

# Hopf Bifurcation in a Class of Predator-Prey Systems

Zizun Li

School of Mathematics and Statistics, Baise University, Baise Guangxi  
Email: zzlqfnu@163.com

Received: May 24<sup>th</sup>, 2018; accepted: Jun. 12<sup>th</sup>, 2018; published: Jun. 19<sup>th</sup>, 2018

---

## Abstract

In this paper, we studied a class of predator-prey system with a defense mechanism of the prey. By calculating the Lyapunov coefficient, the internal equilibrium point is proved to be a first order weak focus, and the parameter conditions of Hopf bifurcation are given.

## Keywords

Predator-Prey System, Lyapunov Coefficient, Hopf Bifurcation

---

# 一类捕食系统中的Hopf分岔

李自尊

百色学院, 广西 百色  
Email: zzlqfnu@163.com

收稿日期: 2018年5月24日; 录用日期: 2018年6月12日; 发布日期: 2018年6月19日

---

## 摘 要

本文研究了食饵具有防御机制的一类捕食系统。通过计算Lyapunov系数证明内部平衡点为一阶细焦点, 并给出了Hopf分岔的参数条件。

## 关键词

捕食系统, Lyapunov系数, Hopf分岔

---

Copyright © 2018 by author and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

Ajraldi [1]研究了如下的食饵具有牧群行为的广义 Holling-II 功能函数反应

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{n}\right) - \frac{\alpha\sqrt{xy}}{1+t_h\alpha\sqrt{x}}, \\ \frac{dy}{dt} &= -sy + \frac{c\alpha\sqrt{xy}}{1+t_h\alpha\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Braza [2]研究了简化的食饵含有二次根号防御机制的函数反应

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1-x) - \sqrt{xy}, \\ \frac{dy}{dt} &= -sy + c\sqrt{xy},\end{aligned}$$

给出了内部平衡点的稳定性分析, 在给出 Hopf 分岔分析时, 并未计算 Lyapunov 系数, 所以并不清楚在 Hopf 临界值时细焦点的阶数。

本文在上述研究成果的基础上, 研究了一类食饵具有三次根号防御机制的函数反应

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1-x) - \sqrt[3]{xy}, \\ \frac{dy}{dt} &= -sy + c\sqrt[3]{xy}.\end{aligned}\tag{1}$$

给出了内部平衡点的稳定性分析, 并在判断 Hopf 分岔时给出了 Lyapunov 系数的值, 计算出平衡点的类型为一阶稳定细焦点, 改变参数后系统会发生 Hopf 分岔, 平衡点的稳定性改变, 分岔出一个稳定的极限环(参考[3][4][5])。

## 2. 主要结果

方程(1)的内部平衡点为  $E(x^*, y^*) = \left( \left( \frac{s}{c} \right)^3, \frac{s^2}{c^2} \left( 1 - \frac{s^3}{c^3} \right) \right)$ , 其 Jacobian 矩阵为

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 1 - 2x - \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}y & -\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{3}cx^{\frac{2}{3}}y & -s + cx^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}.\tag{2}$$

定理 2.1 假设  $s < s_0 = \left( \frac{2}{5} \right)^{\frac{1}{3}} c$ , 即为  $x^* < \frac{1}{3}$ , 则系统(1)在  $R_+^2$  有一个从平衡点  $E$  经过

Hopf 分岔出的稳定的极限环。

证明 由(2), 可得

$$J(E(x^*, y^*)) = \begin{bmatrix} \frac{2c^3 - 5s^3}{3c^3} & -\frac{s}{c} \\ \frac{c^3 - s^3}{3c^2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

令  $\sigma(s) = \text{tr}J(E(x^*, y^*))$ ,  $\Delta(s) = \det J(E(x^*, y^*))$ ,  $\mu(s) = \frac{1}{2}\sigma(s)$ ,  $\omega(s) = \frac{1}{2}\sqrt{4\Delta(s) - \sigma^2(s)}$ .

由(3), 可得

$$\mu(s) = \frac{1}{2}\sigma(s) = \frac{2c^3 - 5s^3}{6c^3},$$

当  $s_0 = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}c$  时,  $\mu(s_0) = 0$ , 可得

$$\omega(s_0) = \sqrt{\frac{c}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}} > 0.$$

我们可以检验如下横截条件

$$\mu'(s_0) = -\frac{5}{2c} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}} < 0.$$

在  $s = s_0$  时, 平衡点  $E(x^*, y^*)$  的坐标为

$$E(x^*, y^*) = \left( \frac{2}{5}, \frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}} \right).$$

为了把平衡点坐标移到原点  $(0, 0)$ , 我们作平移变换

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{5} + \xi_1, \\ y &= \frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}} + \xi_2. \end{aligned}$$

则系统(1)变换为

$$\begin{aligned} \xi_1' &= -\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}} \xi_2 - \frac{5}{6} \xi_1^2 - \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}} \xi_1 \xi_2 - \frac{25}{108} \xi_1^3 + \frac{1}{9} \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{3}} \xi_1^2 \xi_2 + o(|\xi_1, \xi_2|^4), \\ \xi_2' &= \frac{c}{5} \xi_1 - \frac{c}{6} \xi_1^2 + \frac{c}{3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}} \xi_1 \xi_2 + \frac{25c}{108} \xi_1^3 - \frac{c}{9} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{3}} \xi_1^2 \xi_2 + o(|\xi_1, \xi_2|^4). \end{aligned} \quad (4)$$

我们可以把系统(4)写成如下形式

$$\xi' = A\xi + \frac{1}{2}B(\xi, \xi) + \frac{1}{6}C(\xi, \xi, \xi),$$

其中  $B, C$  为向量函数, 令  $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ ,  $\eta = (\eta_1, \eta_2)^T$ ,  $\delta = (\delta_1, \delta_2)^T$ , 则由(4), 可得

$$B(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3}\xi_1\eta_1 - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) \\ -\frac{c}{3}\xi_1\eta_1 + \frac{c}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$C(\xi, \eta, \delta) = \begin{pmatrix} -\frac{25}{16}\xi_1\eta_1\delta_1 + \frac{2}{9}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{3}}(\xi_1\eta_1\delta_2 + \xi_1\eta_2\delta_1 + \xi_2\eta_1\delta_1) \\ -\frac{25}{16}\xi_1\eta_1\delta_1 - \frac{2c}{9}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{3}}(\xi_1\eta_1\delta_2 + \xi_1\eta_2\delta_1 + \xi_2\eta_1\delta_1) \end{pmatrix} \quad (6)$$

其中  $A = J(E(s_0))$ , 即为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \frac{c}{5} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \omega^2\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

其中  $\omega^2 = \omega^2(s_0) = \frac{c}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$ .

方程  $Aq = i\omega q, A^T p = -i\omega p$  的复特征向量为

$$q = \begin{pmatrix} 2^{\frac{1}{3}} \\ -i\omega 5^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}, p = \frac{1}{2\omega 5^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{1}{3}}} \begin{pmatrix} 5^{\frac{1}{3}}\omega \\ -i2^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

且  $\langle p, q \rangle = 1$ 。由(5), (6), (8)可得

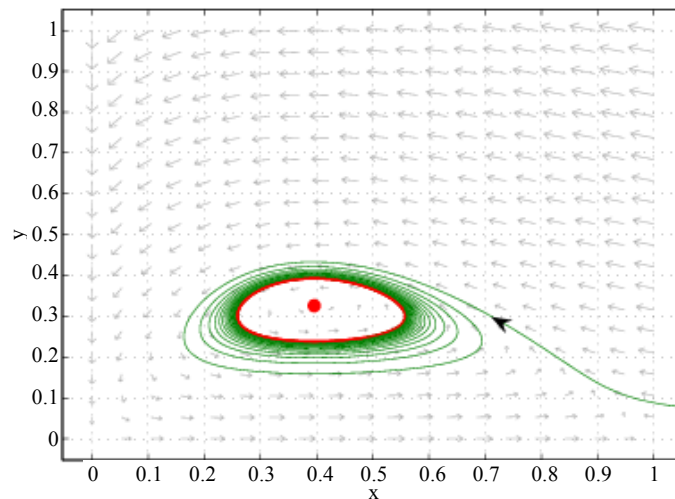
$$B(q, q) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \times 2^{\frac{2}{3}} + \frac{5i\omega}{3} \times 2^{\frac{2}{3}} \\ -\frac{c}{3} \times 2^{\frac{2}{3}} - \frac{5ci\omega}{3} \times 2^{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}, B(q, \bar{q}) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \times 2^{\frac{2}{3}} \\ -\frac{c}{3} \times 2^{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

且

$$C(q, q, \bar{q}) = \begin{pmatrix} -\frac{25}{9} - \frac{25i\omega}{9} \\ -\frac{25c}{9} + \frac{25ci\omega}{9} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

由(8), (9), (10), 可得

$$\begin{aligned} g_{20} &= \langle p, B(q, q) \rangle = -\frac{5}{3} \times 2^{\frac{2}{3}} + \frac{5i\omega}{3} - \frac{ic}{3} \times 2^{\frac{1}{3}} + \frac{5^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} c}{3}, \\ g_{11} &= -\frac{5}{3} \times 2^{\frac{2}{3}} - \frac{ic}{3} \times 2^{\frac{1}{3}}, g_{21} = -\frac{27}{16} - \frac{27}{8}i\omega + \frac{9\sqrt{3}ci}{16\omega} - \frac{9\sqrt{3}c}{8}. \end{aligned}$$



**Figure 1.** Stable limit cycle phase diagram of bifurcation from equilibrium point, bifurcation parameter is  $s = 0.734, c = 1$

**图 1.** 从平衡点  $E(x^*, y^*)$  分岔出的稳定的极限环相图, 其中分岔参数为  $s = 0.734, c = 1$

我们可以计算参数在  $s = s_0 = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}} c$  时的平衡点  $E$  的第一 Lyapunov 系数为

$$l_1(s_0) = \frac{1}{2\omega^2} \operatorname{Re}(ig_{20}g_{11} + \omega g_{21}) = -\frac{5^{\frac{2}{3}}c}{18\omega^3} < 0,$$

则  $E(s_0)$  为一阶细焦点, 所以, 当  $s < s_0$  时, 从平衡点  $E(x^*, y^*)$  分岔出一个稳定的极限环, 参看图 1。

## 基金项目

国家自然科学基金项目(11561019); 中央高校基本科研业务费专项资金资助(2012017yjsy141)。

## 参考文献

- [1] Ajraldi, V., Pittavino, M. and Venturino, E. (2011) Modeling Herd Behavior in Population Systems. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **12**, 2319-2338. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.02.002>
- [2] Braza, P.A. (2012) Predator-Prey Dynamics with Square Root Functional Responses. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **13**, 1837-1843. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.12.014>
- [3] Kuznetsov, Y.A. (2004) *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3978-7>
- [4] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 董镇喜, 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1981.
- [5] 张伟年, 杜正东, 徐冰, 常微分方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

**知网检索的两种方式：**

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：[aam@hanspub.org](mailto:aam@hanspub.org)