

The Application of the Invariant Region

Jing Wang

School of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing
Email: 18810928979@163.com

Received: Jun. 19th, 2018; accepted: Jul. 11th, 2018; published: Jul. 18th, 2018

Abstract

The invariant region is an important theory for reaction-diffusion equation. It can be used to prove the global existence theorem and study the long time behavior of the solution, so it can provide proper theoretical basis and framework. In this paper, we study how to find the invariant region by the three-level food chain model, two-ploy autocatalytic chemical polymer model and Gray-Scott model which are very significant model in the field of ecology and chemistry.

Keywords

Reaction-Diffusion Equations, The Invariant Region

不变区域的应用

王 静

华北电力大学数理学院, 北京
Email: 18810928979@163.com

收稿日期: 2018年6月19日; 录用日期: 2018年7月11日; 发布日期: 2018年7月18日

摘 要

不变区域是研究反映扩散方程的一个重要理论。可以用来证明整体存在性定理, 并且为研究解的长时间渐进行为提供合理的理论基础和框架。三级食物链模型、二聚自催化化学聚合物模型和Gray-Scott模型是生态学和化学领域非常重要的模型。本文主要研究如何找出以上系统的不变区域。

关键词

反应扩散方程, 不变区域

Copyright © 2018 by author and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文考虑一个反映扩散系统:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon Dv_{xx} + Mv_x + f(v, t), (x, t) \in \Omega \times R_+ \\ v(x, 0) = v_0(x), x \in \Omega \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\varepsilon > 0$, Ω 是 R 中的开区间, $D = D(v, x)$ 和 $M = M(v, x)$, 是定义在开子集 $U \times V \subset R^n \times \Omega$ 上的矩阵值函数, $D \geq 0$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ 是从 $U \times R_+$ 到 R^n 的光滑映射。

我们先来看一下不变区域的定义(见文献[1] [2] [3] [4])。

定义 1: 闭集 $\Sigma \subset R^n$ 称为(1)的局部解的(正)不变区域, 如果 $v(x, t)$ 的初值和边界均属于 Σ , 且对于 $\forall (x, t) \in \Omega \times (0, T]$, 满足 $v(x, t) \in \Sigma$ 。

其中不变区域 Σ 可由“半空间”的交集组成, 即

$$\Sigma = \bigcap_{i=1}^m \{v \in U : G_i(v) \leq 0\} \quad (2)$$

其中 $G_i(v)$ 是定义在开子集 U 上的光滑实值函数, 并且 $\nabla G_i = \left(\frac{\partial G_i}{\partial u_1}, \frac{\partial G_i}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial G_i}{\partial u_n} \right) \neq 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$ 。

通过不变区域的定义我们得到(1)的整体存在性定理(见文献[4])。

定理 1: 设 B 是可容许的巴拿赫空间, $v_0 \in B$, 对于 $\forall T > 0$, (1)的解在 $\Omega \times [0, T]$ 上有先验估计:

$$\|v_i\|_B \leq C(\|v_0\|_B)$$

即对于 $\forall T > 0$, (1)在 $\Omega \times [0, T]$ 上有解 $v(x, t) \in B$ 。证明见文献[4]。

2. 不变区域的主要内容

定义 2: 光滑函数 $G: R^n \rightarrow R$ 在 v_0 点称为是拟凸的, 若 $\eta \in R^n, dG_v(\eta) = 0$, 则推出 $d^2G_{v_0}(\eta, \eta) \geq 0$ 其

$$\text{中 } d^2G(v_0) = \left. \left(\frac{\partial^2 G}{\partial v_i \partial v_j} \right) \right|_{v=v_0}。$$

定理 2: 设 Σ 由(2)定义给出, 假设对任意 $t \in R_+$ 并且 $\forall v_0 \in \partial\Sigma$ (对于 i 有 $G_i(v_0) = 0$), 满足以下条件:

1) 对 $\forall x \in \Omega$, 在 v_0 处是 $D(v_0, x)$ 和 $D(v_0, x)$ 的左特征向量。

即存在 μ, λ 有

$$\begin{aligned} dG_i(v_0)D(v_0, x) &= \mu dG_i(v_0), \\ dG_i(v_0)M(v_0, x) &= \lambda dG_i(v_0). \end{aligned}$$

2) 如果 $dG_iD(v_0, x) = \mu dG_i$, $\mu \neq 0$, 则 G_i 在 v_0 点是拟凸的。

3) 对 $\forall t \in R_+$ 在 v_0 点 $dG_i(f) < 0$ 。

则对于每一个 $\varepsilon > 0$, Σ 是(1)的不变区域。

此定理证明见文献[1]。

定义 3: 称方程组的初边值问题(1)是 f 稳定的, 如果对于 f 的任意函数列 $\{f_i\}$, 只要在有界闭集 $\Omega \subset R^n$

上, f_i 一致收敛于 f , $\frac{\partial f_i}{\partial v}$ 一致收敛于 $\frac{\partial f}{\partial v}$, 那么 v 存在时, 当 $l \rightarrow \infty$ 时, v_l 也存在。同时在 Ω 的稠密集上, 存在 v_l 的子列收敛到 v 。其中 v_l 和 v 分别是问题(1)对应于 f_i 和 f 的解。

注: 如果方程组(1)是 f 稳定的, 我们可以将定理 2 的条件 3)放宽至:

3) 对 $\forall t \in R_+$ 在 v_0 点 $dG_t(f) \leq 0$ 。

其他条件不变, 则定理 1 仍成立。

推论 1: 假设 D 和 M 都是对角矩阵, 并且 Σ 满足下面式子:

$$\Sigma = \bigcap_{i=1}^n \{v : a_i \leq v_i \leq b_i\} \tag{3}$$

还需满足定理 1 中的条件 3), 即 f 在 $\partial\Sigma$ 处指向 Σ 内部, 则对于 $\forall \varepsilon > 0$, (3)是方程组(1)的不变区域。

下面给出应用不变区域的例子, 并且通过定理 1 研究解的整体存在性。

例 1: 三级食物链模型

实物 A 为昆虫或者植物, 中级猎物 B 为食饵或鸟类, 和高级猎物 C, 且 B 只吃 A, C 只吃 B, 没有 B, C 将死掉, 没有 A, B 和 C 都死掉, 记 u, v, w 分别是 A, B, C 的分布密度, 则三级食物链反应扩散方程为:

$$\begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + u(1-u) - \frac{c_1 uv}{v+u} \\ v_t = d_2 \Delta v + \frac{m_1 uv}{v+u} - b_1 v - \frac{c_2 v \omega}{\omega+v} \\ \omega_t = d_3 \Delta \omega + \frac{m_2 v \omega}{v+\omega} - b_2 \omega \end{cases} \tag{4}$$

这里的所有参数都是正常数。详见文献[5]

我们令 $b_1 \geq \frac{m_1 \alpha \beta}{\alpha + \beta}$, $b_2 \geq \frac{m_2 \beta}{\gamma + \beta}$, $\alpha \leq 1$, $U = (u, v, \omega)$, $D = \text{diag}(d_1, d_2, d_3)$,

设 $f = \left[u(1-u) - \frac{c_1 uv}{v+u}, \frac{m_1 uv}{v+u} - b_1 v - \frac{c_2 v \omega}{\omega+v}, \frac{m_2 v \omega}{\omega+v} - b_2 \omega \right]$;

则(4)可写成 $U_t = D \Delta U + f(U)$ 。

由推论 1 我们设 $\Sigma = \{(u, v, \omega) : 0 \leq u \leq \alpha, 0 \leq v \leq \beta, 0 \leq \omega \leq \gamma\}$, 下面证 Σ 是不变区域。

则

$G = -u$, $\nabla G(f)|_{u=0} = -1 \cdot 0 = 0$, 在 Σ 内部, 所以有 $u \geq 0$;

$G = -v$, $\nabla G(f)|_{v=0} = -1 \cdot 0 = 0$, 在 Σ 内部, 所以有 $v \geq 0$;

$G = -\omega$, $\nabla G(f)|_{\omega=0} = -1 \cdot 0 = 0$, 在 Σ 内部, 所以有 $\omega \geq 0$;

$G = u - \alpha$, $\nabla G(f)|_{u=\alpha} = \alpha(1-\alpha) - \frac{c_1 \alpha u}{v+u} \leq \alpha(1-\alpha) \leq 0$, 在 Σ 内部, 所以有 $u \leq \alpha$;

$G = \omega - p$, $\nabla G(f)|_{\omega=p} = \frac{m_2 v p}{p+v} - b_2 p \leq \frac{m_2 p \beta}{\beta+p} - b_2 p \leq 0$, 在 Σ 内部, 所以有 $\omega \leq p$;

$G = v - \beta$, $\nabla G(f)|_{v=\beta} = \frac{m_1 v \beta}{u+\beta} - b_1 \beta - \frac{c_2 \beta w}{w+\beta} \leq \frac{m_1 u \beta}{u+\beta} - b_1 \beta \leq 0$, 在 Σ 内部, 所以有 $v \leq \beta$ 。

综上可知, Σ 是不变区域。因此由定理 1 可知只要初值在可容许的巴拿赫空间内, 可以得到三级食物链模型解的整体存在性, 因此通过构造任意大的区域, 当初值不同时, 可以分析各个物种生存情况。

例 2: 二聚自催化化学聚合物模型

A 为 M 的同分异构体, M 为单体, R_j 为传播者, P 是表示二聚物, 则反映扩散模型为:

$$\begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + a + hu - vu - \frac{\beta u}{u+m} \\ v_t = d_2 \Delta v + k(u-v) \end{cases} \quad (5)$$

其中 $a, b, \beta, m, k, d_1, d_2$ 是正参数, 变量 u, v 表示浓度或密度。详见文献[6]

下面证明此反应扩散方程有不变区域。

证明: 设 $p \leq q$, $a \leq pq - hp - \frac{\beta p}{p+m}$, $U = (u, v)$, $D = \text{diag}(d_1, d_2)$,

$$f = \left[a + hu - vu - \frac{\beta u}{u+m}, k(u-v) \right].$$

则(5)可写成 $U_t = D\Delta U + f(U)$ 。由推论 1 可知, 我们设

$$\Sigma = \{(u, v) | 0 \leq u \leq p, 0 \leq v \leq q\}.$$

接下来我们证 Σ 是不变区域。

$G = -u$, $\nabla G(f)|_{u=0} = -a \leq 0$, 在 Σ 内部, 所以有 $u \geq 0$;

$G = -v$, $\nabla G(f)|_{v=0} = -ku \leq 0$, 在 Σ 内部, 所以有 $v \geq 0$;

$G = u - p$, $\nabla G(f)|_{u=p} = a + hp - vp - \frac{\beta p}{p+m} \leq 0$, 在 Σ 内部, 所以有 $u \leq p$;

$G = v - p$, $\nabla G(f)|_{v=q} = k(u - q) \leq k(p - q) \leq 0$, 在 Σ 内部, 所以有 $v \leq q$ 。

综上, 由定理 2 可知 Σ 是不变区域。同样二聚自催化化学聚合物模型也可以通过构造任意大的区域来研究两种浓度(密度), 只要初值在可容许的巴拿赫空间内, 由定理 1 可知(5)的整体解存在, 因此可以通过改变反应物量的多少来研究其产生的化学现象。

例 3: Gray-Scott 模型

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = d_1 \Delta u_1 - u_1 u_2^2 + b(1 - u_1) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = d_2 \Delta u_2 + u_1 u_2^2 - (b + a)u_2 \end{cases} \quad (6)$$

u_1, u_2 代表两种反应物的反映浓度, d_1, d_2 为 u_1, u_2 的扩散系数, 第一步的反应速率为 1, 第二步的反应速率为 a , b 为反应物输入反应容器的流速。详见文献[7]。

下面证明此系统有不变区域。

证明: 设 $\alpha\beta \leq b + a$, $\alpha \leq 1$, $U = (u_1, u_2)$, $D = (d_1, d_2)$,

$$f = \{-u_1 u_2^2 + b(1 - u_1), u_1 u_2^2 - (b + a)u_2\}.$$

则(6)可写为 $U_t = D\Delta U + f(U)$ 。由推论 1, 我们设

$$\Sigma = \{(u_1, u_2) | 0 \leq u_1 \leq \alpha, 0 \leq u_2 \leq \beta\}.$$

$G = -u_1$, $\nabla G(f)|_{u_1=0} = -b < 0$, 在 Σ 内部, 所以有 $u_1 \geq 0$;

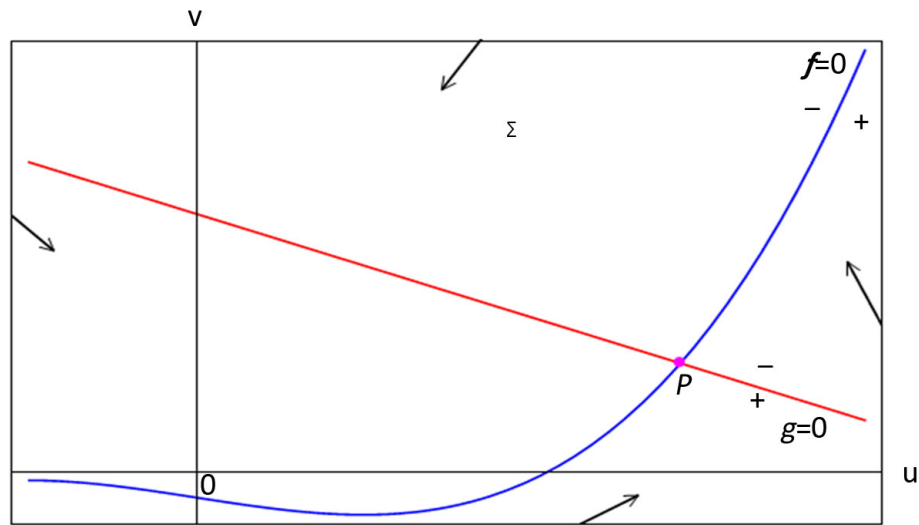


Figure 1. v phase plane
图 1. v 的相平面图

$G = -u_2$, $\nabla G(f)|_{u_2=0} = 0$, 在 Σ 内部, 所以有 $u_2 \geq 0$;
 $G = u_1 - \alpha$, $\nabla G(f)|_{u_1=\alpha} = -\alpha u_2^2 + b(1-\alpha) \leq 0$, 在 Σ 内部, 所以有 $u_1 \leq \alpha$;
 $G = u_2 - \beta$, $\nabla G(f)|_{u_2=\beta} = u_1 \beta^2 - (b+a)\beta \leq \alpha \beta^2 - (b+a)\beta = \beta[\alpha\beta - (b+a)] \leq 0$, 在 Σ 内部, 所以有 $u_2 \leq \beta$;

综上所述, Σ 是不变区域。

例 4: (见图 1)我们考虑下面这个例子(见[8]):

$$\begin{aligned} u_t &= \varepsilon D\Delta u + f(u, v), \\ v_t &= \delta D\Delta v + g(u, v), \end{aligned} \tag{7}$$

这里 $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, 带有边界条件 $u_x(0, t) = v_x(0, t) = 0$, 很容易得出 Σ 是(7)不变区域, 我们取 $f(u, v) = -\frac{1}{3}u^3 + u + v + \alpha$, $g(u, v) = -\beta u + v$, 其中 α, β 为常数, 方向向量 $V = (f(u, v), g(u, v))$, “+”和“-”代表 V 中各自函数在它们零集合边上的符号。从图中我们能看出 V 在 $\partial\Sigma$ 指向 Σ 的内部。因此我们可以构造任意大的矩形区域来研究当初值位于可容许的巴拿赫空间时, (7)的整体解的存在性, 随着 f 的增加, g 的量在减小, 从图中我们也可以看出, 在 p 点两种量达到平衡。

3. 结语

通过这几个例子, 我们可以看出, 以上四个模型具有不变区域, 之后可以通过构造任一大的不变区域来研究解的整体存在性, 从而更好的分析初值在此区域的发展趋势, 对于研究生物和化学方面的规律有一定的作用。

参考文献

- [1] Smoller, J. (1999) Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. 2nd Edition, Springer, New York.
- [2] Chueh, K., Conleg, C. and Smoller, J. (1977) Positively Invariant Regions for Systems of Nonlinear Diffusion Equations. *Indiana University Mathematics Journal*, **26**, 373-392. <https://doi.org/10.1512/iumj.1977.26.26029>
- [3] Rothe, F. (1981) Global Existence of Branches of Stationary Solutions for a System of Reaction Diffusion Equations from Biology. *Nonlinear Analysis*, **5**, 487-498. [https://doi.org/10.1016/0362-546X\(81\)90097-3](https://doi.org/10.1016/0362-546X(81)90097-3)

-
- [4] 叶其孝, 李正元. 反应扩散方程引论[M]. 北京: 科学出版社, 1990.
- [5] 陈文彦, 王明新. 一个与比值有关的三级食物链反应扩散模型的定性分析[J]. 江苏大学学报, 2004, 25(2): 137-140.
- [6] 王雅芳. 一类带扩散的自催化化学反应模型的定性分析[D]: [硕士学位论文]. 天津: 天津大学, 2013: 1-27.
- [7] 侯智博. Gray-Scott 模型的动态分歧分析[J]. 乐山师范学院学报, 2010, 25(12): 1-4.
- [8] Conway, E., Hoff, D. and Smoller, J. (1978) Large Time Behavior of Solutions of Systems of Nonlinear Reaction-Diffusion Equations. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 35, 1-16. <https://doi.org/10.1137/0135001>

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2324-7991, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>
期刊邮箱: aam@hanspub.org