Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2018, 7(7), 962-969**
Published Online July 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.77113

The First Integral Method for Solving Exact Solutions of Two Nonlinear Schrodinger Equations

Qingmei Zhang, Mei Xiong, Longwei Chen*

College of Statistics and Mathematics, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming Yunnan
Email: 1477273038@qq.com, clwxmff@163.com, *tc715@sina.com

Received: Jul. 5th, 2018; accepted: Jul. 23rd, 2018; published: Jul. 30th, 2018

Abstract

The first integral method proposed by Feng is very reliable integral method for solving nonlinear partial differential equations, which is based on the ring theory of commutative algebra. In this paper, exact travelling wave solutions of the generalized nonlinear Schrodinger equation and the high order dispersion nonlinear Schrodinger equation are studied by using the first integral method. By introducing the travelling wave transformations, two nonlinear Schrodinger equations have been transformed into ordinary differential equations. Then according to the division theorem of polynomial, exact travelling wave solutions of two nonlinear Schrodinger equations are obtained.

Keywords

The First Integral Method, The Generalized Nonlinear Schrodinger Equation, The High Order Dispersion Nonlinear Schrodinger Equation, Travelling Wave Solutions

基于首次积分法求解两个非线性薛定谔方程的精确解

张清梅，熊　梅，陈龙伟*

云南财经大学，统计与数学学院，云南　昆明
Email: 1477273038@qq.com, clwxmff@163.com, *tc715@sina.com

收稿日期：2018年7月5日；录用日期：2018年7月23日；发布日期：2018年7月30日

*通讯作者。

文章引用: 张清梅, 熊梅, 陈龙伟. 基于首次积分法求解两个非线性薛定谔方程的精确解[J]. 应用数学进展, 2018, 7(7): 962-969. DOI: 10.12677/aam.2018.77113

摘 要

首次积分方法是由冯第一个提出的对非线性偏微分方程进行可靠处理的积分方法，该方法是基于交换代数环的理论。本文将利用首次积分法对广义非线性薛定谔方程和高阶色散非线性薛定谔方程的精确行波解进行研究。即先通过引入恰当的行波变换，将非线性薛定谔方程化为常微分方程，再根据多项式除法原理，得到两个非线性薛定谔方程的精确行波解。

关键词

首次积分方法，广义非线性薛定谔方程，高阶色散非线性薛定谔方程，行波解

1. 引言

非线性现象出现在各种各样的科学应用中，如等离子体物理、固态物理、流体动力学等。为了更好地理解这些非线性现象，许多数学家和物理学家都在努力寻找其精确解，运用这些精确解可以预测和解释一些重要的物理现象。所以非线性偏微分方程(PDE)在物理现象研究中起着重要的作用。近年来，许多方法被用来寻找非线性 PDE 的解，其中一种方法被称为首次积分法，首次积分法是基于交换代数环的理论，由 Feng [1]第一个提出的对非线性 PDE 进行可靠处理，并由他自己进一步发展了这个理论[2] [3] [4]。这一方法已被许多学者应用于解决在科学和工程中遇到的不同的偏微分方程模型[5] [6] [7]。为了得到非线性 PDE 更丰富的精确解，前人提出了如下这些方法，如 tanh-sech 函数法[8]，雅可比椭圆函数展开法[9]，F 展开法[10]，指数函数法[11]，Hirota 双线性法[12]，动力系统分岔理论[13]等等。

在本文中，我们将考虑如下广义非线性薛定谔方程[14]和高阶色散非线性薛定谔方程[15]：

$$iu_t - r_2 u_{xx} + c_3 |u|^2 u = i\left[\left(s_0 + s_2 |u|^2\right)u\right]_x - c_5 |u|^4 u, \tag{1}$$

和

$$iq_t - aq_{xx} - bq_{xxxx} + c\left(|q|^2 + d|q|^4\right)q = 0. \tag{2}$$

这里 $r_2, c_3, c_5, s_0, s_2, a, b, c, d$ 为实常数， u, q 为复函数。

2. 首次积分法的基本介绍

考虑一个如下典型的非线性 PDE

$$P\left(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}, u_{xxx}, \cdots\right) = 0. \tag{3}$$

为了将方程(3)化为常微分方程(ODE)，我们介绍这个变换

$$u(x,t) = u(\xi), \xi = x - ct. \tag{4}$$

其中 c 是常数。

$$\frac{\partial}{\partial t}(.)=-c\frac{\partial}{\partial \xi}(.),\frac{\partial}{\partial x}(.)=\frac{\partial}{\partial \xi}(.),\frac{\partial^2}{\partial t^2}(.)=c^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(.),\cdots \tag{5}$$

步骤 1：通过上述变换可将 PDE 转换为如下 ODE 形式

$$Q\left(u,u_{\xi},u_{\xi\xi},\cdots\right)=0. \tag{6}$$

步骤 2：假设这里的 ODE(6)能被写成

$$u(x,t)=u(\xi). \tag{7}$$

步骤 3：现在我们引入一个新的独立变量，即

$$X(\xi)=u(\xi),Y(\xi)=u_{\xi}(\xi). \tag{8}$$

并给出了 ODE 的系统

$$\begin{cases}X_{\xi}(\xi)=Y(\xi),\\ Y_{\xi}(\xi)=F\left(X(\xi),Y(\xi)\right).\end{cases} \tag{9}$$

步骤 4：根据常微分方程的定性理论[16]。如果我们能在相同条件下找到方程(9)的积分，那么方程(9)的解就可以直接得到。但是，目前还没有一个系统的理论告诉我们如何去找到首次积分，因此我们将运用除法原理去寻找方程(9)的首次积分，它将会减少常微分方程(6)的一阶积分。通过解这个方程可以得到方程(3)的精确解。现在，我们来介绍除法原理。

定理(除法原理)：设 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 为两个变量 x 和 y 在域 $C(x,y)$ 中的多项式，并令 $P(x,y)$ 在 $C(x,y)$ 中不可约。如果 $Q(x,y)$ 在所有零点 $G(x,y)$ 上可约，那么在 $C(x,y)$ 中存在一个多项式 $G(x,y)$，使得 $Q(x,y)=P(x,y)G(x,y)$。

3. 应用

在这一节中，我们将利用首次积分法来详细求解两个非线性薛定谔方程的精确解。

首先我们考虑方程(1)。假设方程(1)的解满足如下形式

$$u(x,t)=\varphi(\xi)\mathrm{e}^{i(x-\omega t)}. \tag{10}$$

其中 $\xi=x-\lambda t$，这里 λ,ω 是实参数。

将方程(10)代入(1)中，并令虚部和实部分别为零，整理可得

$$\left(2r_2-\lambda-s_0\right)\varphi'-3s_2\varphi^2\varphi'=0, \tag{11}$$

$$r_2\varphi''+\left(\omega+s_0-r_2\right)\varphi-\left(c_3+s_2\right)\varphi^3+c_5\varphi^5=0. \tag{12}$$

将方程(11)积分一次代入(12)得

$$\varphi''+\frac{\omega+r_2-\lambda}{r_2}\varphi+\frac{c_3}{r_2}\varphi^3+\frac{c_5}{r_2}\varphi^5=0. \tag{13}$$

为了计算简便，我们定义：$k_1=-\dfrac{\omega+r_2-\lambda}{r_2}$，$k_2=-\dfrac{c_3}{r_2}$ 及 $k_3=-\dfrac{c_5}{r_2}$。

根据方程(13)和(8)我们得

$$\begin{cases}X'(\xi)=Y(\xi),\\ Y'(\xi)=k_1X(\xi)+k_2X(\xi)^3+k_3X(\xi)^5.\end{cases} \tag{14}$$

其次，我们考虑方程(2)。假设方程(2)的解满足如下形式

$$q(x,t)=\phi(\xi)\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}. \tag{15}$$

其中 $\xi=\beta x-\lambda t$，这里 β,λ,k,ω 是实参数。

将方程(15)代入(2)中，并令虚部和实部为零，整理可得

$$-4bk\beta^3\phi''+\left(-\lambda+2a\beta k+4b\beta k^3\right)\phi'=0. \tag{16}$$

$$-b\beta^4\phi^{(4)}+\left(a\beta^2+b\beta^2k^2\right)\phi''+\left(\omega-ak^2-bk^4\right)\phi+c\phi^3+dc\phi^5=0. \tag{17}$$

对(16)微分一次代入(17)中，令 $p_1=-\lambda+2a\beta k+4b\beta k^3, p_2=a\beta^2+b\beta^2k^2, p_3=\omega-ak^2-bk^4$。则

$$\phi''-\frac{4bkp_3\beta^3}{p_1b\beta^4-4p_2bk\beta^3}\phi-\frac{4bck\beta^3}{p_1b\beta^4-4p_2bk\beta^3}\phi^3-\frac{4bcdk\beta^3}{p_1b\beta^4-4p_2bk\beta^3}\phi^5=0. \tag{18}$$

根据方程(18)和(8)我们得

$$\begin{cases}X'(\xi)=Y(\xi),\\ Y'(\xi)=\dfrac{4bkp_3\beta^3}{p_1b\beta^4-4p_2bk\beta^3}X(\xi)+\dfrac{4bck\beta^3}{p_1b\beta^4-4p_2bk\beta^3}X(\xi)^3+\dfrac{4bcdk\beta^3}{p_1b\beta^4-4p_2bk\beta^3}X(\xi)^5.\end{cases} \tag{19}$$

这里如果我们仍然定义

$k_1=\dfrac{4bkp_3\beta^3}{p_1b\beta^4-4p_2bk\beta^3}, k_2=\dfrac{4bck\beta^3}{p_1b\beta^4-4p_2bk\beta^3}, k_3=\dfrac{4bcdk\beta^3}{p_1b\beta^4-4p_2bk\beta^3}$ 方程(19)和(14)有相同的首次积分，要找到它们的精确解，我们仅需讨论其中一个方程即可，下面我们将给出对方程(14)的求解过程。

现在，根据除法原理，我们假设 $X=X(\xi)$ 和 $Y=Y(\xi)$ 是方程(14)的非平凡解。且

$$P(X,Y)=\sum_{i=0}^{m}a_i(X)Y^i. \tag{20}$$

在复数域 $C(X,Y)$ 中是一个不可约多项式，即

$$P(X(\xi),Y(\xi))=\sum_{i=0}^{m}a_i(X(\xi))Y(\xi)^i=0. \tag{21}$$

这里 $a_i(X)(i=1,2,\cdots,m)$ 是 X 的多项式以及 $a_m(X)\neq 0$。方程(21)称为(14)的首次积分。定义 $P(X(\xi),Y(\xi))$ 关于 X 和 Y 的多项式，且 $\left.\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\xi}\right|_{(20)}=0$。根据除法定理，我们可以看到在复数域 $C(X,Y)$ 中存在一个多项式 $H(X,Y)=h(X)+g(X)Y$，使得

$$\left.\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\xi}\right|_{(20)}=\left.\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}X}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\xi}+\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Y}\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\xi}\right)\right|_{(20)}=\left(h(X)+g(X)Y\right)\left(\sum_{i=0}^{m}a_i(X)Y^i\right). \tag{22}$$

3.1. 情形一

在方程(21)中我们假设 $m=1$，即方程(22)可以被写成

$$\sum_{i=0}^{1}a_i'(X)Y^{i+1}+\sum_{i=0}^{1}ia_i(X)Y^{i-1}\left(Y'(\xi)\right)=\left(h(X)+g(X)Y\right)\left(\sum_{i=0}^{1}a_i(X)Y^i\right). \tag{23}$$

然后，在方程(23)中通过比较两边 $Y^i(i=2,1,0)$ 的系数，我们得到

$$a_1'(X)=g(X)a_1(X), \tag{24}$$

$$a_0'(X)=h(X)a_1(X)+g(X)a_0(X), \tag{25}$$

$$a_1(X)\left(k_1X+k_2X^3+k_5X^5\right)=h(X)a_0(X). \tag{26}$$

因为 $a_i(x)(i=0,1)$ 是 X 的一个多项式，从方程(24)中我们得出 $a_1(X)$ 是一个常数，且 $g(X)=0$。为了便于计算，我们令 $a_1(X)=1$。平衡 $h(X)$ 和 $a_0(X)$ 的阶数，我们得出 $\deg(h(x))=2$。假设 $h(X)=AX^2+BX+C$，这里的 $A\neq 0$，那么

$$a_0(X)=\frac{1}{3}AX^3+\frac{1}{2}BX^2+CX+D. \tag{27}$$

其中 D 是任意的积分常数。将 $a_0(X),a_1(X),h(X)$ 代入方程(26)中，通过比较系数得到如下代数方程组

$$\begin{cases}\frac{1}{3}A^2=k_3\\ \frac{5}{6}AB=0\\ \frac{4}{3}AC+\frac{1}{2}B^2=k_2\\ AD+\frac{3}{2}BC=0\\ BD+C^2=k_1\\ CD=0\end{cases} \tag{28}$$

用 Maple 求解它们，可得到

$$D=0,B=0,A=\pm\sqrt{3k_3},C=\pm\sqrt{k_1}, \tag{29}$$

这里 $k_1,k_3<0$ 且满足约束条件

$$k_1k_3=\frac{3}{16}k_2^2. \tag{30}$$

把条件(29)代入(21)中，得

$$Y=-\frac{1}{3}AX^3-CX. \tag{31}$$

再由方程(8)有

$$\varphi'(\xi)=-\frac{1}{3}A\varphi(\xi)^3-C\varphi(\xi). \tag{32}$$

为了求解(32)的解，我们引入伯努利方程[17]有

$$Z'=aZ+bZ^p, \tag{33}$$

这里 $a,b,p\in R,ab\neq 0,p\neq 1$。则方程(33)有如下形式的解

$$Z(\xi)=\left[\frac{-a/b}{\xi_0\mathrm{e}^{a(1-p)}+1}\right]^{\frac{1}{p-1}}, \tag{34}$$

$$
=\begin{cases}\left\{\dfrac{-a}{2b}\left[1+\tanh\left(\dfrac{a(p-1)}{2}\xi-\dfrac{\ln\xi_0}{2}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{p-1}} & \text{if } \xi_0>0,\\ \left\{\dfrac{-a}{2b}\left[1+\coth\left(\dfrac{a(p-1)}{2}\xi-\dfrac{\ln(-\xi_0)}{2}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{p-1}} & \text{if } \xi_0<0,\\ \left\{\dfrac{-a}{b}\right\}^{\frac{1}{p-1}} & \text{if } \xi_0=0.\end{cases} \tag{35}
$$

这里 ξ_0 为任意常数。令 $a=-C,b=-\dfrac{1}{3}A,p=3$ 代入方程(35)中有

$$
u(\xi)=\begin{cases}\left\{\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3k_1}{k_3}}\left[1+\tanh\left(\sqrt{k_1}\xi-\dfrac{\ln\xi_0}{2}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}} & \text{if } \xi_0>0,\\ \left\{\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3k_1}{k_3}}\left[1+\coth\left(\sqrt{k_1}\xi-\dfrac{\ln(-\xi_0)}{2}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}} & \text{if } \xi_0<0,\\ \left\{\pm\sqrt{\dfrac{3k_1}{k_3}}\right\}^{\frac{1}{2}} & \text{if } \xi_0=0.\end{cases} \tag{36}
$$

则广义非线性薛定谔方程(1)的行波解可写为

$$
u(x,t)=\begin{cases}\left\{\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3k_1}{k_3}}\left[1+\tanh\left(\sqrt{k_1}(x-\lambda t)-\dfrac{\ln\xi_0}{2}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{(x-\omega t)} & \text{if } \xi_0>0,\\ \left\{\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3k_1}{k_3}}\left[1+\coth\left(\sqrt{k_1}(x-\lambda t)-\dfrac{\ln(-\xi_0)}{2}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{(x-\omega t)} & \text{if } \xi_0<0,\\ \left\{\pm\sqrt{\dfrac{3k_1}{k_3}}\right\}^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{(x-\omega t)} & \text{if } \xi_0=0.\end{cases} \tag{37}
$$

3.2. 情形二

在方程(21)中我们假设 $m=2$，通过比较两边 $Y^i\,(i=2,1,0)$ 系数，我们得到

$$a_2'(X)=g(X)a_2(X), \tag{38}$$

$$a_1'(X)=h(X)a_2(X)+g(X)a_1(X), \tag{39}$$

$$a_0'(X)+2a_2(X)\left(k_1X+k_2X^3+k_5X^5\right)=h(X)a_1(X)+g(X)a_0(X), \tag{40}$$

$$a_1(X)\left(k_1X+k_2X^3+k_5X^5\right)=h(X)a_0(X). \tag{41}$$

因为 $a_i(x)(i=0,1,2)$ 是 X 的一个多项式，从方程(38)中我们得出 $a_2(X)$ 是一个常数，且 $g(X)=0$。为了便于计算，我们令 $a_2(X)=1$。平衡 $h(X),a_1(X)$ 和 $a_0(X)$ 的阶数，我们得出 $\deg(h(x))=2$，

$\deg\left(a_1(x)\right)=3$，$\deg\left(a_0(x)\right)=6$。假设 $h(X)=AX^2+BX+C$，这里的 $A\neq 0$，那么

$$a_1(X)=\frac{1}{3}AX^3+\frac{1}{2}BX^2+CX+D. \tag{42}$$

$$\begin{aligned}a_0(X)=&\left(\frac{1}{18}A^2-\frac{1}{3}k_3\right)X^6+\left(\frac{1}{6}AB\right)X^5+\left(\frac{1}{3}AC+\frac{1}{8}B^2+\frac{1}{2}k_2\right)X^4\\&+\left(\frac{1}{3}AD+\frac{1}{2}BC\right)X^3+\left(\frac{1}{2}BD+\frac{1}{2}C^2-k_1\right)X^2+DCX+E.\end{aligned} \tag{43}$$

其中 D 是任意的积分常数。将 $a_0(X),a_1(X),a_2(X),h(X)$ 代入方程(41)中，通过比较系数得到如下代数方程组

$$\begin{cases}\frac{1}{18}A^3=\frac{2}{3}Ak_3\\ \frac{2}{9}A^2B=\frac{5}{6}Bk_3\\ \frac{7}{18}A^2C+\frac{7}{24}AB^2=\frac{5}{6}Ak_2+\frac{4}{3}Ck_3\\ \frac{1}{3}A^2D+ABC+\frac{1}{8}B^2=Bk_2+Dk_3\\ \frac{7}{6}ABD+\frac{5}{6}AC^2+\frac{1}{8}B^2C=\frac{4}{3}Ak_1+\frac{3}{2}Ck_2\\ \frac{4}{3}ACD+\frac{1}{2}DB^2+BC^2=\frac{3}{2}Bk_1+2Dk_2\\ \frac{3}{2}BCD+\frac{1}{2}C^2+AE=2Ck_1\\ DC^2+BE=Dk_1\\ EC=0,\end{cases} \tag{44}$$

用 Maple 求解它们，可得到

$$D=0,B=0,A=\pm 2\sqrt{3k_3},C=\pm 2\sqrt{k_1}, \tag{45}$$

这里 $k_1,k_3<0$ 且满足约束条件

$$k_1k_3=\frac{3}{16}k_2^2. \tag{46}$$

把条件(37)代入(21)中，得

$$Y=-\frac{1}{6}AX^3-\frac{1}{2}CX. \tag{47}$$

再由方程(8)有

$$\varphi'(\xi)=-\frac{1}{6}A\varphi(\xi)^3-\frac{1}{2}C\varphi(\xi). \tag{48}$$

同理，令 $a=-\frac{1}{2}C,b=-\frac{1}{6}A,p=3$ 代入方程(34)和(35)中，则方程(48)和(32)有相同的精确解。

4. 总结

在本文中，首次积分法成功地求解了广义非线性薛定谔方程和高阶色散非线性薛定谔方程，丰富了

其解空间。与其他方法不同的是，它是求解精确行波解的一种有效的方法，即我们可以轻松地借助计算机软件完成其复杂的代数计算，从而得到了更精确的行波解，因此，该方法可以推广到求解更多非线性偏微分方程的精确解。

参考文献

[1] Feng, Z.S. (2002) The First Integral Method to Study the Burgers Korteweg-de Vries Equation. *Physics Letters A*, **35**, 343-349. https://doi.org/10.1088/0305-4470/35/2/312

[2] Feng, Z.S. (2002) On Explicit Exact Solutions to the Compound Burgers Korteweg-de Vries Equation. *Physics Letters A*, **293**, 57-66. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(01)00825-8

[3] Feng, Z.S. (2008) Travelling Wave Behavior for a generalized Fisher Equation. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, **38**, 481-488. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.11.031

[4] Feng, Z.S. and Knobel, R. (2007) Travelling Waves to a Burgers Korteweg-de Vries Equation with Higher Order Nonlinearities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **328**, 1435-1450. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.05.085

[5] Abdoon, M.A. (2015) Programming First Integral Method General Formula for the Solving Linear and Nonlinear Equations. *Applied Mathematics*, **6**, 568-575. https://doi.org/10.4236/am.2015.63051

[6] Seadawy, A. and Sayed, A. (2017) Soliton Solutions of Cubic-Quintic Nonlinear Schrodinger and Variant Boussinesq Equations by the First Integral Method. *Filomat*, **214**, 4199-4208. https://doi.org/10.2298/FIL1713199S

[7] Ibrahim, S. and El-Ganaini, A. (2007) The First Integral Method to the Nonlinear Schrodinger Equations in Higher Dimensions. *Abstract and Applied Analysis*, **18**, 1187-1197.

[8] Ma, W.X. (1993) Travelling Wave Solutions to a Seventh Order Generalized KdV Equation. *Physics Letters A*, **180**, 221-224. https://doi.org/10.1016/0375-9601(93)90699-Z

[9] Liu, S., Fu, Z., Liu, S.D. and Zhao, Q. (2001) Jacobi Elliptic Function Expansion Method and Periodic Wave Solutions of Nonlinear Wave Equations. *Physics Letters A*, **289**, 69-74. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(01)00580-1

[10] Zhang, S. (2006) The Periodic Wave Solutions for the (2 + 1) Dimensional Konopelchenko Dubrovsky Equations. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, **30**, 1213-1220. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.08.201

[11] He, J.H. and Zhang, L.N. (2008) Generalized Solitary Solution and Compacton-Like Solution of the Jaulent-Miodek Equations Using the Exp-Function Method. *Physics Letters A*, **372**, 1044-1047. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.08.059

[12] Wang, D.S. (2009) A systematic Method to Construct Hirotas Transformations of Continuous Soliton Equations and Its Applications. *Computers and Mathematics with Applications*, **58,** 146-153. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.03.077

[13] Li, Y., Shan, W.R., Shuai, T.P. and Rao, K. (2015) Bifurcation Analysis and Solutions of a Higher Order Nonlinear Schrodinger Equation. *Mathematical Problems in Engineering*, **3**, 1-10. https://doi.org/10.1155/2015/408586

[14] Geng, Y.X. and Li, J.B. (2010) Exact Explicit Traveling Wave Solutions for Two Nonlinear Schrodinger Type Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 1509-1521. https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.06.031

[15] Xu, G.Q. (2011) New Types of Exact Solutions for the Fourth-Order Disperesive Cubic-Quintic Nonlinear Schrodinger Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 5967-5971. https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.12.008

[16] Ding, T.R. and Li, C.Z. (1996) Ordinary Differential Equations. Peking University Press, Peking.

[17] Ma, W.X. and Fuchsstciner, B. (1996) A Explicit and Exact Solutions to Kolmogorov-Petrovskli-Piskunov Equation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **31**, 329-338. https://doi.org/10.1016/0020-7462(95)00064-X

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org