

# Cubic Quasi-Bezier Curve and Its Application in Surface Blending

Fang Wang<sup>1</sup>, Genzhu Bai<sup>1,2\*</sup>

<sup>1</sup>Zhejiang Changzheng Vocational & Technical College, Hangzhou Zhejiang

<sup>2</sup>Inner Mongolia University for the Nationalities, Tongliao Inner Mongolia

Email: [\\*bgz049@163.com](mailto: *bgz049@163.com)

Received: May 29<sup>th</sup>, 2018; accepted: Jun. 15<sup>th</sup>, 2018; published: Jun. 22<sup>nd</sup>, 2018

---

## Abstract

Cubic quasi-Bézier curves with three shape parameters  $\alpha, \beta, \gamma$  can adjust the shape of curves near specific control points. In this study, given two pipes of same radius and non-coplanar axes, we first blend the axes of the two pipes using the property of quasi-Bézier curves and further construct the surface that blends the two pipes.

## Keywords

Shape Parameters, Cubic Quasi-Bézier Curves, Axes, Pipes, Blending

---

# 拟三次Bézier曲线及其在管道拼接中的应用

王 芳<sup>1</sup>, 白根柱<sup>1,2\*</sup>

<sup>1</sup>浙江长征职业技术学院, 浙江 杭州

<sup>2</sup>内蒙古民族大学, 内蒙古 通辽

Email: [\\*bgz049@163.com](mailto: *bgz049@163.com)

收稿日期: 2018年5月29日; 录用日期: 2018年6月15日; 发布日期: 2018年6月22日

---

## 摘 要

本文利用带有形状参数  $\alpha, \beta, \gamma$  的拟三次Bézier曲线对于特定控制顶点附近曲线的形状具有调控特性, 在光滑拼接两个半径相同的轴线异面圆管道的轴线的基础上, 构造了光滑拼接两个轴线异面的圆管道, 得到了新的轴线异面管道的拼接管道, 扩大了应用范围。

\*通讯作者。

## 关键词

形状参数, 拟三次Bézier曲线, 轴线, 管道, 光滑拼接

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

曲面拼接是计算机辅助几何设计中的一个基本问题, 而轴线异面的管道拼接是几何造型中难点基础问题。对于轴线异面管道光滑拼接问题, 经典的曲面拼接方法[1] [2] [3] [4] [5]很难奏效, 已有成果不多。我们提出了基于轴线光滑拼接的轴线异面管道光滑拼接方法[6]-[11]。在[6]我们用空间 Bézier 曲线光滑拼接两个异面的轴线, 构造了拼接两个轴线异面的管道, 在[11]中我们用有理 Bézier 曲线光滑拼接两个异面的轴线, 构造了两个轴线异面的管道。由于 Bézier 曲线的形状完全取决于控制多边形顶点的选取, Bézier 曲线形状的修改要通过修改控制多边形的顶点来实现。有理 Bézier 曲线通过引入权因子, 不用修改控制多边形的顶点, 通过调控权因子改变曲线形状, 有利于曲线形状的控制和修改。但如何选取有理 Bézier 曲线的权因子以及权因子对于个别顶点处曲线形状的影响还不是十分清楚。秦新强等[12]引入了带形状参数  $\alpha, \beta, \gamma$  的四次多项式基函数, 定义了 CE-Bézier 曲线。在不改变三次 Bézier 曲线的控制多边形顶点的情况下, 得到了拟三次 Bézier 曲线, 且对于个别顶点处曲线形状的调控具有明显的作用。这对于拼接两个异面轴线, 构造轴线异面的管道的拼接曲面提供了有利的工具。

设

$$\Phi_1 : \begin{cases} x = X_1 + a \cos \varphi + a \sin \varphi, \\ y = Y_1 + B_1 s + a \cos \varphi + a \sin \varphi, \\ z = a \cos \varphi + a \sin \varphi. \end{cases} \text{ 和 } \Phi_2 : \begin{cases} x = a \cos \varphi + a \sin \varphi, \\ y = Y_2 + a \cos \varphi + a \sin \varphi, \\ z = Z_2 + C_2 s + a \cos \varphi + a \sin \varphi. \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad (1)$$

是两个轴线异面的圆管道的参数表示, 其中  $a$  是圆管道的半径。

$$L_1 : \begin{cases} x = X_1 + 0 \cdot s, \\ y = Y_1 + B_1 s, \\ z = 0 + 0 \cdot s, \end{cases} \text{ 和 } L_2 : \begin{cases} x = 0 + 0 \cdot s, \\ y = Y_2 + 0 \cdot s, \\ z = Z_2 + C_2 s. \end{cases} \quad (2)$$

为两个管道的轴线, 分别位于  $OXY$  平面上, 且与  $Y$  轴平行和位于  $OYZ$  平面上与  $Y$  轴垂直。

定义 1 [12] 对于任意  $t \in [0, 1]$ ,  $\alpha, \gamma \in [-3, 1]$ ,  $\beta \in [-3, 3]$  称关于  $t$  的多项式

$$\begin{cases} B_{0,4}(t) = (1 - \alpha t)(1 - t)^3, \\ B_{1,4}(t) = [3 + \alpha(1 - t) + \beta t]t(1 - t)^2, \\ B_{2,4}(t) = [3 - \beta(1 - t) + \gamma t]t^2(1 - t), \\ B_{3,4}(t) = (1 - \gamma + \gamma t)t^3. \end{cases}$$

为带形状参数  $\alpha, \beta, \gamma$  的四次多项式基函数。

定义 2 [12] 给定四个控制顶点  $V_i \in R^3$ , 对于  $t \in [0, 1]$ , 定义曲线

$$P(t; \alpha, \beta, \gamma) = \sum_{i=0}^3 B_{i,4}(t) V_i, \quad \alpha, \gamma \in [-3, 1], \beta \in [-3, 3]$$

为带形状参数  $\alpha, \beta, \gamma$  的拟三次 Bézier 曲线, 简称三次 CE-Bézier 曲线。

拟 Bézier 曲线和 Bézier 曲线一样通过首、末顶点并和特征多边形的首、末两条边相切。除此之外, 适当调整参数  $\alpha, \beta, \gamma$  的值, 对于个别控制顶点附近曲线的形状具有调空作用。

在上述假设下, 构造光滑拼接两个异面轴线的拟三次 Bézier 曲线, 并进一步构造光滑拼接两个轴线异面的粗细相同的管道。

## 2. 构造光滑拼接两个异面直线的拟三次空间 Bézier 曲线

设  $V_0(X_1, 0, 0), V_1(X_1, Y_1, 0)$  是  $L_1$  上的两个点,  $V_2(0, Y_2, 0), V_3(0, Y_2, Z_2)$  是  $L_2$  上的两个点, 以这四个点为控制顶点构成了与三次 Bézier 曲线对应的特征多边形。由带形状参数  $\alpha, \beta, \gamma$  的四次多项式基函数的定义和带形状参数  $\alpha, \beta, \gamma$  拟三次空间 Bézier 曲线的定义, 可以得到光滑拼接轴线异面的圆管道的轴线的拟三次空间 Bézier 曲线。其参数表示为

$$\begin{cases} x(s, \alpha, \beta, \gamma) = \beta x_1 s^4 + 2x_1(\beta + 1)s^3 + x_1(\beta - 3)s^2 + x_1, \\ y(s, \alpha, \beta, \gamma) = \alpha y_2 s^4 + y_2(3\alpha + 1)s^3 - 3y_2(\alpha + 1)s^2 + y_2(\alpha + 3)s, \\ z(s, \alpha, \beta, \gamma) = \gamma z_3 s^4 + z_3(1 + \gamma)s^3. \end{cases} \quad (3)$$

例 1  $V_0(5, 0, 0), V_1(5, 2, 0), V_2(0, 6, 0), V_3(0, 6, 3)$  时, 轴线异面管道的参数表示为

$$\Phi_1: \begin{cases} x = 5 + a \cos \varphi + a \sin \varphi, \\ y = 2 + s + a \cos \varphi + a \sin \varphi, \\ z = a \cos \varphi + a \sin \varphi. \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi] \text{ 和 } \Phi_2: \begin{cases} x = a \cos t + a \sin t, \\ y = 6 + a \cos t + a \sin t, \\ z = 6 + s + a \cos t + a \sin t. \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

其中  $a=1$  是圆管道的半径。其轴线的参数表示为

$$L_1: \begin{cases} x = 5 + 0 \cdot s, \\ y = 2 + s, \\ z = 0 + 0 \cdot s, \end{cases} \text{ 和 } L_2: \begin{cases} x = 0 + 0 \cdot s, \\ y = 6 + 0 \cdot s, \\ z = 6 + s. \end{cases}$$

则光滑拼接两个轴线的拟三次空间 Bézier 曲线的参数表示为

$$\begin{cases} x = 10s^4 - 10s^3 - 5s^2 + 5, \\ y = -14s^4 + 28s^3 - 20s^2 + 12s, \\ z = 3s^4. \end{cases}$$

如图 1。

## 3. 构造光滑拼接粗细相同的轴线异面的管道

设给定的两个轴线异面的管道的参数表示为式(1), 其轴线的参数表示式为(2), 光滑拼接两个轴线的拟三次 Bézier 曲线的参数表示为(3)。

这样, 可以构造轴线异面的管道  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$  在通过点  $V_0$  和  $V_3$  并与  $L_1$  和  $L_2$  垂直的平面处光滑拼接的管道。其拼接管道的参数表示为

$$\begin{cases} x(s, \varphi) = x(s, \alpha, \beta, \gamma) + aN_1(s) \cos \varphi + aB_1(s) \sin \varphi, \\ y(s, \varphi) = y(s, \alpha, \beta, \gamma) + aN_2(s) \cos \varphi + aB_2(s) \sin \varphi, \\ z(s, \varphi) = z(s, \alpha, \beta, \gamma) + aN_3(s) \cos \varphi + aB_3(s) \sin \varphi. \end{cases} \quad (4)$$

其中  $a$  为拼接管道的半径,  $N(s) = (N_1(s), N_2(s), N_3(s))$  和  $B(s) = (B_1(s), B_2(s), B_3(s))$  分别为拼接管道在点  $s \in [0, 1]$  处的法矢和副法矢。

例 2 设两个轴线异面的管道的参数表示为

$$\Phi_1 : \begin{cases} x = 5 + a \cos \varphi + a \sin \varphi, \\ y = 2 + s + a \cos \varphi + a \sin \varphi, \\ z = a \cos \varphi + a \sin \varphi. \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi] \text{ 和 } \Phi_2 : \begin{cases} x = a \cos \varphi + a \sin \varphi, \\ y = 6 + a \cos \varphi + a \sin \varphi, \\ z = 6 + s + a \cos \varphi + a \sin \varphi. \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

当  $\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = 1$  时, 光滑拼接两个异面轴线的参数表示为

$$\begin{cases} x = 10s^4 - 10s^3 - 5s^2 + 5, \\ y = -14s^4 + 28s^3 - 20s^2 + 12s, \\ z = 3s^4. \end{cases}$$

则基于轴线光滑拼接的两个轴线异面的管道的管道如图 2。

#### 4. 结束语

本文利用带有参数  $\alpha, \beta, \gamma$  的拟三次 Bézier 曲线光滑拼接两个轴线异面的圆管道的轴线  $L_1$  和  $L_2$ , 在此基础上实现了两个半径相同的轴线异面圆管道的  $G^1$  光滑拼接。拼接管道的走向与形状参数  $\alpha, \beta, \gamma$  的选取有关, 适当选取参数可以满足不同的需要。

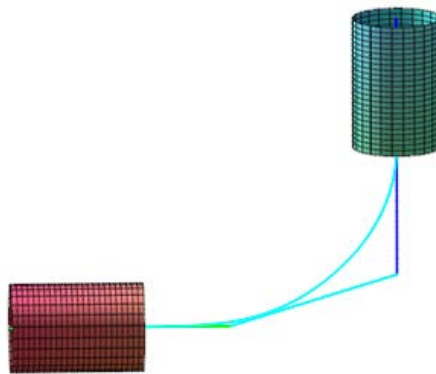


Figure 1. When  $\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = 1$ , the cubic quasi-Bézier curve blending two non-coplanar axes  
图 1.  $\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = 1$  时, 光滑拼接异面轴线的拟三次空间 Bézier 曲线

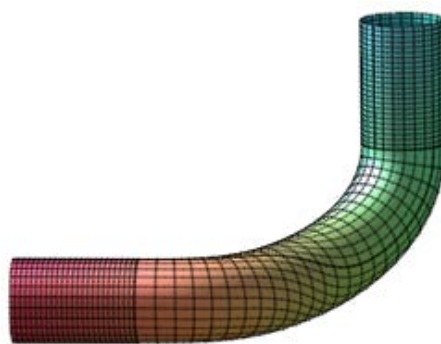


Figure 2. When  $\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = 1$ , the surface that blends the two pipes based on the blending of their axes  
图 2.  $\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = 1$  时, 基于轴线光滑拼接的管道拼接效果图

## 基金项目

国家自然科学基金项目资助(11561052), 浙江省教育厅一般项目资助 Y (201636628)。

## 参考文献

- [1] Warren, J. (1989) Blending Algebraic Surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, **8**, 263-278. <https://doi.org/10.1145/77269.77270>
- [2] 吴文俊, 王定康. CAGD 中的代数曲面拟合问题[J]. 数学的实践与认识, 1994(3): 26-31.
- [3] Wallner, J. and Pottmann, H. (1997) Rational Blending Surfaces between Quadrics. *CAGD*, **14**, 407-419.
- [4] Wu, T.R. and Zhou, Y.S. (2000) On Blending of Several Quadratic Algebraic Surfaces. *CAGD*, **17**, 759-766.
- [5] Cheng, J.S. (2003) Blending Quadric Surfaces via a Base Curve Method. In: *Proceedings of the Sixth Asian Symposium*, Beijing, 17-19 April 2003, 77-86. [https://doi.org/10.1142/9789812704436\\_0007](https://doi.org/10.1142/9789812704436_0007)
- [6] Bai, G.Z., Wang, H. and Yin, Z.J. (2014) Employing Generalized Bezier Tube to Smoothly Blending Tubes Whose Axes are Non-Coplanar. *Applied Mechanics and Materials*, **513-517**, 23-1-23-6.
- [7] Wang, H. and Bai, G.Z. (2013) Employing Generalized Cylindrical Helicoid Tube to Smoothly Blending Tubes Whose Axes are Non-Coplanar. *Applied Mechanics and Materials*, **380-384**, 1750-1754. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.380-384.1750>
- [8] Bai, G.Z., Liu, S.Y., Wang, H., Wu, Z. and Yin, Z.J. (2014) A Novel Method for Smooth Blending Cylindrical Surfaces Whose Axes Are Non-Coplanar Based on Smooth Blending Axes. *Applied Mechanics and Materials*, **687-691**, 1470-1473. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.687-691.1470>
- [9] Bai, G.Z., Wang, H., Wu, Z., Yin, Z.J. and Liu, S.Y. (2014) Smoothly Blending of Two Elliptic Cylinders Whose Axes Are Non-Coplanar. *Applied Mechanics and Materials*, **644-650**, 309-312.
- [10] Bai, G.Z., Wu, Z. and Lin, X. (2007) Intersecting Line of Conical Surface and Smoothly Blending of Two Tubes Whose Axes Are Non-Coplanar. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, **5**, 1887-1891.
- [11] 王芳, 白根柱. 有理 Bézier 曲线及其应用[J]. 应用数学进展, 2017, 6(8): 935-941.
- [12] 秦新强, 胡钢, 张素霞. 三次 Bézier 曲线的新扩张及其应用[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(2): 112-115.

### 知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2324-7991, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: [aam@hanspub.org](mailto:aam@hanspub.org)