(a,\lambda)=I$ 的基解矩阵，

$$\Phi(t,\lambda)=\begin{bmatrix}\varphi_1(t,\lambda) & \varphi_2(t,\lambda) & \varphi_3(t,\lambda) & \varphi_4(t,\lambda)\\ (\varphi_1^{\Delta})(t,\lambda) & (\varphi_2^{\Delta})(t,\lambda) & (\varphi_3^{\Delta})(t,\lambda) & (\varphi_4^{\Delta})(t,\lambda)\\ (p\varphi_1^{\Delta\nabla})(t,\lambda) & (p\varphi_2^{\Delta\nabla})(t,\lambda) & (p\varphi_3^{\Delta\nabla})(t,\lambda) & (p\varphi_4^{\Delta\nabla})(t,\lambda)\\ -(p\varphi_1^{\Delta\nabla})^{\nabla}(t,\lambda) & -(p\varphi_2^{\Delta\nabla})^{\nabla}(t,\lambda) & -(p\varphi_3^{\Delta\nabla})^{\nabla}(t,\lambda) & -(p\varphi_4^{\Delta\nabla})^{\nabla}(t,\lambda)\end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

引理 2.3. [5]设(1.2)成立，且 $\Phi(t,\lambda)=\left[\phi_{ij}(t,\lambda)\right]$，$t\in[a,b]_{\mathbb{T}}$ 是方程(2.1)满足初始条件 $\Phi(a,\lambda)=I$ 的基解矩阵，则 $\lambda\in\mathbb{C}$ 是 S-L 问题(1.1)，(1.3)的特征值，当且仅当判断函数 $\delta(\lambda)=0$，且判断函数可以写为

$$\begin{aligned}\delta(\lambda)&=\det\left[A+B\Phi(b,\lambda)\right]\\&=\det A+\det B+\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}\phi_{ij}+\sum_{1\le i,j,k,l\le 4,j\ne l}d_{ijkl}\phi_{ij}\phi_{kl}+\sum_{1\le i,j,k,l,m,n\le 4,j\ne l\ne n}e_{ijklmn}\phi_{ij}\phi_{kl}\phi_{mn},\end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 $c_{ij},1\le i,j\le 4,d_{ijkl},1\le i,j,k,l\le 4,j\ne l,e_{ijklmn},1\le i,j,k,l,m,n\le 4,j\ne l\ne n$ 都是由矩阵 A 和 B 确定的常数。

证明：该引理通过直接计算可得。

定义 2.1. 四阶边值问题(1.1)，(1.3)称为是退化的，如果在(2.3)中，对一切的 $\lambda\in\mathbb{C}$，都有 $\delta(\lambda)\equiv 0$，或者对每一个 $\lambda\in\mathbb{C}$，有 $\delta(\lambda)\ne 0$。

3. 时标上四阶边值问题的有限谱

假设方程(1.1)定义在时标 $\mathbb{T}=[a,b]\cup\{c\}\cup[d,e]$ 上，$-\infty<a<b<c<d<e<+\infty$。对给定的正整数 m 和 n，将时标 $\mathbb{T}$ 做如下分割：

$$\begin{aligned}a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_{2m}<a_{2m+1}=b,\\ d=b_0<b_1<b_2<\cdots<b_{2n}<b_{2n+1}=e,\end{aligned} \tag{3.1}$$

使得系数函数满足以下条件：

$$\begin{aligned}&\text{在}(a_{2k},a_{2k+1})\text{上，}r(t)=\frac{1}{p(t)}=0,\ \int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}}w(t)\mathrm{d}t\ne 0,\\&\int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}}w(t)t\mathrm{d}t\ne 0,\ \int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}}w(t)t^2\mathrm{d}t\ne 0,\ k=0,1,\cdots,m,\\&\text{在}(a_{2k+1},a_{2k+2})\text{上，}q(t)=w(t)=0,\ \int_{a_{2k+1}}^{a_{2k+2}}r(t)\mathrm{d}t\ne 0,\\&\int_{a_{2k+1}}^{a_{2k+2}}r(t)t\mathrm{d}t\ne 0,\ \int_{a_{2k+1}}^{a_{2k+2}}r(t)t^2\mathrm{d}t\ne 0,\ k=0,1,\cdots,m-1,\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}&\text{在}(b_{2i},b_{2i+1})\text{上，}r(t)=\frac{1}{p(t)}=0,\ \int_{b_{2i}}^{b_{2i+1}}w(t)\mathrm{d}t\ne 0,\\&\int_{b_{2i}}^{b_{2i+1}}w(t)t\mathrm{d}t\ne 0,\ \int_{b_{2i}}^{b_{2i+1}}w(t)t^2\mathrm{d}t\ne 0,\ k=0,1,\cdots,n,\\&\text{在}(b_{2i+1},b_{2i+2})\text{上，}q(t)=w(t)=0,\ \int_{b_{2i+1}}^{b_{2i+2}}r(t)\mathrm{d}t\ne 0,\\&\int_{b_{2i+1}}^{b_{2i+2}}r(t)t\mathrm{d}t\ne 0,\ \int_{b_{2i+1}}^{b_{2i+2}}r(t)t^2\mathrm{d}t\ne 0,\ k=0,1,\cdots,n-1,\end{aligned} \tag{3.3}$$

由(3.1)~(3.3)，令

$$
\begin{aligned}
& r_k=\int_{a_{2k+1}}^{a_{2k+2}} r^\sigma(t)\mathrm{d}t,\ \hat{r}_k=\int_{a_{2k+1}}^{a_{2k+2}} r^\sigma(t)t\mathrm{d}t,\ \check{r}_k=\int_{a_{2k+1}}^{a_{2k+2}} r^\sigma(t)t^2\mathrm{d}t\neq 0,\ k=0,1,\cdots,m-1,\\
& q_k=\int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} q(t)\mathrm{d}t,\ \hat{q}_k=\int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} q(t)t\mathrm{d}t,\ \check{q}_k=\int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} q(t)t^2\mathrm{d}t,\\
& w_k=\int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} w(t)\mathrm{d}t,\ \hat{w}_k=\int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} w(t)t\mathrm{d}t,\ \check{w}_k=\int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} w(t)t^2\mathrm{d}t,\ k=0,1,\cdots,m,\\
& \tilde{r}_i=\int_{b_{2i+1}}^{b_{2i+2}} r^\sigma(t)\mathrm{d}t,\ \hat{\tilde{r}}_i=\int_{b_{2i+1}}^{b_{2i+2}} r^\sigma(t)t\mathrm{d}t,\ \check{\tilde{r}}_k=\int_{b_{2i+1}}^{b_{2i+2}} r^\sigma(t)t^2\mathrm{d}t\neq 0,\ i=0,1,\cdots,n-1,\\
& \tilde{q}_i=\int_{b_{2i}}^{b_{2i+1}} q(t)\mathrm{d}t,\ \hat{\tilde{q}}_i=\int_{b_{2i}}^{b_{2i+1}} q(t)t\mathrm{d}t,\ \check{\tilde{q}}_i=\int_{b_{2i}}^{b_{2i+1}} q(t)t^2\mathrm{d}t,\\
& \tilde{w}_i=\int_{b_{2i}}^{b_{2i+1}} w(t)\mathrm{d}t,\ \hat{\tilde{w}}_i=\int_{b_{2i}}^{b_{2i+1}} w(t)t\mathrm{d}t,\ \check{\tilde{w}}_i=\int_{b_{2i}}^{b_{2i+1}} w(t)t^2\mathrm{d}t,\ i=0,1,\cdots,n.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

那么我们可以得到主基解矩阵的结构并构造迭代矩阵：

引理 3.1. 令(3.1)~(3.4)成立。设 $\Phi(t,\lambda)=\left[\phi_{ij}(t,\lambda)\right]$ 是方程(2.1)满足初始条件 $\Phi(a,\lambda)=I$，$\lambda\in\mathbb{C}$ 的基解矩阵，令

$$
F_k(t,\lambda,a_k)=\begin{bmatrix}
1 & t-a_k & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0\\
\int_{a_k}^t \mu(\lambda w-q)\Delta x+\int_{a_k}^t(\lambda w-q)(t-x)\Delta x & \int_{a_k}^t \mu(\lambda w-q)(x-a_k)\Delta x+\int_{a_k}^t(\lambda w-q)(t-x)(x-a_k)\Delta x & 1 & -(t-a_k)\\
-\int_{a_k}^t(\lambda w-q)\Delta x & -\int_{a_k}^t(\lambda w-q)(x-a_k)\Delta x & 0 & 1
\end{bmatrix},
$$

$k=0,2,\cdots,2m;$

$$\tag{3.5}$$

$$
F_k(t,\lambda,a_k)=\begin{bmatrix}
1 & t-a_k & \int_{a_k}^t r^\sigma(t-x)\Delta x & -\int_{a_k}^t r^\sigma(t-x)(x-a_k)\Delta x-\int_{a_k}^t \mu r^\sigma(t-x)\Delta x\\
0 & 1 & \int_{a_k}^t r^\sigma\Delta x & -\int_{a_k}^t r^\sigma(x-a_k)\Delta x-\int_{a_k}^t \mu r^\sigma\Delta x\\
0 & 0 & 1 & -(t-a_k)\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix},
\tag{3.6}
$$

$k=1,3,\cdots,2m-1.$

那么，对于 $1\le k\le 2m+1$，有

$$\Phi(a_k,\lambda)=F_{k-1}(a_k,\lambda,a_{k-1})\Phi(a_{k-1},\lambda).\tag{3.7}$$

为了更加简洁，我们令 $T_0=F_0(a_1,\lambda,a_0), T_k=F_{2k}(a_{2k+1},\lambda,a_{2k})F_{2k-1}(a_{2k},\lambda,a_{2k-1}), k=1,2,\cdots,m$。$\Phi(a_1,\lambda)=F_0(a_1,\lambda,a_0)=T_0, \Phi(a_{2k+1},\lambda)=T_k\Phi(a_{2k-1},\lambda), k=1,2,\cdots,m$。进而得到如下递推公式 $\Phi(a_{2k+1},\lambda)=T_kT_{k-1}\cdots T_0$，$k=\ 0,1,\cdots,m$。

证明： 由于本文讨论的时标 $\mathbb{T}=[a,b]\cup\{c\}\cup[d,e]$，则在区间[$a$, b]和[d, e]上有 $\mu=0$，$r^\sigma=r$，所以时标上的积分退化为经典的勒贝格积分，主基解矩阵退化为

$$F_k(t,\lambda,a_k)=\begin{bmatrix} 1 & t-a_k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \int_{a_k}^{t}(\lambda w-q)(t-x)\mathrm{d}x & \int_{a_k}^{t}(\lambda w-q)(t-x)(x-a_k)\mathrm{d}x & 1 & -(t-a_k) \\ -\int_{a_k}^{t}(\lambda w-q)\mathrm{d}x & -\int_{a_k}^{t}(\lambda w-q)(x-a_k)\mathrm{d}x & 0 & 1 \end{bmatrix},\ k=0,2,\cdots,2m;$$

$$F_k(t,\lambda,a_k)=\begin{bmatrix} 1 & t-a_k & \int_{a_k}^{t} r(t-x)\mathrm{d}x & -\int_{a_k}^{t} r(t-x)(x-a_k)\mathrm{d}x \\ 0 & 1 & \int_{a_k}^{t} r\mathrm{d}x & -\int_{a_k}^{t} r(x-a_k)\mathrm{d}x \\ 0 & 0 & 1 & -(t-a_k) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},k=1,3,\cdots,2m-1.$$

主基解矩阵的证明与文献[5]中引理 3 类似。

引理 3.2. 令(3.1)~(3.4)成立。设 $\Psi(t,\lambda)=\left[\psi_{ij}(t,\lambda)\right]$ 是方程(2.1)满足初始条件 $\Psi(b,\lambda)=I,\lambda\in\mathbb{C}$ 的基解矩阵，令

$$\tilde{F}_i(t,\lambda,b_i)=$$
$$\begin{bmatrix} 1 & t-b_i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \int_{b_i}^{t}\mu(\lambda w-q)\Delta x+\int_{b_i}^{t}(\lambda w-q)(t-x)\Delta x & \int_{b_i}^{t}\mu(\lambda w-q)(x-b_i)\Delta x+\int_{b_i}^{t}(\lambda w-q)(t-x)(x-b_i)\Delta x & 1 & -(t-b_i) \\ -\int_{b_i}^{t}(\lambda w-q)\Delta x & -\int_{b_i}^{t}(\lambda w-q)(x-b_i)\Delta x & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$i=0,2,\cdots,2n; \tag{3.8}$$

$$\tilde{F}_i(t,\lambda,b_i)=\begin{bmatrix} 1 & t-b_i & \int_{b_i}^{t} r^{\sigma}(t-x)\Delta x & -\int_{b_i}^{t} r^{\sigma}(t-x)(x-a_k)\Delta x-\int_{b_i}^{t}\mu r^{\sigma}(t-x)\Delta x \\ 0 & 1 & \int_{b_i}^{t} r^{\sigma}\Delta x & -\int_{b_i}^{t} r^{\sigma}(x-a_k)\Delta x-\int_{b_i}^{t}\mu r^{\sigma}\Delta x \\ 0 & 0 & 1 & -(t-b_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},i=1,3,\cdots,2n-1. \tag{3.9}$$

那么，对于 $1\le i\le 2n+1$，有

$$\Psi(b_i,\lambda)=\tilde{F}_{i-1}(b_i,\lambda,b_{i-1})\Psi(b_{i-1},\lambda). \tag{3.10}$$

为了更加简洁，我们令 $\tilde{T}_0=\tilde{F}_0(b_1,\lambda,b_0),\tilde{T}_i=\tilde{F}_{2i}(b_{2i+1},\lambda,b_{2i})\tilde{F}_{2i-1}(b_{2i},\lambda,b_{2i-1}),i=1,2,\cdots,n$。则 $\Psi(b_1,\lambda)=\tilde{F}_0(b_1,\lambda,b_0)=\tilde{T}_0,\Psi(b_{2i+1},\lambda)=\tilde{T}_i\Psi(b_{2i-1},\lambda),i=1,2,\cdots,n$。进而得到如下递推公式 $\Psi(b_{2i+1},\lambda)=\tilde{T}_i\tilde{T}_{i-1}\cdots\tilde{T}_0$，$i=0,1,\cdots,n$。

证明： 该引理的证明与引理 3.1 类似。

注 3.1. 引理 3.1 和引理 3.2 中，为了便于区分，部分自变量 t 使用 x 来表示。

下面我们根据间断点之间的关系得出连接矩阵。

引理 3.3. 令(3.1)~(3.4)成立。$\Phi(t,\lambda),\Psi(t,\lambda)$ 由引理 3.1 和引理 3.2 给出，则

$$\Phi(e,\lambda)=\Psi(e,\lambda)N(\lambda)\Phi(b,\lambda), \tag{3.11}$$

其中 $N(\lambda)=N_2(\lambda)N_1(\lambda)$，且

$$N_1(\lambda)=\begin{bmatrix} 0 & c-b & 0 & 0 \\ (c-b)^3 r(c)(\lambda w(b)-q(b)) & 1 & (c-b)r(c) & -(c-b)^2 r(c) \\ (c-b)^2(\lambda w(b)-q(b)) & 0 & 1 & -(c-b) \\ -(c-b)(\lambda w(b)-q(b)) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$N_2(\lambda)=\begin{bmatrix} 0 & d-c & 0 & 0 \\ (d-c)^3 r(d)(\lambda w(c)-q(c)) & 1 & (d-c)r(d) & -(d-c)^2 r(d) \\ (d-c)^2(\lambda w(c)-q(c)) & 0 & 1 & -(d-c) \\ -(d-c)(\lambda w(c)-q(c)) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

证明： 由定义 2.3 和方程(2.1)可知

$$u_i^{\Delta}(b)=\frac{u_i(c)-u_i(b)}{c-b},\ i=1,2,3,4. \tag{3.12}$$

由(1.1)，(3.12)计算可得

$$X(c)=N_1(\lambda)X(b),$$

其中

$$N_1(\lambda)=\begin{bmatrix} 0 & c-b & 0 & 0 \\ (c-b)^3 r(c)(\lambda w(b)-q(b)) & 1 & (c-b)r(c) & -(c-b)^2 r(c) \\ (c-b)^2(\lambda w(b)-q(b)) & 0 & 1 & -(c-b) \\ -(c-b)(\lambda w(b)-q(b)) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

同理可得

$$X(d)=N_2(\lambda)X(c),$$

其中

$$N_2(\lambda)=\begin{bmatrix} 0 & d-c & 0 & 0 \\ (d-c)^3 r(d)(\lambda w(c)-q(c)) & 1 & (d-c)r(d) & -(d-c)^2 r(d) \\ (d-c)^2(\lambda w(c)-q(c)) & 0 & 1 & -(d-c) \\ -(d-c)(\lambda w(c)-q(c)) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

又因为

$$X(b)=\Phi(b,\lambda)X(a),\ X(e)=\Psi(e,\lambda)X(d),$$

则

$$X(e)=\Psi(e,\lambda)N(\lambda)\Phi(b,\lambda)X(a),\ X(e)=\Phi(e,\lambda)X(a). \tag{3.13}$$

又因为 $\det(I+\mu(b)A(b))\neq 0$，由引理 2.2 以及(3.13)可知 $\Phi(e,\lambda)=\Psi(e,\lambda)N(\lambda)\Phi(b,\lambda)$。

推论 3.1. 令 $N(\lambda)=\begin{bmatrix} n_{11}(\lambda) & d-b & n_{13} & n_{41} \\ n_{21}(\lambda) & n_{22}(\lambda) & n_{23} & n_{42} \\ n_{31}(\lambda) & n_{32}(\lambda) & 1 & -(d-b) \\ n_{41}(\lambda) & n_{42}(\lambda) & 0 & 1 \end{bmatrix}$，对基解矩阵 Φ 我们有

$$\phi_{ij}(e,\lambda)=H_{ij}\lambda^{m+n+1}+\tilde{\phi}_{ij}(\lambda),\ i,j=1,2,\ \text{或者}\ i,j=3,4;$$

$$\phi_{ij}(e,\lambda)=H_{ij}\lambda^{m+n+2}+\tilde{\phi}_{ij}(\lambda),\ i=3,4,\ \ j=1,2;$$

$$\phi_{ij}(e,\lambda)=H_{ij}\lambda^{m+n}+\tilde{\phi}_{ij}(\lambda),\ i=1,2,\ \ j=3,4,$$

其中 H_{ij} 取决于 $r_k,\hat{r}_k,\check{r}_k,k=0,1,\cdots,m-1$，$w_k,\hat{w}_k,\check{w}_k,k=0,1,\cdots,m$，$\tilde{r}_i,\hat{\tilde{r}}_i,\check{\tilde{r}}_i,i=0,1,\cdots,n-1$，$\tilde{w}_i,\hat{\tilde{w}}_i,\check{\tilde{w}}_i,i=0,1,\cdots,n$，和端点 b,c,d,e。$\tilde{\phi}_{ij}(\lambda)$ 是关于 λ 的函数，其所含 λ 的次数分别小于 $m+n+1$，$m+n+2$ 或 $m+n$。例如 $\phi_{11}(e,\lambda)=H_{11}\lambda^{m+n+1}+\tilde{\phi}_{11}(\lambda)$，所以 $\tilde{\phi}_{11}(\lambda)$ 中 λ 的次数小于 $m+n+1$。

下面我们可以得出本文的主要结论。考察时标上四阶边值问题(1.1)，(1.3)，则可得以下定理。

定理 3.1. 设 $m,n\in\mathbb{N}$，令(3.1)~(3.4)成立。则时标上四阶边值问题(1.1)，(1.3)至多有 $3m+3n+4$ 个特征值。

证明： 因为 $\delta(\lambda)=\det\left[A+B\Phi(e,\lambda)\right]$，其中 $\Phi(e,\lambda)=\left[\phi_{ij}(e,\lambda)\right]$。由引理 2.3 和推论 3.1 可知判断函数 $\delta(\lambda)$是关于 λ 的多项式。我们用 $d_{ij},1\le i,j\le 4$ 来表示 $\phi_{ij}(e,\lambda)$ 中 λ 的次数，则基解矩阵 $\Phi(e,\lambda)$ 中 λ 的次数可以写成以下矩阵

$$(d_{ij})=\begin{bmatrix} m+n+1 & m+n+1 & m+n & m+n \\ m+n+1 & m+n+1 & m+n & m+n \\ m+n+2 & m+n+2 & m+n+1 & m+n+1 \\ m+n+2 & m+n+2 & m+n+1 & m+n+1 \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

由引理 2.3 和(3.14)知，$\delta(\lambda)$中 λ 最高次数为 $3m+3n+4$。由代数基本定理知 $\delta(\lambda)$至多有 $3m+3n+4$ 个根，即时标上四阶边值问题(1.1)，(1.3)至多有 $3m+3n+4$ 个特征值。

注 3.2. 本文我们只研究了时标上四阶对称 S-L 方程其中的一种，其他的情形可以用类似的方法研究并得到相应的有限谱结论，只是计算过程有所不同。

基金项目

本文由国家自然科学基金(11661059, 11301259)，内蒙古自然科学基金(2017JQ07)资助。

参考文献

[1] Atkinson, F.V. (1964) Discrete and Continuous Boundary Problems. Academic Press, New York/London.

[2] Kong, Q., Wu, H. and Zettl, A. (2001) Sturm-Liouville Problems with Finite Spectrum. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **263**, 748-762. https://doi.org/10.1006/jmaa.2001.7661

[3] Kong, Q., Volkmer, H. and Zettl, A. (2009) Matrix Representations of Sturm-Liouville Problems with Finite Spectrum. *Results in Mathematicas*, **54**, 103-116. https://doi.org/10.1007/s00025-009-0371-3

[4] Ao, J.J., Sun, J. and Zhang, M.Z. (2011) The Finite Spectrum of Sturm-Liouville Problems with Transmission Conditions. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 1166-1173. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.05.033

[5] Ao, J.J., Bo, F.Z. and Sun, J. (2014) Fourth Order Boundary Value Problems with Finite Spectrum. *Applied Mathematics and Computation*, **244**, 952-958. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.07.054

[6] Kong, Q. and Zettl, A. (2012) Inverse Sturm-Liouville Problems with Finite Spectrum. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **386**, 1-9. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.06.083

[7] Agarwal, R., Bohner, M. and Wong, P. (1999) Sturm-Liouville Eigenvalue Problems on Time Scales. *Applied Mathe-*

matics and Computation, **99**, 153-166. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(98)00004-6

[8] Zhang, C. and Yang, D. (2010) Eigenvalues of Second-Order Linear Equations with Coupled Boundary Conditions on Time Scales. *Applied Mathematics and Computation*, **33**, 1-21. https://doi.org/10.1007/s12190-009-0270-5

[9] Anderson, D., Guseinov, G. and Hoffacker, J. (2006) Higher-Order Self-Adjoint Boundary-Value Problems on Time Scales. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **194**, 309-342. https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.07.020

[10] Tuna, H. (2016) Completeness Theorem for the Dissipative Sturm-Liouville Operator on Bounded Time Scales. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **47**, 535-544. https://doi.org/10.1007/s13226-016-0196-1

[11] 赵娜. 时标上 Sturm-Liouville 问题的有限谱[J]. 山东大学学报(理学版), 2013, 48(3): 96-102.

[12] Bohner, M. and Peterson, A. (2001) Dynamic Equations on Time Scales. Birkhäuser, Boston. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0201-1