Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2018, 7(8), 1028-1039
Published Online August 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.78120

# The Existence of Positive Solutions for Singular Semi-Positive Non-Local Boundary Value Problems with Nonlinear Term Depending on Derivatives

**Yu Zhao, Xiujie Yu**

School of Mathematics and Statistics, Shandong Normal University, Jinan Shandong
Email: 672155899@qq.com, 1090192157@qq.com

Received: Aug. 2nd, 2018; accepted: Aug. 20th, 2018; published: Aug. 27th, 2018

## Abstract

**In this paper, we consider the singular semi-positive non-local boundary value problem**

$$\begin{cases} u''(t)+q(t)f(t,u(t),u'(t))=0, 0<t<1, \\ au(0)-bu'(0)=\alpha[u], \\ u'(1)=\beta[u], \end{cases}$$

**where $\alpha[u]=\int_0^1 u(t)\mathrm{d}A(t)$, $\beta[u]=\int_0^1 u(t)\mathrm{d}B(t)$; A and B are bounded variation functions; $a>0$, $b>0$; the nonlinear item $f:[0,1]\times(0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)\to R$ is continuous and it is allowed to change the sign. Based on the fixed point index theory, this paper studies the existence of multiple positive solutions to the above problem.**

## Keywords

**Singular Semi-Positive Non-Local Boundary Value Problem, Existence, Fixed Point Theory, Positive Solutions**

# 非线性项依赖于导数的奇异半正非局部边值问题正解的存在性

**赵　宇，于秀洁**

山东师范大学数学与统计学院，山东 济南

文章引用: 赵宇，于秀洁. 非线性项依赖于导数的奇异半正非局部边值问题正解的存在性[J]. 应用数学进展, 2018, 7(8): 1028-1039. DOI: 10.12677/aam.2018.78120

Email: 672155899@qq.com, 1090192157@qq.com

收稿日期：2018年8月2日；录用日期：2018年8月20日；发布日期：2018年8月27日

## 摘　要

**考虑奇异半正非局部边值问题**

$$\begin{cases} u''(t)+q(t)f(t,u(t),u'(t))=0, 0<t<1, \\ au(0)-bu'(0)=\alpha[u], \\ u'(1)=\beta[u], \end{cases}$$

**其中** $\alpha[u]=\int_0^1 u(t)\mathrm{d}A(t)$**，** $\beta[u]=\int_0^1 u(t)\mathrm{d}B(t)$**；** $A$**，** $B$**为有界变差函数；** $a>0$**，** $b>0$**；非线性项** $f:[0,1]\times(0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)\rightarrow R$ **是连续的，它依赖于导数** $u'$ **并且是可变号的。本文根据不动点指数理论，讨论得到对于上述问题的多个正解的存在性结果。**

## 关键词

**奇异半正非局部边值问题，存在性，不动点理论，正解**



## 1. 引言

在本文中，我们考虑右端函数带导数项的奇异半正非局部边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+q(t)f(t,u(t),u'(t))=0, 0<t<1, \\ au(0)-bu'(0)=\alpha[u], \\ u'(1)=\beta[u], \end{cases} \tag{1}$$

其中边值条件(BCs)是关于线性泛函的，并且由 Riemann-Stieltjes 积分给出：

$$\alpha[u]=\int_0^1 u(t)\mathrm{d}A(t), \beta[u]=\int_0^1 u(t)\mathrm{d}B(t),$$

并且 $A,B$ 为有界变差函数；$a>0$，$b>0$；非线性项 $f:[0,1]\times(0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)\rightarrow R$ 是连续的，它依赖于导数 $u'$ 并且是允许变号的。

2006 年，G.C.Yang 在文献[1]中讨论了奇异的 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} x''(t)+f(t,x(t))=0, 0<t<1, \\ x(0)=0=x(1). \end{cases}$$

在假设

(H1)　$f(t,x)\in C((0,1)\times(0,+\infty),(-\infty,+\infty))$， (H2) $k(t),\alpha(t),b(t)\in C((0,1),(0,+\infty)), t(1-t)k(t)\in L^1[0,1]$，

(H3) $F(x)\in C((0,+\infty),(0,+\infty)), f(t,x)\le k(t)F(x)$，

(H4)对任意 $x(t)\in C[0,1]$，且 $0<x(t)<b(t)$，有 $f(t,x(t))\ge a(t)$，

(H5) $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减下，文章运用了 Schauder 不动点定理得到上述问题的正解的存在性。

2009 年，Gennaro Infante 在文献[2]中考虑了奇异非局部边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+g(t)f(t,u(t))=0, 0<t<1,\\ u'(0)+\alpha[u]=0,\\ \sigma u'(1)+u(\eta)=\beta[u]. \end{cases}$$

假设：

(i) $g$ 为非负的 $L^1$ 函数，

(ii) $f$ 是非负的函数，且在第二个变量处是有奇异性的，

(iii) $\alpha[u],\beta[u]$ 是 $C[0,1]$ 上的有界线性泛函，并且

$$\alpha[u]=\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}A(t), \beta[u]=\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}B(t).$$

通过补充定义，将 $f$ 的定义域扩大为 $[0,1]\times[0,+\infty)$，也就是定义

$$\tilde{f}(t,u)=\begin{cases} f(t,r_1), 0\le u\le r_1;\\ f(t,u), r_1<u<r_2;\\ f(t,r_2), r_2\le u\le +\infty. \end{cases}$$

考虑算子

$$\tilde{T}u(t)=\gamma(t)\alpha[u]+\delta(t)\beta[u]+\int_0^1 k(t,s)g(s)\tilde{f}(s,u(s))\,\mathrm{d}s,$$

通过寻找算子 $\tilde{T}$ 在 $K(r_1,r_2)=\{u\in K: r_1\le u(t)\le r_2, 0\le t\le 1\}$ 中的不动点来得到边值问题的正解。

2011 年，C. Ji，D. O’Regan，B.Yan 等人在文献[3]中考虑了二阶奇异三点边值问题

$$\begin{cases} x''(t)+f(t,x(t),x'(t))=0, 0<t<1,\\ x(0)=0, x(1)=\alpha x(\eta), 0<\eta<1, 0<\alpha<1, \end{cases}$$

其中 $f(t,x,y)$ 是变号函数，并且在 $t=0, x=0, y=0$ 处可能是具有奇异性的。运用不动点指数理论，讨论并得到了正解的存在性以及不存在性。

2014 年，B.Yan，O'Regan 等人在文献[4]中讨论了非线性非局部边值问题

$$\begin{cases} -y''=q(t)f(t,y(t)), t\in(0,1),\\ y(0)=\alpha[y]=\int_0^1 (y(s))^{\alpha}\,\mathrm{d}A(s),\\ y(1)=\beta[y]=\int_0^1 (y(s))^{\beta}\,\mathrm{d}B(s), \end{cases}$$

其中 $a\ge 0, b\ge 0$。通过不动点指数和混合单调方法，得到带非线性积分边值条件的奇异非局部边值问题的多个正解的存在和唯一性结果，这里的非线性项 $f$ 可能是奇异的并且可以变号。

2014 年，Zima 在文献[5]中考虑了

$$\begin{cases} u''(t)+f(t,u(t),u'(t))=0, t\in[0,1],\\ au(0)-bu'(0)=\alpha[u],\\ u'(1)=\beta[u]. \end{cases}$$

作者假设：(i) $a>0,b>0$，(ii) $f$ 在 $[0,1]\times(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上连续且非负的，考虑 $f$ 在空间变量的 0 值处有奇异性，也就是 $f$ 可能在第二个变量 $u=0$ 和第三个变量 $u'=0$ 处有奇异性。边值条件(BCs)由 Riemann-Stieltjes 积分给出：

$$\alpha[u]=\int_0^1 u(t)\mathrm{d}A(t),\beta[u]=\int_0^1 u(t)\mathrm{d}B(t),$$

$A(t),B(t)$ 是有界变差函数，并且 $\int_0^1\mathrm{d}A(t)>0,\int_0^1\mathrm{d}B(t)>0$。Zima 通过限制奇异非线性项 $f$ 在 $[0,1]\times(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 的一个合适的子集 $[0,1]\times[\rho_1,+\infty)\times[\rho_2,+\infty)$ 上，利用 Krasnoselskii-Guo 锥拉压不动点定理，建立了上面问题的正解存在的充分性条件。

## 2. 预备知识及引理

令 $X=C^1[0,1]=\{x:x\text{为}[0,1]\text{上的连续可微函数}\}$，对于 $x\in X$，我们定义 $\|x\|=\max\{\|x\|_1,\|x\|_2\}$，其中 $\|x\|_1=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|,\|x\|_2=\max\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)|$，则 $(X\|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间。

定义

$$P=\left\{u\in X:u(t)\geq\frac{b}{a+b}\|u\|_1,u(0)\geq\frac{b}{a}\|u\|_2\right\}.$$

显然 $P$ 是 $X$ 中的一个锥。

我们主要考虑以下的情况：

$$f(t,u,y)=F(t,u,y)-\gamma(t),t\in(0,1).$$

为了叙述的方便,我们给出如下的假设：

(C1) $a>0,b>0$，

(C2) $F:[0,1]\times(0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)\to(0,+\infty)$ 是连续的函数，

(C3) $A(t),B(t)$ 是有界的变差函数，并且 $\int_0^1\mathrm{d}A(t)\triangleq\alpha[\hat{1}]>0,\int_0^1\mathrm{d}B(t)\triangleq\beta[\hat{1}]>0$，

(C4) $\gamma\in C([0,1],(0,+\infty))$，

(C5) $\omega(t)=\int_0^1 G(t,s)q(s)\gamma(s)\mathrm{d}s<+\infty,t\in[0,1],c_1=\int_0^1 q(s)\gamma(s)\mathrm{d}s<+\infty$，

(C6)存在 $[0,1]$ 上的连续函数 $\psi$，并且在 $(0,1)$ 上 $\psi>0$，使得当

$$(t,u,y)\in(0,1)\times\left(0,\frac{4(a+b)^2}{ab}c_1\right]\times\left[-c_1,\frac{4(a+b)^2}{b^2}c_1\right],$$

有 $F(t,u,y)\geq\psi(t)$，并且 $\max\limits_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)q(s)\psi(s)\mathrm{d}s>\frac{2(a+b)^2}{ab}c_1$。

对于 $u\in P$，我们定义：

$$\begin{aligned}(T_\varepsilon u)(t)=&\frac{1}{a}\alpha\left[[u-\omega]^*\right]+\left(\frac{b}{a}+t\right)\beta\left[[u-\omega]^*\right]\\&+\int_0^1 G(t,s)q(s)F\left(s,\max\left\{\varepsilon,[u(s)-\omega(s)]^*\right\},(u(s)-\omega(s))'\right)\mathrm{d}s,t\in[0,1],0<\varepsilon\leq1,\end{aligned}$$

其中 $G(t,s)$ 为以下问题的 Green 函数：

$$\begin{cases}u''(t)=0,t\in(0,1),\\au(0)-bu'(0)=0,\\u'(1)=0.\end{cases}$$

即

$$G(t,s)=\begin{cases}\frac{1}{a}(as+b),s\le t;\\ \frac{1}{a}(at+b),t\le s.\end{cases}$$

此外，

$$[u(t)-\omega(t)]^*=\begin{cases}u(t)-\omega(t),u(t)-\omega(t)>0;\\ 0,u(t)-\omega(t)\le 0.\end{cases}$$

我们定义 $H=\{u\in P:u$ 满足 $u''(t)+q(t)F\left(t,\max\left\{\varepsilon,[u(t)-\omega(t)]^*\right\},(u(t)-\omega(t))'\right)=0,t\in(0,1)$，$au(0)-bu'(0)=\alpha\left[[u-\omega]^*\right],u'(1)=\beta\left[[u-\omega]^*\right],0<\varepsilon\le 1\}$。

**引理 2.1：** 对于任意的 $\varepsilon>0,T_\varepsilon:P\to P$ 为一个全连续的算子。

证：首先，我们来证明 $T_\varepsilon P\to P$。

对于 $\forall u\in P$，有 $T_\varepsilon\in C^1[0,1]$，并且

$$\begin{aligned}T_\varepsilon u(t)&=\frac{1}{a}\alpha\left[[u-\omega]^*\right]+\left(\frac{b}{a}+t\right)\beta\left[[u-\omega]^*\right]+\int_0^1G(t,s)q(s)F\left(s,\max\left\{\varepsilon,[u(s)-\omega(s)]^*\right\},(u(s)-\omega(s))'\right)\mathrm{d}s\\ &\ge\frac{1}{a}\alpha\left[[u-\omega]^*\right]+\frac{b}{a}\beta\left[[u-\omega]^*\right]+\frac{b}{a+b}\int_0^1G(s,s)q(s)F\left(s,\max\left\{\varepsilon,[u(s)-\omega(s)]^*\right\},(u(s)-\omega(s))'\right)\mathrm{d}s\\ &\ge\frac{b}{a+b}\left(\frac{1}{a}\alpha\left[[u-\omega]^*\right]+\left(\frac{b}{a}+1\right)\beta\left[[u-\omega]^*\right]+\int_0^1G(s,s)q(s)F\left(s,\max\left\{\varepsilon,[u(s)-\omega(s)]^*\right\},(u(s)-\omega(s))'\right)\mathrm{d}s\right)\\ &\ge\frac{b}{a+b}\|T_\varepsilon u\|.\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}(T_\varepsilon u)'(t)&=\beta\left[[u-\omega]^*\right]+\int_t^1q(s)F\left(s,\max\left\{\varepsilon,[u(s)-\omega(s)]^*\right\},(u(s)-\omega(s))'\right)\mathrm{d}s\\ &\le\beta\left[[u-\omega]^*\right]+\int_0^1q(s)F\left(s,\max\left\{\varepsilon,[u(s)-\omega(s)]^*\right\},(u(s)-\omega(s))'\right)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}T_\varepsilon u(0)&=\frac{1}{a}\alpha\left[[u-\omega]^*\right]+\frac{b}{a}\beta\left[[u-\omega]^*\right]\\ &\quad+\frac{b}{a}\int_0^1q(s)F\left(s,\max\left\{\varepsilon,[u(s)-\omega(s)]^*\right\},(u(s)-\omega(s))'\right)\mathrm{d}s\\ &\ge\frac{b}{a}\left(\beta\left[[u-\omega]^*\right]+\int_0^1q(s)F\left(s,\max\left\{\varepsilon,[u(s)-\omega(s)]^*\right\},(u(s)-\omega(s))'\right)\mathrm{d}s\right)\\ &\ge\frac{b}{a}\|T_\varepsilon u\|_2.\end{aligned}$$

因此，$T_\varepsilon:P\to P$。

又根据 $F$ 具有连续性，利用 Ascoli-Arzela 定理，可以得到 $T_\varepsilon$ 是全连续的算子。

**引理 2.2：** 假设 $u\in P$，那么 $u(t)\ge\eta\|u\|$，$\forall t\in[0,1]$，其中 $\eta=\frac{b}{a+b}\min\left\{1,\frac{b}{a}\right\}$。

证：因为$u \in P$

$$u(t) \ge \frac{b}{a+b}\|u\|_1 \ge \frac{b}{a+b}u(0) \ge \frac{b^2}{a(a+b)}\|u\|_2,$$

所以，

$$u(t) \ge \max\left\{\frac{b}{a+b}\|u\|_1, \frac{b^2}{a(a+b)}\|u\|_2\right\} \ge \frac{b}{a+b}\min\left\{1,\frac{b}{a}\right\}\max\left\{\|u\|_1,\|u\|_2\right\} = \frac{b}{a+b}\min\left\{1,\frac{b}{a}\right\}\|u\|.$$

**引理 2.3：** 假设$H \ne \varnothing$，(C6)成立，那么存在，使得对于$\forall t \in [0,1]$，$u \in H$，有$\left[u(t)-\omega(t)\right]^* \ge \delta_0$。

证：我们令$u \in H$，则得到以下的两种情形：

(i) $\|u\|_1 \ge \frac{4(a+b)^2}{ab}c_1$。

因为$\omega(t) = \int_0^1 G(t,s)q(s)\gamma(s)\mathrm{d}s \le \frac{a+b}{a}\int_0^1 q(s)\gamma(s)\mathrm{d}s = c_1\frac{a+b}{a}$，所以

$$\omega(t) \le \frac{1}{4}\frac{b}{a+b}\frac{4(a+b)^2}{ab}c_1 \le \frac{1}{4}\frac{b}{a+b}\|u\|_1 \le \frac{1}{4}u(t).$$

因此，有

$$\left[u(t)-\omega(t)\right]^* \ge \frac{3}{4}u(t) \ge \frac{3}{4}\frac{b}{a+b}\|u\|_1 \ge \frac{3}{4}\frac{b}{a+b}\frac{4(a+b)^2}{ab}c_1 = \frac{3(a+b)}{a}c_1 \triangleq \delta_1.$$

(ii) $0 < \|u\|_1 \le \frac{4(a+b)^2}{ab}c_1$。

通过计算能够得出

$$u'(t) = \beta\left[\left[u-\omega\right]^*\right] + \int_t^1 q(s)F\left(s,\max\left\{\varepsilon,\left[u(s)-\omega(s)\right]^*\right\},\left(u(s)-\omega(s)\right)'\right)\mathrm{d}s, t \in [0,1],$$

$$\omega'(t) = \int_t^1 q(s)\gamma(s)\mathrm{d}s, t \in [0,1].$$

所以，

$$u'(t) \le u'(0) = \frac{au(0)-\alpha\left[\left[u-\omega\right]^*\right]}{b} \le \frac{a}{b}\frac{4(a+b)^2}{ab}c_1 = \frac{4(a+b)^2}{b^2}c_1,$$

$$\omega'(t) = \int_t^1 q(s)\gamma(s)\mathrm{d}s \le c_1.$$

因此

$$-c_1 \le \left(u(t)-\omega(t)\right)' \le \frac{4(a+b)^2}{b^2}c_1.$$

根据假设(C6)，我们知道这里存在一个$[0,1]$上的连续函数$\psi$，使得

$$\begin{aligned}\|u\|_1 &\ge \max_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)q(s)F\left(s,\max\left\{\varepsilon,\left[u(s)-\omega(s)\right]^*\right\},\left(u(s)-\omega(s)\right)'\right)\mathrm{d}s \\ &\ge \max_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)q(s)\psi(s)\mathrm{d}s > \frac{2(a+b)^2}{ab}c_1.\end{aligned}$$

又由于 $u \in P$，

$$u(t) \geq \frac{b}{a+b}\|u\|_1 \geq \frac{b}{a+b}\frac{2(a+b)^2}{ab}c_1,$$

但

$$\omega(t) \leq \frac{1}{2}\frac{b}{a+b}\frac{2(a+b)^2}{ab}c_1 \leq \frac{1}{2}u(t),$$

因此

$$[u(t)-\omega(t)]^* \geq \frac{1}{2}u(t) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b}\right)\|u\|_1 \geq \frac{1}{2}\frac{b}{a+b}\frac{2(a+b)^2}{ab}c_1 = \frac{a+b}{a}c_1 \triangleq \delta_2.$$

令 $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\} = \delta_2$，则对 $\forall t \in [0,1], u \in H$ 有 $[u(t)-\omega(t)]^* \geq \delta_0$。

**引理** 2.4：[6]设 $\Omega$ 为实 Banach 空间 $E$ 中的一个有界开集，$P$ 为 $E$ 中的一个锥，$\theta \in \Omega, A: \bar{\Omega} \cap P \to P$ 为连续紧算子，假设 $\lambda Ax \neq x, \forall x \in \partial\Omega \cap P, \lambda \in (0,1]$，则 $i(A, \Omega \cap P, P) = 1$.

**引理** 2.5：[6]设 $\Omega$ 为实 Banach 空间 $E$ 中的一个有界开集，$P$ 为 $E$ 中的一个锥，$\theta \in \Omega, A: \bar{\Omega} \cap P \to P$ 为连续紧算子，假设 $Ax > x, \forall x \in \partial\Omega \cap P$，则 $i(A, \Omega \cap P, P) = 0$.

**引理 2.6：** 假设存在一个函数 $g \in C((0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)\times[0,+\infty))$，使得对于 $\forall (t,u,y) \in [0,1]\times(0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$，有

$$F(t,u,y) \geq g(u,y), \tag{2}$$

并且函数 $g$ 满足

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{g(u,y)}{u} = +\infty \tag{3}$$

对于 $y \in (-\infty,+\infty)$ 是一致成立的，则存在 $R' > 0$，使得对于 $\forall R \geq R'$，有

$$i(T_\varepsilon, \Omega_R \cap P, P) = 0, \forall 0 < \varepsilon \leq 1.$$

证：根据(3)，我们可以知道存在 $R_1 > \varepsilon$，使得

$$g(u,y) \geq N^* u, \forall u \geq R_1,$$

其中 $N^* > \dfrac{2a(a+b)^2}{b^2 \min\left\{1, \frac{b}{a}\right\}\int_0^1 (as+b)q(s)\,\mathrm{d}s}$.

再根据(2),有

$$F(t,u,y) \geq N^* u, \forall u \geq R_1. \tag{4}$$

设 $R' = \dfrac{2(a+b)}{b\min\left\{1, \frac{b}{a}\right\}}R_1, R \geq \max\left\{R', \dfrac{2(a+b)c_1}{a\eta}\right\}, \Omega_R = \{u \in C^1[0,1]: \|u\| < R\}$.

下面证明

$$T_\varepsilon u > u, u \in P \cap \partial\Omega_R, 0 < \varepsilon < 1. \tag{5}$$

若不然，我们假设存在一个 $u_0 \in P \cap \partial\Omega_R$，即 $\|u_0\| = R$，使得 $T_\varepsilon u_0 \leq u_0$。

根据引理 3.2，有

$$u_0(t) \ge \frac{b}{a+b}\min\left\{1,\frac{b}{a}\right\}\|u_0\| = \frac{b}{a+b}\min\left\{1,\frac{b}{a}\right\}R, \forall t\in[0,1].$$

因为

$$\omega(t) = \int_0^1 G(t,s)q(s)\gamma(s)\mathrm{d}s \le \frac{a+b}{a}\int_0^1 q(s)\gamma(s)\mathrm{d}s = \frac{a+b}{a}c_1 \le \frac{(a+b)c_1}{a\eta R}\eta\|u_0\| \le \frac{1}{2}u_0(t),$$

所以有

$$u_0(t)-\omega(t) \ge \frac{1}{2}u_0(t), \forall t\in[0,1].$$

$$\left[u_0(t)-\omega(t)\right]^* \ge \frac{1}{2}u_0(t) \ge \frac{1}{2}\frac{b}{a+b}\min\left\{1,\frac{b}{a}\right\}R \ge R_1, \forall t\in[0,1].$$

再由(4)式可知，

$$F\left(t,\max\left\{\varepsilon,\left[u_0(t)-\omega(t)\right]^*\right\},\left(u_0(t)-\omega(t)\right)'\right) \ge N^*\left[u_0(t)-\omega(t)\right]^* \ge N^*\frac{1}{2}\frac{b}{a+b}\min\left\{1,\frac{b}{a}\right\}R.$$

因此，有

$$\begin{aligned}
T_\varepsilon u(t) &= \frac{1}{a}\alpha\left[\left[u-\omega\right]^*\right]+\left(\frac{b}{a}+t\right)\beta\left[\left[u-\omega\right]^*\right]+\int_0^1 G(t,s)q(s)F\left(s,\max\left\{\varepsilon,\left[u_0(s)-\omega(s)\right]^*\right\},\left(u_0(s)-\omega(s)\right)'\right)\mathrm{d}s\\
&\ge \int_0^1 \frac{b}{a+b}G(s,s)q(s)F\left(s,\max\left\{\varepsilon,\left[u_0(s)-\omega(s)\right]^*\right\},\left(u_0(s)-\omega(s)\right)'\right)\mathrm{d}s\\
&\ge \frac{b}{a(a+b)}\int_0^1 (as+b)q(s)F\left(s,\left[u_0(s)-\omega(s)\right]^*,\left(u_0(s)-\omega(s)\right)'\right)\mathrm{d}s\\
&\ge \frac{b}{a(a+b)}N^*\frac{1}{2}\frac{b}{a+b}\min\left\{1,\frac{b}{a}\right\}R\int_0^1 (as+b)q(s)\mathrm{d}s = N^*\frac{1}{2}\frac{b^2}{a(a+b)^2}\min\left\{1,\frac{b}{a}\right\}R\int_0^1(as+b)q(s)\mathrm{d}s\\
&> R = \|u_0\|.
\end{aligned}$$

矛盾。因此(5)式成立。

根据引理 2.5 我们能够知道 $i\left(T_\varepsilon,\Omega_R\cap P,P\right)=0, \forall 0<\varepsilon\le 1$。

## 3. 主要结果

**定理 3.1**：假设(C1)~(C6)成立，且满足以下的条件

($A_1$) $(t,u,y)\in[0,1]\times(0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$，有

$$0 \le F(t,u,y) \le \left(g(u)+h(u)\right)r\left(|y|\right), \tag{6}$$

其中 $g>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上是连续的并且单调不增的，$h\ge 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上是连续的，$r\ge 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上是连续的且单调不减的，

($A_2$)
$$\sup_{r\in\left(\frac{2(a+b)c_1}{a\eta},+\infty\right)}\left\{\left(1-\frac{\alpha\left[\hat{1}\right]}{a}\right)r-\left(\frac{b}{a}+1\right)\left(I^{-1}\left(I\left(\beta\left[\hat{1}\right]r+c_1\right)+Z(r)\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s\right)-c_1\right)\right\}>0, \tag{7}$$

其中 $I(y)=\int_0^y \frac{z}{r(z)}\mathrm{d}z, y\in[0,+\infty), Z(r)=g\left(\frac{1}{2}\eta r\right)+\max\limits_{s\in[0,r]}h(s)$，则边值问题(1)至少存在一个正解。

证：因为(7)，我们可以令 $r>\frac{2(a+b)c_1}{a\eta},\varepsilon>0$，使得 $\varepsilon<\min\left\{1,\frac{1}{2}\eta r\right\}$，

$$\left(1-\frac{\alpha\left[\hat{1}\right]}{a}\right)r-\left(\frac{b}{a}+1\right)\left(I^{-1}\left(I\left(\beta\left[\hat{1}\right]r+c_1\right)+Z(r)\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s\right)-c_1\right)>0. \tag{8}$$

我们令 $\Omega_r=\left\{u\in C^1[0,1]:\|u\|<r\right\}$。

下面我们就来证明

$$u\neq\lambda T_\varepsilon u,\forall u\in P\cap\partial\Omega_r,\lambda\in(0,1]. \tag{9}$$

若不然，我们假设存在一个 $u_0\in P\cap\partial\Omega_r,\lambda_0\in(0,1]$，使得 $u_0=\lambda_0T_\varepsilon u_0$。

因为

$$\begin{aligned}\omega(t)&=\int_0^1 G(t,s)q(s)\gamma(s)\mathrm{d}s\leq\frac{a+b}{a}\int_0^1 q(s)\gamma(s)\mathrm{d}s\\&=\frac{a+b}{a}c_1\leq\frac{(a+b)c_1}{a\eta r}\eta\|u_0\|\leq\frac{1}{2}u_0(t),\end{aligned}$$

所以 $u_0(t)-\omega(t)\geq\frac{1}{2}u_0(t),\forall t\in[0,1]$。

又根据引理 2.2，有

$$u_0(t)-\omega(t)\geq\frac{1}{2}\eta\|u_0\|=\frac{1}{2}\eta r,\forall t\in[0,1].$$

因为 $u_0$ 满足

$$\begin{cases}u_0''(t)+\lambda_0 q(t)F\left(t,\max\left\{\varepsilon,\left[u_0(t)-\omega(t)\right]^*\right\},\left(u_0(t)-\omega(t)\right)'\right)=0,t\in(0,1),\\au_0(0)-bu_0'(0)=\lambda_0\alpha\left[\left[u_0-\omega\right]^*\right],\\u_0'(1)=\lambda_0\beta\left[\left[u_0-\omega\right]^*\right],\end{cases} \tag{10}$$

所以能够得到 $u_0''(t)\leq0,\forall t\in[0,1]$，又由于 $u_0'(1)=\lambda_0\beta\left[\left[u_0-\omega\right]^*\right]\geq\lambda_0\frac{1}{2}\eta r\beta\left[\hat{1}\right]>0$，从而有 $u_0'(t)>0,\forall t\in[0,1],\|u_0\|_1=u_0(1),t\in(0,1)$，易证

$$\begin{aligned}-u_0''(t)&=\lambda_0 q(t)F\left(t,\max\left\{\varepsilon,\left[u_0(t)-\omega(t)\right]^*\right\},\left(u_0(t)-\omega(t)\right)'\right)\\&\leq q(t)\left[g\left(\max\left\{\varepsilon,\left[u_0(t)-\omega(t)\right]^*\right\}\right)+h\left(\max\left\{\varepsilon,\left[u_0(t)-\omega(t)\right]^*\right\}\right)\right]r\left(\left|\left(u_0(t)-\omega(t)\right)'\right|\right)\\&\leq q(t)\left[g\left(\frac{1}{2}\eta r\right)+\max_{s\in[0,r]}h(s)\right]r\left(u_0'(t)+c_1\right).\end{aligned}$$

因此

$$-\frac{u_0''(t)}{r\left(u_0'(t)+c_1\right)}\leq q(t)Z(r). \tag{11}$$

对上式从 $t$ 到 1 做积分，能够得到

$$\int_t^1 -\frac{d\left(u_0'(t)+c_1\right)}{r\left(u_0'(t)+c_1\right)} \le Z(r)\int_t^1 q(s)\mathrm{d}s.$$

即

$$\int_{u_0'(t)+c_1}^{u_0'(1)+c_1} -\frac{\mathrm{d}z}{r(z)} \le Z(r)\int_t^1 q(s)\mathrm{d}s,$$

$$I\left(u_0'(t)+c_1\right)-I\left(u_0'(1)+c_1\right) \le Z(r)\int_t^1 q(s)\mathrm{d}s.$$

再结合 $u_0'(1)=\lambda_0\beta\left[\left[u_0-\omega\right]^*\right] \le \beta\left[u_0\right] \le \beta\left[\hat{1}\right]r$，得

$$I\left(u_0'(t)+c_1\right) \le I\left(\beta\left[\hat{1}\right]r+c_1\right)+Z(r)\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s,$$

$$u_0'(t)+c_1 \le I^{-1}\left(I\left(\beta\left[\hat{1}\right]r+c_1\right)+Z(r)\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s\right),$$

$$u_0'(t) \le I^{-1}\left(I\left(\beta\left[\hat{1}\right]r+c_1\right)+Z(r)\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s\right)-c_1. \tag{12}$$

令 $t\to 0$ 得

$$u_0'(0) \le I^{-1}\left(I\left(\beta\left[\hat{1}\right]r+c_1\right)+Z(r)\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s\right)-c_1.$$

结合(10)，有

$$\begin{aligned} u_0(0) &= \frac{1}{a}\left(\lambda_0\alpha\left[\left[u_0-\omega\right]^*\right]+bu_0'(0)\right) \\ &\le \frac{\alpha\left[\hat{1}\right]r}{a}+\frac{b}{a}\left(I^{-1}\left(I\left(\beta\left[\hat{1}\right]r+c_1\right)+Z(r)\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s\right)-c_1\right). \end{aligned} \tag{13}$$

对(12)从 0 到 1 做积分，有

$$u_0(1)-u_0(0) \le I^{-1}\left(I\left(\beta\left[\hat{1}\right]r+c_1\right)+Z(r)\int_t^1 q(s)\mathrm{d}s\right)-c_1.$$

于是，根据(13)，得到

$$u_0(1) \le \frac{\alpha\left[\hat{1}\right]r}{a}+\left(\frac{b}{a}+1\right)\left(I^{-1}\left(I\left(\beta\left[\hat{1}\right]r+c_1\right)+Z(r)\int_t^1 q(s)\mathrm{d}s\right)-c_1\right).$$

因此

$$\begin{aligned} r &= \left\|u_0\right\| = \max\left\{\left\|u_0\right\|_1,\left\|u_0\right\|_2\right\} \\ &\le \frac{\alpha\left[\hat{1}\right]r}{a}+\left(\frac{b}{a}+1\right)\left(I^{-1}\left(I\left(\beta\left[\hat{1}\right]r+c_1\right)+Z(r)\int_t^1 q(s)\mathrm{d}s\right)-c_1\right). \end{aligned}$$

这与(8)式矛盾。因此(9)成立。根据引理 2.4，有

$$i\left(T_\varepsilon,\Omega_r\cap P,P\right)=1. \tag{14}$$

所以，存在 $u_\varepsilon\in\Omega_r\cap P$，使得 $T_\varepsilon u_\varepsilon=u_\varepsilon$。所以引理 2.3 中的 $H\ne\varnothing$，即存在一个 $\delta_0>0$，使得

$$\left[u(t)-\omega(t)\right]^* \ge \delta_0, \forall t\in[0,1], u\in H. \tag{15}$$

假设 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}\delta_0$，且 $T_{\varepsilon_0}u_{\varepsilon_0}=u_{\varepsilon_0}$。显然，$u_{\varepsilon_0}\in H$，根据 $\left[u_{\varepsilon_0}(t)-\omega(t)\right]^*\geq\delta_0,\forall t\in[0,1]$ 和

$$u_{\varepsilon_0}(t)=\frac{1}{a}\alpha\left[\left[u_{\varepsilon_0}-\omega\right]^*\right]+\left(\frac{b}{a}+t\right)\beta\left[\left[u_{\varepsilon_0}-\omega\right]^*\right]$$
$$+\int_0^1 G(t,s)q(s)F\left(s,\max\left\{\varepsilon,\left[u_{\varepsilon_0}(s)-\omega(s)\right]^*\right\},\left(u_{\varepsilon_0}(s)-\omega(s)\right)'\right)\mathrm{d}s,t\in[0,1],$$

能够得到

$$u_{\varepsilon_0}(t)=\frac{1}{a}\alpha\left[u_{\varepsilon_0}-\omega\right]+\left(\frac{b}{a}+t\right)\beta\left[u_{\varepsilon_0}-\omega\right]$$
$$+\int_0^1 G(t,s)q(s)F\left(s,u_{\varepsilon_0}(s)-\omega(s),\left(u_{\varepsilon_0}(s)-\omega(s)\right)'\right)\mathrm{d}s,t\in[0,1].$$

假设 $y(t)=u_{\varepsilon_0}(t)-\omega(t),t\in[0,1]$，经验证能够得到

$$-y''(t)=q(t)f(t,y,y'),t\in(0,1).$$

因为

$$\omega(0)=\frac{b}{a}c_1,\omega'(0)=c_1,\omega'(1)=0,$$

所以根据 $au_{\varepsilon_0}(0)-bu'_{\varepsilon_0}(0)=\alpha\left[\left[u_{\varepsilon_0}-\omega\right]^*\right],u'_{\varepsilon_0}(1)=\beta\left[\left[u_{\varepsilon_0}-\omega\right]^*\right]$，可知

$$a\left(y(0)+\omega(0)\right)-b\left(\left(y(0)+\omega(0)\right)'\right)=ay(0)-by'(0)=\alpha[y],$$
$$y'(1)=\beta[y].$$

因此 $y(t)$ 是边值问题(1)的一个正解。

**定理 3.2：** 假设定理 3.1 的条件和引理 2.6 的条件同时成立，那么边值问题(1)至少存在两个正解。

证：我们取(8)中的 $r$，令 $\varepsilon_0>0,\varepsilon_0<\min\left\{\delta_0,1,\frac{1}{2}\eta r\right\}$，$\delta_0$ 的定义同引理 2.3，取引理 2.4 中 $R>\max\{1,r\}$。设

$$\Omega_1=\left\{u\in C^1[0,1]:\|u\|<r\right\},$$
$$\Omega_2=\left\{u\in C^1[0,1]:\|u\|<R\right\}.$$

根据引理 2.6 和定理 3.1，有

$$i\left(T_{\varepsilon_0},\Omega_1\cap P,P\right)=1.$$

并且

$$i\left(T_{\varepsilon_0},\Omega_2\cap P,P\right)=0.$$

所以

$$i\left(T_{\varepsilon_0},\left(\Omega_2-\Omega_1\right)\cap P,P\right)=-1.$$

因此存在 $u_{1,\varepsilon_0}\in\Omega_1\cap P,u_{2,\varepsilon_0}\in\left(\Omega_2-\Omega_1\right)\cap P$，使得

$$T_{\varepsilon_0}u_{1,\varepsilon_0}=u_{1,\varepsilon_0},T_{\varepsilon_0}u_{2,\varepsilon_0}=u_{2,\varepsilon_0},t\in[0,1].$$

假设 $y_{1,\varepsilon_0}(t)=u_{1,\varepsilon_0}(t)-\omega(t),y_{2,\varepsilon_0}(t)=u_{2,\varepsilon_0}(t)-\omega(t)$。易得，$y_{1,\varepsilon_0}(t)$ 和 $y_{2,\varepsilon_0}(t)$ 为边值问题(1)的两个正解。

## 基金项目

山东省自然科学基金(ZR2018MA022)资助。

## 参考文献

[1] Yang, G.C. (2006) Positive Solutions of Singular Dirichlet Boundary Value Problems with Sign-Changing Nonlinearities. *Computers & Mathematics with Applications*, **51**, 1463-1470. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2006.01.006

[2] Infante, G. (2009) Positive Solutions of Nonlocal Boundary Value Problems with Singularities. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, 377-384.

[3] Ji, C., O'Regan, D., Yan, B. and Agarwal, R.P. (2011) Nonexistence and Existence of Positive Solutions for Second Order Singular Three-Point Boundary Value Problems with Derivative Dependent and Sign-Changing Nonlinearities. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **36**, 61-87. https://doi.org/10.1007/s12190-010-0388-5

[4] Yan, B.Q., O'Regan, D. and Agarwal, R.P. (2014) Multiplicity and Uniqueness Results for the Singular Nonlocal Boundary Value Problem Involving Nonlinear Integral Conditions. *Boundary Value Problems*, 148. https://doi.org/10.1186/s13661-014-0148-9

[5] Zima, M. (2014) Positive Solutions of Second-Order Non-Local Boundary Value Problem with Singularities in Space Variables. *Boundary Value Problems*, 200. https://doi.org/10.1186/s13661-014-0200-9

[6] Guo, D. and Lakshmikantham, V. (1988) Nonlinear Problems in Abstract Cones. Academic Press.