Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2018, 7(5), 602-608
Published Online May 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.75071

Pentavalent 2-Transitive Cayley Graphs on Finite Nonabelian Simple Groups

Bo Ling[1], Xianglin Liu[2]

[1]School of Mathematics and Computer Sciences, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan
[2]Guangxi University XingJian College of Science and Liberal Arts, Nanning Guangxi
Email: bolinggxu@163.com

Received: May 1st, 2018; accepted: May 17th, 2018; published: May 25th, 2018

Abstract

A Cayley graph $\Gamma = Cay(G,S)$ is said to be normal if G is normal in $Aut\Gamma$. In this paper, we investigate the normality problem of the connected pentavalent 2-transitive Cayley graphs on finite nonabelian simple groups. We prove that all such graphs Γ are either normal or $G = A_{39}$, A_{59} or A_{119}. This provides another proof for the partial results of Corollary 1.3 of [Europ. J. Combin., 63, 134~145, 2017].

Keywords

Symmetric Graph, Simple Group, Automorphism Group, Normal Cayley Graph

有限非交换单群上的5度2-传递Cayley图

凌　波[1]，刘响林[2]

[1]云南民族大学数学与计算机科学学院，云南　昆明
[2]广西大学广西大学行健文理学院，广西　南宁
Email: bolinggxu@163.com

收稿日期：2018年5月1日；录用日期：2018年5月17日；发布日期：2018年5月25日

摘　要

称Cayley图$\Gamma = Cay(G,S)$是正规的，如果G在$Aut\Gamma$中正规。本文研究有限非交换单群上的连通5度2-传递Cayley图的正规性，并且证明：所有这样的图要么是正规的，要么$G = A_{39}$，A_{59}，A_{119}。这相当于给文

文章引用: 凌波, 刘响林. 有限非交换单群上的 5 度 2-传递 Cayley 图[J]. 应用数学进展, 2018, 7(5): 602-608.
DOI: 10.12677/aam.2018.75071

献[Europ. J. Combin., 63, 134~145, 2017]推论1.3的部分结果提供了另一种证明方法。

关键词

对称图，单群，自同构群，正规Cayley图

1. 引言

本文仅讨论有限，简单，连通，无向图。

设Γ是一个图。其顶点集，边集，弧集，图的全自同构群分别记为$V\Gamma$，$E\Gamma$，$\mathbf{Arc}\Gamma$，$Aut\Gamma$。设$X \le Aut\Gamma$。我们称图Γ为X-点传递的，X-边传递的，X-弧传递的，如果X传递的作用在$V\Gamma$，$E\Gamma$，$\mathbf{Arc}\Gamma$。相应地，称图Γ是点传递的，边传递的，弧传递的，如果$X = Aut\Gamma$。

设 s 是一正整数，称图Γ中的$s+1$个顶点的序列$(v_0, v_1, \cdots, v_s)$是一条 s-弧}，如果$(v_i, v_{i+1}) \in E\Gamma$对于$0 \le i \le s-1$，并且对$s \ge 2$有$v_i \ne v_{i+2}, 0 \le i \le s-2$。称图$\Gamma$是$(X,s)$-弧传递，如果$\Gamma$至少有一条 s-弧且 X 作用在Γ的顶点集和s-弧集上是传递的。称图Γ为(X,s)-传递}，如果Γ是(X,s)-弧传递但不是$(X,s+1)$-弧传递。特别地，1-弧我们简单的称为弧，而，$(X,1)$-弧传递图我们称为X-弧传递图或者X-对称图。当$X = Aut\Gamma$时，对于(X,s)-弧传递图，(X,s)-传递图，X-对称图我们简单的称其为s-弧传递图，s-传递图，对称图。

设G是一个有限群。取$S \subseteq G - \{1\}$，称它为G的*Cayley*子集。设S满足$S = S^{-1} := \{s^{-1} \mid s \in S\}$。定义群$G$关于$S$的*Cayley 无向图*$\Gamma := Cay(G,S)$，其中：

$$V(\Gamma) := G, E(\Gamma) := \{\{g, sg\} \mid g \in G, s \in S\}.$$

我们称 Cayley 图$\Gamma = \mathbf{Cay}(G,S)$关于$G$是正规的，如果$G \lhd Aut\Gamma$。记$Aut(G,S) = \{\alpha \in Aut(G) \mid S^{\alpha} = S\}$，记$A_1$是顶点 1 的点稳定子群。由文献([1]，命题 4.22)，我们有：$N_{Aut\Gamma}(G) = G : Aut(G,S)$。所以，$\Gamma$是正规 Cayley 图当且仅当$A_1 = Aut(G,S)$，当且仅当$Aut\Gamma = G : Aut(G,S)$。由此可见，正规 Cayley 图的全自同构群可被原群完全决定。

Cayley 图的正规性概念由我国著名代数学家徐明曜教授 1998 年在文献[2]中提出。因为正规 Cayley 图的全自同构群可被原群完全决定，所以这个问题的研究引起了国内外众多学者的极大关注并取得了许多重要成果。单群是构成群的基本元素，具有群的内在特点，因此单群上 Cayley 图的正规性问题更是受到学者们的关注。例如，李才恒教授在[3]中证明：除了 7 个例外，所有的有限非交换单群上的 3 度弧传递 Cayley 图都是正规的。基于这个工作，徐尚进教授等人在文献[4] [5]中证明：除交错群A_{47}上的两个例外，所有有限非交换单群的连通 3 度弧传递 Cayley 图都是正规的。方新贵教授等人在文献[6]中证明：除单群$\mathbf{M}_{11}$上的两个例外，所有有限非交换单群上的 4 度 2-传递 Cayley 图都是正规的。对于 5 度图，周进鑫和冯衍全教授 2010 年在[7]中证明：所有有限非交换单群上的 5 度 1-传递 Cayley 图都是正规的。2017 年，冯衍全教授等人在文献[8]中进一步证明：除了 13 个例外，所有的有限非交换单群上的 5 度弧传递 Cayley 图都是正规的。

本文证明了如下定理：

定理 1.1. 设 G 是有限非交换单群，Γ 是 G 上的 5 度 2-传递 Cayley 图。则要么 $G \lhd Aut\Gamma$，要么 $G = A_{39}$，A_{59}，A_{119}。

2. 预备知识

设 G 是有限群，H 是 G 的子群，$\mathbf{C}_G(H)$ 是 H 在 G 中的中心化子，$\mathbf{N}_G(H)$ 是 H 在 G 中的正规化子。则有下面的引理，我们称之为“N/C”定理，参见文献([9]，第 I 章，定理 5.7)。

引理 2.1. 设 $H \le G$，则 $\mathbf{N}_G(H)/\mathbf{C}_G(H)$ 同构于 $Aut(H)$ 的一个子群。

下面的引理是关于 Fitting 子群的一个性质，参阅([10]，P.30，推论)。

引理 2.2. 设 F 是 G 的 Fitting 子群。如果 G 是可解的，则 $F \ne 1$ 且中心化子 $\mathbf{C}_G(H) \le F$。

设 Γ 为 X—点传递图，其中 $X \le Aut\Gamma$。设 N 为 X 的一个正规子群。记 V_N 为 N 作用在 $V\Gamma$ 上的轨道的集合。由 N 诱导的 Γ 的正规商图 Γ_N 定义为：Γ_N 的顶点集为 V_N；任意两个顶点 $B, C \in V_N$ 相邻当且仅当存在 $u \in B$ 和 $v \in C$ 在 Γ 中相邻。当 $val\Gamma = val\Gamma_N$ 时，称 Γ 为 Γ_N 的正规覆盖。

一个图 Γ 称 G-局部本原的，如果对于每一个 $\alpha \in V\Gamma$，点稳定子群 G_α 在 $\Gamma(\alpha)$ 上作用本原。下面的引理给了一个基本的方法去研究点传递局部本原图，参阅文献([11]，定理 4.1)以及([12]，引理 2.5)。

引理 2.3. 设 Γ 是一个 G-点传递局部本原图，其中 $G \le Aut\Gamma$。设 $N \lhd G$ 在 $V\Gamma$ 上作用至少有 3 个轨道。则下列结论成立：

1) N 在 $V\Gamma$ 上作用半正则，$G/N \le Aut\Gamma_N$，Γ 是 Γ_N 的一个正规覆盖；

2) $G_\alpha \cong (G/N)_\gamma$，其中 $\alpha \in V\Gamma$，$\gamma \in V\Gamma_N$；

3) Γ 是 (G,s)-传递的当且仅当 Γ_N 是 $(G/N,s)$-传递的，其中 $1 \le s \le 5$ 或者 $s = 7$。

下面的引理给出了 5 度对称图的点稳定子群的结构，参考文献[7] [13]。

引理 2.4. 设 Γ 是一个 5 度 (G,s)-传递图，其中 $G \le Aut\Gamma$ 且 $s \ge 1$。设 $\alpha \in V\Gamma$。则下列之一成立，其中 F_{20} 是阶为 20 的 Frobenius 群。

1) 如果 G_α 可解，则 $s \le 3$ 且 $|G_\alpha| \mid 80$。此外，(s, G_α) 为表 1 之一。

2) 如果 G_α 非可解，则 $2 \le s \le 5$ 且 $|G_\alpha| \mid 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5$。此外，$(s, G_\alpha)$ 为表 2 之一。

3. 定理 1.1 的证明

以下设 $\Gamma = Cay(G,S)$ 是 5 度 2-传递 Cayley 图，其中 G 为有限非交换单群，$A := Aut\Gamma$ 且 A_1 表示

Table 1. The insoluble case
表 1. 可解情形的点稳定子

s	1	2	3
G_α	$\mathbf{Z}_5$，$\mathbf{D}_{10}$，$\mathbf{D}_{20}$	F_{20}，$F_{20} \times \mathbf{Z}_2$	$F_{20} \times \mathbf{Z}_4$

Table 2. The insoluble case
表 2. 非可解情形的点稳定子

s	2	3	4	5
G_α	$\mathbf{A}_5$，$\mathbf{S}_5$	$\mathbf{A}_4 \times \mathbf{A}_5$，$\mathbf{A}_4 \times \mathbf{A}_5 : \mathbf{Z}_2$，$\mathbf{S}_4 \times \mathbf{S}_5$	$\mathbf{ASL}(2,4)$，$\mathbf{AGL}(2,4)$，$\mathbf{A\Sigma}L(2,4)$，$\mathbf{A\Gamma}L(2,4)$	$Z_2^6 : \Gamma L(2,4)$
$\lvert G_\alpha \rvert$	60, 120	720, 1440, 2880	960, 1920, 2880, 5760	23040

顶点 1 的点稳定子群。则由引理 2.4 $A_1=F_{20}$，$F_{20}\times Z_2$，A_5，S_5。令 $\Delta=\{20,40,60,120\}$。若 $G=A_5$，则由([14]，推论 2.3.2)，$G\lhd A$。所以，以下假设 $G\neq A_5$。

我们把证明分为下面的两种情形：

情形一：*A* 不存在可解的正规子群。

设 N 是 A 的一个极小正规子群，则 $N=T^d$，T 为非交换单群。

我们用反证法证明。下面我们假设 G 在 A 中不正规。因为 $N\cap G\lhd G$ 且 G 为非交换单群，所以 $N\cap G=1$，G。假设 $N\cap G=1$。因为 $A=GA_1$，所以 $|N|\,\big|\,|A_1|$。因为 Γ 为 5 度 2-传递 Cayley 图，由引理 2.4 知 $|A_1|\,\big|\,120$，所以 $|N|$ 最多有 3 个 2 因子，1 个 3 因子，1 个 5 因子。又因为 N 非可解，所以 $N\cong A_5$。由引理 2.1，$A/C_A(N)\leq Aut(N)\cong S_5$。这意味着 G 中心化 $|N|$，亦即 $GN=G\times N$。因为 G 不同构于 A_5，所以 $G\,\mathrm{\mathbf{char}}\,GN\lhd A$，$G\lhd A$ 矛盾。所以 $N\cap G=G$，$G\leq N$。如果 $G=N$，则 $G\lhd A$ 矛盾。所以 $G<N$。首先，我们断言此时 N 为非交换单群。若不然，$N=T^d$，$d\geq 2$，T 为非交换单群。因为 G 为非交换单群，$T_1\cap G\lhd G$，所以 $T_1\cap G=1$ 或者 G。假设 $T_1\cap G=1$。则 $|T_1|\,\big|\,|N_1|\,\big|\,|A_1|$，这意味着 $T_1\cong A_5$。这推出 $G\cong A_5$，矛盾。假设 $T_1\cap G=G$，则 $G\leq T_1$。所以 $|T_1|\,\big|\,|N_1|\,\big|\,|A_1|$，这意味着 $T_2\cong A_5$，$G=A_5$ 矛盾。因此，N 为非交换单群。设 K 为 N 中包含 G 的极大真子群。令 $\Omega=[N:K]$。因为 N 是非交换单群，所以 N 通过右乘作用忠实的作用在 Ω 上且 $|\Omega|$ 最有 3 个 2 因子，1 个 3 因子，1 个 5 因子。因为 K 为 N 作用在 Ω 上的点稳定子群且 K 在 N 中极大，所以 N 为作用在 Ω 上的本原置换群。注意到 N 为非交换单群，$K\geq G$ 非可解，由文献[15]，N，K，$|\Omega|$ 为表 3 的群之一。

Table 3. Candidates (N,K)

表 3. 可能出现的 (N,K)

N	A_{40}	A_{60}	A_{120}	$P\Omega^+(8,2)$	
K	A_{39}	A_{59}	A_{119}	$PSp(6,2)$	
$\|\Omega\|$	40	60	120	120	
$PSL(3,4)$	A_{30}	A_6	A_8	A_{12}	
$PSL(2,7)$	A_{29}	A_5	A_7	A_{11}	
120	30	6	8	12	
A_{24}	M_{11}	M_{12}	M_{24}	A_7	
A_{23}	$PSL(2,11)$	M_{11}	M_{23}	$PSL(2,7)$	
24	12	12	24	15	
A_{15}	A_{10}	A_{20}	$PSL(4,3)$	A_8	
A_{14}	A_9	A_{19}	$Z_3^3:PSL(3,3)$	$Z_2^3:PSL(3,2)$	
15	10	20	40	15	
$PSp(4,4)$	$PSp(8,2)$	$PSp(6,2)$	A_{10}	A_{16}	A_9
$PSL(2,16):Z_2$	$PSO^-(8,2)$	$PSU(3,3):Z_2$	$(A_7\times Z_3):Z_2$	S_{14}	$PSL(2,8)$
120	120	120	120	120	120

首先，因为 $G \le K$，G 为非交换单群且 $|N:G| \le 120$，这推出 K 不能是表 3 中的最后一行以及 $K \ne Z_3^3 : PSL(3,3)$。若 $K = Z_2^3 : PSL(3,2)$，则 $G = PSL(3,2)$，$N = A_8$，$N_v = S_5$。这种情况可以由 Magma [16] 排除。所以 $K \ge G$ 且 K 也是一个非交换单群。若 $K > G$，则可设 I 为 K 中包含 G 的极大子群。此时的 K 和 I 也满足表 3，这导致 $|N:G| = |N:K||K:I||I:G| \notin \Omega$，不可。所以 $K = G$。

假设 $(N,K) = (PSL(3,4), PSL(2,7))$。因为 $|N:G| \le 120$，$|N:K| = 120$，$G \le K$，所以 $K = G$。又因为 Γ 是 N—弧传递的，所以 $|N_1| = 120$，$N_1 \cong S_5$。然而，$PSL(3,4)$ 不存在子群同构于 S_5，矛盾。至此可得 $|\Omega| \ne 120$。假设 $|\Omega| = 6$，8，12，24。则因为 $N \lhd A$，$N_v^{\Gamma(v)} \lhd A_v^{\Gamma(v)}$，$A_v^{\Gamma(v)}$ 在 $\Gamma(v)$ 上作用本原，所以 $N_v^{\Gamma(v)}$ 在 $\Gamma(v)$ 上传递。这推出 $5 \| N_v| = |N:G| = |\Omega|$，矛盾。因此，$|\Omega| \ne 6$，8，12，24。下面仅需排除当 $|\Omega| = 10$，15，20，30 的情形。若 $|\Omega| = 15$ 或者 30，则 Γ 为 N—弧传递的 5 度图且 $|N_v| = 15$ 或者 30，由引理 2.4，不可。若 $|\Omega| = 10$ 或者 20，则由([7]，定理 5.4)可以排除。最后假设 $(N,K) = (P\Omega^+(8,2), PSp(6,2))$。由上可知 $K = G$ 且此时 $N_v \cong S_5$。此时，N 通过右乘作用在 $[N:K]$ 上忠实，N_v 为这个作用的一个正则子群。因为 $|[N:K]| = |N_v| = |S_5| = 120$，所以 N 可以看成是 S_{120} 的一个子群，N_v 是 S_{120} 的一个正则子群，K 为某一个点的点稳定子群。这种情况可由 Magma [16]排除。

情形二：A 存在可解的正规子群。

设 M 为 A 最大的可解正规子群。则 $1 < M\,\mathbf{char}\,A$。因为 $M \cap G \lhd G$ 以及 G 是非交换单群，所以 $M \cap G = 1$。进而得 $|M||A_1| \in \Delta$。这意味着 M 在 $V\Gamma$ 上至少有 3 个轨道。由引理 2.3，M 在 $V\Gamma$ 上半正则。

令 $\overline{A} = A/M$，$\Sigma = \Gamma_M$。则由引理 2.3，Σ 是 $\overline{A}$-弧传递的。设 $\overline{N}$ 是 $\overline{A}$ 的一个极小正规子群，N 是在自然同态：$A \to A/M$ 下的原像。由 M 的极大性，可以得到 $\overline{N}$ 是非可解的。所以 $\overline{N} \cong T^d$，其中 T 为非交换单群，$d \ge 1$。下证 $\overline{N}$ 是单群。

设 $\overline{G} := GM/M$。则 $\overline{G} \cong G$。即，$\overline{G}$ 是非交换单群。又因为 $\overline{N} \cap \overline{G} \lhd \overline{G}$，所以 $\overline{N} \cap \overline{G} = 1$ 或者 $\overline{G}$。若 $\overline{N} \cap \overline{G} = 1$，则 $|\overline{N}||A_1| \in \Delta$。这推出 $T \cong A_5$，$d = 1$。所以 $\overline{N} \cong A_5$。进而得 $M \cong Z_2$，$\overline{A} = \overline{N}:\overline{G}$。又因为 $\overline{G} \cong G \ne A_5$，所以 $\overline{G}$ 在 $\overline{N}$ 上的共轭作用平凡，$\overline{A} = \overline{N} \times \overline{G}$。设 $\delta \in V\Sigma$。因为 $\left|\overline{A_\delta}\right| = \dfrac{|\overline{A}|}{|G|/|M|} = \dfrac{|\overline{N}| \cdot |G|}{|G|} = 60$，由引理 2.4，$\overline{A_\delta} \cong A_5$。另一方面，因为 $\left|\overline{G_\delta}\right| = \dfrac{|\overline{G}|}{|G|/|M|} = |M| = 2$，所以 $\overline{G_\delta} \cong Z_2$。又 $\overline{G} \lhd \overline{A}$，所以 $Z_2 \cong \overline{G_\delta} \lhd \overline{A_\delta} \cong A_5$，这与 A_5 是单群矛盾。因此，$\overline{N} \cap \overline{G} = \overline{G}$，$\overline{G} \le \overline{N}$。因为 $\overline{G}$ 是非交换单群，所以 $|\overline{G}|$ 必整除 $\overline{N}$ 的某个合成因子的阶。这推出 $|\overline{G}|\,\big|\,|T|$。若 $d \ge 2$，则 $|T|$ 整除 $|\overline{N}:\overline{G}|\left|\overline{A_\delta}\right| \in \Delta$。这只能是 $\overline{G} \cong T \cong A_5$，这得到 $G = A_5$，矛盾。所以，$d = 1$。因此，$\overline{N}$ 是非交换单群。从上述证明过程还可以得到 $\overline{N}$ 是 $\overline{A}$ 唯一的极小正规子群。即得 $\overline{N}\,\mathbf{char}\,\overline{A}$，$N\,\mathbf{char}\,A$。下证 $\overline{G} < \overline{N}$。

用反证法。若 $\overline{G} = \overline{N}$，则 $N = M:G$。如果 G 中心化 M，则 $N = M \times G$。因此，$G\,\mathbf{char}\,N\,\mathbf{char}\,A$，这与 G 在 A 中不正规矛盾。所以 G 不中心化 M。这意味着 $Aut(M)$ 不可解。

设 F 是 M 的 Fitting 子群。由引理 2.2，$F \ne 1$ 且 $C_M(F) \le F$。因为，$|M||A_1| \in \Delta$，所以

$$F = O_2(M) \times O_3(M) \times O_5(M)$$

其中 $O_2(M), O_3(M), O_5(M)$ 分别表示 M 中最大的正规 2-，3-，5-子群。显然，$O_3(M) \le Z_3$，$O_5(M) \le Z_5$。若 $|O_2(M)| < 4$，则 F 为交换群，$F = C_M(F)$ 且 $Aut(F)$ 可解。则 $M/C_M(F) \le Aut(F)$。所以 $M \le F \cdot Aut(F)$。若 $|O_2(M)| = 1$，则 $M \le Z_3.Z_2$，$Z_5 \cdot Z_4$ 或者 $Z_{15} \cdot (Z_4 \times Z_2)$。这与 $Aut(M)$ 非可解矛盾。若 $|O_2(M)| = 2$，同样的可以得到 $Aut(M)$ 可解，不可。所以 $|O_2(M)| \ge 4$。令 $R = O_2(M)$，$B = RG$。下证 B 在 A 中不正规。

若不然，$B_v^{\Gamma(v)} \lhd A_v^{\Gamma(v)}$。因为 $A_v^{\Gamma(v)}$ 在 $\Gamma(v)$ 上本原，$B > G$，$B_v \ne 1$，所以 $B_v^{\Gamma(v)}$ 在 $\Gamma(v)$ 上传递，$5 \| B_v| = |B:G| = |R|$，矛盾。因而 B 在 A 中不正规。

Table 4. Candidates $(\bar{N},\bar{G})$
表 4. 可能出现的$(\bar{N},\bar{G})$

$\bar{N}$	A_{40}	A_{60}	A_{10}	A_{20}	A_{15}	A_{30}	A_6
$\bar{G}$	A_{39}	A_{59}	A_9	A_{19}	A_{14}	A_{29}	A_5
$\lvert\bar{N}:\bar{G}\rvert$	40	60	10	20	15	30	6
A_8	A_{12}	A_{24}	M_{11}	M_{12}	M_{24}	A_7	
A_7	A_{11}	A_{23}	$PSL(2,11)$	M_{11}	M_{23}	$PSL(2,7)$	
8	12	24	12	12	24	15	

假设 G 中心化 R。因为 $R\lhd B$，所以 $B/C_B(R)\le Aut(R)$。又 G 是非交换单群，所以 $|R|\ge 8$。进而 $|M/R|$ 最有 1 个 3-因子以及 1 个 5-因子。这推出 $Aut(M)/R$ 可解的。又，$N/R=(M/R):(RG/R)$。所以 RG/R 中心化 M/R，$N/R=(M/R)\times(RG/R)$。这意味着 $RG/R\,\mathbf{char}\,N/R$，$RG\mathbf{char}N\lhd A$，这与 RG 在 A 中不正规矛盾。

因此，G 中心化 R。因为 G 不中心化 M，所以 $R\ne M$。又因为 $|R|\ge 4$，所以 $|M/R|$ 最有 1 个 2-因子，1 个 3-因子，1 个 5-因子。而，M 是可解的，$M/R\ne A_5$，这可以推出 $Aut(M/R)$ 是可解的。跟上一个自然段同样的分析可得，$RG\lhd A$，不可。

以上证明了 $\bar{G}<\bar{N}$。此时，由情形一的证明可得 $\bar{N}$ 和 $\bar{G}$ 为表 4 群之一。

假设 $(\bar{G},\bar{N})=(A_5,A_6)$。下面先证明存在 $L\lhd N$ 使得 $5\|N:L|$。因为 $|\overline{N_w}:\overline{G_w}|=|\bar{N}:\bar{G}|=6$，$5\|\overline{N_w}|$，所以 $5\|\overline{G_w}|$。这意味着 $5\|M|$。因为 $|M|=|\overline{G_w}|$，$6|\overline{G_w}|\le 120$，所以 $|M|=5$，10，20。设 M_5 为 M 的 Sylow 5-子群。如果 $|M|=5$，则因为 A_6 的 Schur 乘子为 Z_6 (可参考文献[17])，所以 $N\cong M_5\times A_6$。此时存在 $L\cong A_6$ 满足我们的要求。如果 $|M|=10$，则 $M\cong Z_{10}$ 或者 D_{10}。这推出 $N\cong M_5\times(Z_2\cdot A_6)$ 或者 $(M_5\times A_6)\cdot Z_2$。此时存在 $L\cong Z_2\cdot A_6$ 或者 A_6 满足我们的要求。如果 $|M|=20$，则同样可以得到 $L\cong A_6$ 或者 $Z_2\cdot A_6$ 满足要求。综上，总是存在 $L\lhd N$ 使得 $5\|N:L|$。因为 $|L|\ne|G|$\$，L 在 $V\Gamma$ 上不正则，所以 $1\ne L_v^{\Gamma(v)}\lhd N_v^{\Gamma(v)}$。又因为 $N_v^{\Gamma(v)}$ 在 $\Gamma(v)$ 上本原，所以 $L_v^{\Gamma(v)}$ 在 $\Gamma(v)$ 上传递。进而得 $5\|L_v|$。这导致 $5^2\|N:L|\cdot|L:G|=|N:G|=|N_v|$。由引理 2.4，这是不可能的。类似的，对于 $(\bar{G},\bar{N})=(A_7,A_8)$，$(A_{11},A_{12})$，$(A_{23},A_{24})$，$(PSL(2,11),M_{11})$，$(M_{11},A_{12})$，$(M_{23},M_{24})$ 的情形也可以排除。下面假设 $(\bar{G},\bar{N})=(PSL(2,7),A_7)$，$(A_{14},A_{15})$，$(A_{29},A_{30})$。则此时 $|M|\le 4$，$N\cong M\cdot\bar{N}$。因为 $N_N(M)/C_N(M)=N/C_N(M)\le Aut(M)$，而 $Aut(M)$ 中不包含子群同构于 A_7，A_{15}，A_{30}，所以 $\bar{N}$ 中心化 M。进而得到 $N\cong M\times\bar{N}$。另一方面，$A_v\cong A_5$ 或者 S_5。此时，$\bar{N}\mathbf{char}N\lhd A$，$\overline{N_v}\lhd\overline{A_v}$，$|\overline{N_v}|=15$，这与 A_v 不包含 15 阶的正规子群矛盾。最后 $(\bar{G},\bar{N})=(A_9,A_{10})$，$(A_{19},A_{20})$ 的情况可以由文献([7]，定理 5.4)的证明过程排除。综上，在此种情形下，$G\cong\bar{G}\cong A_{39}$ 或者 A_{59}，定理 1.1 成立。

基金项目

国家自然科学基金项目(11701503)；云南省教育厅科学研究基金项目(2017ZZX086)。

参考文献

[1] 徐明曜. 有限群导引(下) [M]. 第二版. 北京: 科学出版社, 1999.

[2] Xu, M.Y. (1998) Automorphism Groups and Isomorphisms of Cayley Digraphs. *Discrete Mathematics*, **182**, 309-319. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(97)00152-0

[3] Li, C.H. (1996) Isomorphisms of Finite Cayley Graphs. The University of Western Australia, Perth.

[4] Xu, S.J., Fang, X.G., Wang, J., *et al.* (2005) On Cubic *s*-Arc Transitive Cayley Graphs of Finite Simple Groups. *European Journal of Combinatorics*, **26**, 133-143. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2003.10.015

[5] Xu, S.J., Fang, X.G., Wang, J., *et al.* (2007) 5-Arc Transitive Cubic Cayley Graphs on Finite Simple Groups. *European Journal of Combinatorics*, **28**, 1023-1036. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2005.07.020

[6] Fang, X.G., Wang, J. and Zhou, S.M. (2016) Tetravalent 2-Transitive Cayley Graphs of Finite Simple Groups and Their Automorphism Groups. arXiv:1611.06308v1

[7] Zhou, J.X. and Feng, Y.Q. (2010) On Symmetric Graphs of Valency Five. *Discrete Mathematics*, **310**, 1725-1732. https://doi.org/10.1016/j.disc.2009.11.019

[8] Du, J.L., Feng, Y.Q. and Zhou, J.X. (2017) Pentavalent Symmetric Graphs Admitting Vertex-Transitive Non-Abelian Simple Groups. *European Journal of Combinatorics*, **63**, 134-145. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2017.03.007

[9] 徐明曜. 有限群导引(上) [M]. 第二版. 北京: 科学出版社, 1999.

[10] Suzuki, M. (1985) Group Theory II. Springer-Verlag, New York.

[11] Praeger, C.E. (1992) An O'Nan-Scott Theorem for Finite Quasiprimitive Permutation Groups and an Application to 2-Arc-Transitive Graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, **47**, 227-239.

[12] Li, C.H. and Pan, J.M. (2008) Finite 2-Arc-Transitive Abelian Cayley Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **29**, 148-158. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2006.12.001

[13] Guo, S.T. and Feng, Y.Q. (2012) A Note on Pentavalent *s*-Transitive Graphs. *Discrete Mathematics*, **312**, 2214-2216. https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.04.015

[14] Zhou, J.X. (2008) Symmetry of Graphs and Embeddings of Graphs into Surfaces. Beijing Jiaotong University, Beijing.

[15] Roney-Dougal, C.M. (2005) The Primitive Permutation Groups of Degree Less Than 2500. *Journal of Algebra*, **292**, 154-183 https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2005.04.017

[16] Bosma, W., Cannon, C. and Playoust, C. (1997) The MAGMA Algebra System I: The User Language. *Journal of Symbolic Computation*, **24**, 235-265. https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0125

[17] Conway, J.H., Curtis, R.T., Norton, S.P., Parker, R.A. and Wilson, R.A. (1985) Atlas of Finite Groups. Oxford University Press, London/New York.