Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2018, 7(11), 1458-1476**
Published Online November 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.711170

Hans汉斯

Further Discussion of Dual Orlicz-John Ellipsoids

Tongyi Ma

College of Mathematics and Statistics, Hexi University, Zhangye Gansu
Email: matongyi@126.com

Received: Oct. 29th, 2018; accepted: Nov. 21st, 2018; published: Nov. 28th, 2018

Abstract

As the natural extension of dual L_p-John ellipsoid, Zou and Xiong recently proposed the concept of dual Orlicz John ellipsoid (also call the Orlicz-Legendre ellipsoid), and studied its characteristic properties. This paper uses the totally different methods to restudy the dual Orlicz-John ellipsoid, and proves the existence, uniqueness and characteristic properties of dual Orlicz-John ellipsoid. Meanwhile, we give some interesting properties of dual Orlicz-John ellipsoid and the normalization of dual Orlicz mixed volume, and establish the Orlicz Minkowski inequality of the standardized dual Orlicz mixed volume.

Keywords

Convex Body, John Ellipsoid, L_p-John Ellipsoi, Dual L_p-John Ellipsoid, Dual Orlicz John Ellipsoid

对偶Orlicz-John椭球的再讨论

马统一

河西学院数学与统计学院，甘肃 张掖
Email: matongyi@126.com

收稿日期：2018年10月29日；录用日期：2018年11月21日；发布日期：2018年11月28日

摘　要

作为对偶L_p-John椭球的自然推广，最近Zou和Xiong提出了对偶Orlicz John椭球(也称为Orlicz-Legendre椭球)的概念并研究了它的特征性质。本文运用完全不同的方法重新研究对偶Orlicz John椭球，证明了对偶Orlicz John椭球的存在性、唯一性和特征性质，同时给出了对偶Orlicz John椭球和规范化对偶Orlicz

文章引用: 马统一. 对偶 Orlicz-John 椭球的再讨论[J]. 应用数学进展, 2018, 7(11): 1458-1476.
DOI: 10.12677/aam.2018.711170

混合体积的一些有趣性质，并建立了规范化的对偶Orlicz混合体积的Orlicz Minkowski不等式。

关键词

凸体，John椭球，L_p-John椭球，对偶L_p-John椭球，对偶Orlicz John椭球

1. 引言

2005 年，Lutwak，Yang 和 Zhang [1]三人研究小组发表的一篇杰出的文章表明，对于给定的凸体 K，存在着一族 L_p-John 椭球 E_pK，使得经典的 John 椭球 JK，Petty 椭[2] [3]球以及最近发现的对偶 Legendre 椭球 $\Gamma_{-2}K$ [4]都是这一族 L_p-John 椭球 E_pK 的特殊情况($p=\infty, p=1$ 和 $p=2$)。这种把椭球统一起来的关键点是 L_p-John 椭球 E_pK 是给定凸体的 L_p-混合体积的极值问题的解[1]：若 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点为其内点的凸体，$0<p\le\infty$，在所有原点对称的椭球 E 中，满足极值问题

$$\max_E |E| \text{ 限制于 } \bar{V}_p(K,E)\le 1$$

的解的唯一椭球 E_pK 称之为 L_p-John 椭球；在所有原点对称的椭球 E 中，满足极值问题

$$\min_E \bar{V}_p(K,E) \text{ 限制于 } |E|=\omega_n$$

的解的唯一椭球 $\bar{E}_pK$ 称之为 K 的规范化的 L_p-John 椭球。这里 $\bar{V}_p(K,E)$ 表示 K 和 E 的 L_p-混合体积[5]，$|K|$ 表示 K 的 n 维体积，ω_n 表示欧氏单位球 B_2^n 的 n 维体积。

另一个经典的结果(其根源来自于力学)可以表述如下：对于 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体 K，存在唯一的椭球使得这个椭球在每个方向上的运动惯量与 K 在相应方向上的运动惯量相同。这个椭球称为 K 的 Legendre 椭球 $\Gamma_{-2}K$。Legendre 椭球是一个很重要的椭球，它与迷向位置的概念以及著名的截面问题紧密相关。

Yu，Leng 和 Wu [6]提出了对偶 L_p-John 椭球 $\tilde{E}_pK$ 的概念，证明了经典的 Löwner 椭球 $\tilde{J}K$ 和 Legendre 椭球 Γ_2K 都是对偶 L_p-John 椭球 $\tilde{E}_pK$ 的特殊情况($p=\infty$ 和 $p=2$)。这种把椭球统一起来的关键点是对偶 L_p-John 椭球 $\tilde{E}_pK$ 是给定凸体的对偶 L_p-混合体积的极值问题的解[6]：若 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点为内点的凸体，$0<p\le\infty$，在所有原点对称的椭球 E 中，满足极值问题

$$\max_E \left(\frac{\omega_n}{|E|}\right)^{\frac{1}{n}} \text{ 限制于 } \bar{V}_{-p}(K,E)\le 1$$

的解的唯一椭球 $\tilde{E}_pK$ 称之为 K 的对偶 L_p-John 椭球；在所有原点对称的椭球 E 中，满足极值问题

$$\min_E \bar{V}_{-p}(K,E) \text{ 限制于 } |E|=\omega_n$$

的解的唯一椭球 $\bar{\tilde{E}}_pK$ 称之为 K 的规范化的对偶 L_p-John 椭球。这里 $\bar{V}_{-p}(K,E)$ 表示 K 和 E 的对偶调和 L_p-混合体积[7]。

2010 年，在两篇具有里程碑意义的文章[8] [9]中，Orlicz Brunn-Minkowski 理论浮出了水面，这是 Brunn-Minkowski 理论的延续和发展。在文章中，Lutwak，Yang 和 Zhang 建立了 Orlicz Busemann-Petty

质心不等式和 Orlicz 投影不等式。这个理论是基于 L_p-类非对称问题的解决基础之上的，L_p-Brunn-Minkowski 理论的非对称问题最早是由 Lutwak [5]提出来的，之后由 Ludwig [10]，Haberl 和 Schuster [11] [12]等人给出了补充和发展。作为 L_p-Minkowski 问题的延续，偶的 Orlicz Minkowski 问题也被 Haberl [13]等人解决。虽然 Orlicz Brunn-Minkowski 理论研究的对象和 Brunn-Minkowski 理论相比范围扩大了，但我们从 Lutwak，Yang 和 Zhang 的工作可以看出，很多基本的性质还是保持了下来，比如仿射等周不等式，这也是我们研究 Orlicz Brunn-Minkowski 理论的目的所在。可以参考更多文献，如[4] [14]-[23]等。

作为 L_p-John 椭球 E_pK 和对偶 L_p-John 椭球 $\tilde{E}_pK$ 的自然推广，最近，Du 和 Xiong [24] [25]提出了 Orlicz John 椭球和对偶 Orlicz John 椭球(他们将后者称为 Orlicz-Legendre 椭球)的概念，并研究了其相应的特征性质，其结果丰富了 Orlicz Brunn-Minkowski 理论。文[26]也独立地研究了 Orlicz John 椭球。本文中，我们应用完全不同于文[25]的方法重新研究对偶 Orlicz John 椭球，解决其相应极值问题的存在性，唯一性和其特征表示。

事实上，一个凸体 K 的对偶 Orlicz John 椭球也是规范化的对偶 Orlicz 混合体积的相应极值问题的解。受 Gruber 和 Schuster [27] [28]工作的启发，我们将应用正定二次型的方法来解决与对偶 Orlicz John 椭球有关的极值问题的存在性、唯一性和其特征表示。这个方法的大致思路如下：对于 $\mathbb{R}^n$ 中的线性变换，在正交变换下可看成 $\mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ 中的向量，这就把极值问题转化成 $\mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ 中相应的锥的子集上的几何问题。于是对于最小位置问题，我们需要找到有公共切点的光滑的凸子集。这个公共切点就是相应的极值问题的解，使得凸集相切的条件就是解的极值特征。

假设函数 $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是凸的、严格递增的且 $\phi(0)=0$。这种 ϕ 的集合记为 $\mathcal{C}$。我们记 $\mathcal{K}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中凸体的集合，并记 $\mathcal{K}_o^n$ 为包含原点为其内点的凸体的集合。下面关于两个星体的规范化对偶 Orlicz 混合体积的概念与已有文献[22] [29]的定义有所不同。

定义 1.1：定义泛函 $\bar{V}_{-\phi}(\cdot,\cdot):\mathcal{S}_o^n\times\mathcal{S}_o^n\to[0,\infty)$ 为

$$\bar{V}_{-\phi}(K,L)=\inf\left\{\lambda>0:\frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}}\phi\left(\frac{\rho_K(u)}{\lambda\rho_L(u)}\right)\rho_K^n(u)\mathrm{d}S(u)\le 1\right\},$$

其中 $\mathcal{S}_o^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中所有包含原点为其内点的星体的集合，$K,L\in\mathcal{S}_o^n$，且 $\rho_K(\cdot),\rho_L(\cdot)$ 分别为它们的径向函数。

$\bar{V}_{-\phi}(K,L)$ 可以看作是 K 和 L 的规范化的对偶 Orlicz 混合体积。事实上，$\bar{V}_{-\phi}(K,L)$ 是 K 和 L 的规范化的对偶调和 L_p-混合体积的推广。令 $\phi(t)=|t|^p$ 且 $p\in(0,\infty)$，则规范化的对偶调和 L_p-混合体积为

$$\bar{V}_{-p}(K,L)=\left(\frac{V_{-p}(K,L)}{|K|}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}}\left(\frac{\rho_K(u)}{\rho_L(u)}\right)^p\rho_K^n(u)\mathrm{d}S(u)\right)^{\frac{1}{p}};$$

对于 $p=\infty$，有

$$\bar{V}_{-\infty}(K,L)=\max_{u\in S^{n-1}}\left(\frac{\rho_K(u)}{\rho_L(u)}\right).$$

值得指出的是，我们这里对 ϕ 的限制是凸的，也就是说，本文对对偶 L_p-John 椭球的推广是对于 $1\le p\le\infty$ 这个范围内的。

现在，我们考虑如下优化问题。

优化问题：若 $\phi\in\mathcal{C}$ 以及 $K\in\mathcal{K}_o^n$。在所有原点对称的椭球中，找到一个椭球 E 是下面极值问题的解：

$$\max_E\left(\frac{\omega_n}{|E|}\right)^{\frac{1}{n}} \text{限制于 } \bar{V}_{-\phi}(K,E)\le 1, \tag{$S_{-\phi}$}$$

这个满足约束条件的最大化问题的椭球 E 称之为 K 的 $S_{-\phi}$ 解。其对偶问题是：

$$\min_E \bar{V}_{-\phi}(K,E) \text{限制于 } |E|=\omega_n, \tag{$\bar{S}_{-\phi}$}$$

这个满足约束条件的最小化问题的椭球 E 称之为 K 的 $\bar{S}_{-\phi}$ 解。

问题 $S_{-\phi}$(或 $\bar{S}_{-\phi}$)的解的存在性可由 Blaschke 选择定理得到保证，我们将在第 4 节给出证明。$S_{-\phi}$ 和 $\bar{S}_{-\phi}$ 的解只差一个标量因子，即下面的引理 1.1。

引理 1.1：设 $K\in\mathcal{K}_o^n$。若 E_0 是一个关于原点对称的椭球，它是关于 K 的 $S_{-\phi}$ 的解，则

$$\left(\frac{\omega_n}{|E_0|}\right)^{\frac{1}{n}} E_0$$

是一个关于 K 的 $\bar{S}_{-\phi}$ 的解。反之，若 E_1 是一个关于原点对称的椭球，它是关于 K 的 $\bar{S}_{-\phi}$ 的解，则

$$\bar{V}_{-\phi}(K,E_1)E_1$$

是一个关于 K 的 $S_{-\phi}$ 的解。

引理 1.1 的证明将在第 4 节给出。进一步，上面最优化问题的解及解的特征可以表述如下：

定理 1.1：若 $\phi\in\mathcal{C}$ 以及 $K\in\mathcal{K}_o^n$，那么 $S_{-\phi}$ 和 $\bar{S}_{-\phi}$ 有唯一解，而且椭球 E 是 $S_{-\phi}$ (或者 $\bar{S}_{-\phi}$)的解当且仅当它满足

$$\rho_{E^\circ}^{-2}(x)=\frac{\beta}{n|K|\bar{V}_{-\phi}(K,E)}\int_{S^{n-1}}\phi'\left(\frac{\rho_K(u)}{\rho_E(u)\bar{V}_{-\phi}(K,E)}\right)\rho_E(u)\rho_K^{n+1}(u)\langle x,u\rangle^2\,\mathrm{d}S(u), \tag{1}$$

对于所有 $x\in\mathbb{R}^n$ 和适当的 $\beta>0$。其中 E° 表示 E 的极体。

因此，解的存在唯一性允许我们提出如下定义。

定义 1.2：若 $\phi\in\mathcal{C}$ 以及 $K\in\mathcal{K}_o^n$。在所有关于原点对称的椭球 E 中，满足下列有约束最大化极值问题

$$\max_E\left(\frac{\omega_n}{|E|}\right)^{\frac{1}{n}} \text{限制于 } \bar{V}_{-\phi}(K,E)\le 1$$

的解的唯一椭球称为 K 的对偶 Orlicz John 椭球，且记为 $E_{-\phi}K$。在所有原点对称的椭球 E 中，满足下列有约束最小化极值问题

$$\min_E \bar{V}_{-\phi}(K,E) \text{限制于 } |E|=\omega_n$$

的解的唯一椭球称为 K 的规范化的对偶 Orlicz John 椭球，且记为 $\bar{E}_{-\phi}K$。

2. 记号和预备知识

本文在配备了欧氏内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的 $\mathbb{R}^n$ 中讨论，记 $|\cdot|$ 为其相应的欧氏范数。用 B_2^n 和 S^{n-1} 分别表示欧氏单位球和单位球面。符号 $\mathcal{E}^n$ 专指 $\mathbb{R}^n$ 中原点对称椭球的集合。按惯例，设 $\mathrm{GL}(n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中非奇异的线性变换群，$\mathrm{SL}(n)$ 表示 $\mathrm{GL}(n)$ 中行列式 $\det(T)=1$ 的线性变换子群，$\mathrm{O}(n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的正交变换群。对于 $T\in\mathrm{GL}(n)$，记 T^t **为** T 的转置，T^{-t} 为 T 的转置的逆。如果 $u\in S^{n-1}$，则 $u\otimes u$ 为矩阵 uu^t，其定义是

$u\otimes u(x)=\langle u,x\rangle u$ 对任意 $x\in\mathbb{R}^n$。对于 $n\times n$ 矩阵 $A=(a_{ik}),B=(b_{ik})$，其内积 $\langle A,B\rangle$ 定义为 $\sum a_{ik}b_{ik}$，相应的矩阵范数分别为

$$\|A\|=\left(\sum a_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}}\text{ 和 }\|B\|=\left(\sum b_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

如果 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体 K 是紧的有非空内部的凸集，则它的支撑函数 $h_K(\cdot):\mathbb{R}^n\to(0,\infty)$ 被定义为：对于任意的 $x\in\mathbb{R}^n$，$h_K(x)=\max\{\langle x,y\rangle:y\in K\}$。两个凸体 K 和 L 之间的 Hausdorff 距离 δ 被定义为：

$$\delta(K,L)=|h_K-h_L|_\infty:=\max_{u\in S^{n-1}}|h_K(u)-h_L(u)|.$$

我们记 $\mathcal{S}_o^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中关于原点的星体的集合。对于 $K\in\mathcal{S}_o^n$，它的径向函数被定义为：对于任意的 $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{o\}$，$\rho_K(x)=\max\{\lambda>0:\lambda x\in K\}$。$\mathbb{R}^n$ 中的星体 K 和 L 称为是膨胀的，如果 $\rho_K(u)/\rho_L(u)$ 的值不依赖于 $u\in S^{n-1}$。从径向函数的定义立即可得：对于紧的星体 $K,L\subset\mathbb{R}^n$，有

$$K\subseteq L\quad\Leftrightarrow\quad\rho_K\le\rho_L.\tag{2}$$

如果 $T\in\mathrm{GL}(n)$，那么

$$\rho_{TK}(x)=\rho_K\left(T^{-1}x\right).\tag{3}$$

显然，如果 $c>0$，凸体 $cK=\{cx:x\in K\}$ 的径向函数为

$$\rho_{cK}(\cdot)=c\rho_K(\cdot).\tag{4}$$

$K,L\in\mathcal{S}_o^n$ 的径向距离 $\tilde{\delta}$ 被定义为：

$$\tilde{\delta}(K,L)=|\rho_K-\rho_L|_\infty:=\max_{u\in S^{n-1}}|\rho_K(u)-\rho_L(u)|.$$

设 $K\in\mathcal{S}_o^n$，定义实数 R_K 和 r_K 为

$$R_K=\max_{u\in S^{n-1}}\rho_K(u),\quad r_K=\min_{u\in S^{n-1}}\rho_K(u).$$

凸体 $K\in\mathcal{K}_o^n$ 的 Minkowski 泛函定义为 $\|x\|_K=\min\{t>0:x\in tK\}$。在这种情况下，有 $\rho_K^{-1}(x)=\|x\|_K=h_{K^\circ}(x)$，其中 K° 是 K 的极集，其定义为：

$$K^\circ=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\langle x,y\rangle\le 1,\ \forall y\in K\right\}.$$

容易得到 $\left(K^\circ\right)^\circ=K$。且凸体的极具有性质：如果 $K\in\mathcal{K}_o^n,T\in\mathrm{GL}(n)$，则 $(TK)^\circ=T^{-t}K^\circ$。

给定实数 $p>0$，对于星体 $K,L\in\mathcal{S}_o^n$ 以及 $\varepsilon>0$，L_p-调和径向组合 $K\tilde{+}_{-p}\varepsilon\cdot L\in\mathcal{S}_o^n$ 是一个星体，定义为：

$$\rho_{K\tilde{+}_{-p}\varepsilon\cdot L}^{-p}(x)=\rho_K^{-p}(x)+\varepsilon\rho_L^{-p}(x),\quad x\in\mathbb{R}^n\setminus\{o\}.\tag{5}$$

对偶调和 L_p-混合体积由 Lutwak 引进[5]，其定义为：

$$-\frac{n}{p}V_{-p}(K,L)=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\left|K\tilde{+}_{-p}\varepsilon\cdot L\right|-|K|}{\varepsilon}.\tag{6}$$

由定义(5)式和(6)式，可以得到下列关于星体 K 和 L 的对偶调和 L_p-混合体积 $V_{-p}(K,L)$ 的积分表达式[5] [7]：

$$V_{-p}(K,L)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\rho_K^{n+p}(u)\rho_L^{-p}(u)\mathrm{d}S(u).\tag{7}$$

显然，由(7)式可得体积的极坐标公式：

$$|K| = V_{-p}(K,K) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} \rho_K^n(u)\,\mathrm{d}S(u). \tag{8}$$

关于星体 K 和 L 的对偶调和 L_p-混合体积的 Minkowski 不等式为：

$$V_{-p}(K,L) \ge |K|^{\frac{n+p}{n}} |L|^{-\frac{p}{n}}, \tag{9}$$

等号成立当且仅当 K 与 L 互相膨胀。

这一不等式可由 Hölder 不等式和积分表达式(7)直接得到。特别地，不等式(9)中 $p=1$ 的情形是：

$$V_{-1}(K,L) \ge |K|^{\frac{n+1}{n}} |L|^{-\frac{1}{n}}, \tag{10}$$

等号成立当且仅当 K 与 L 互相膨胀。

3. $\bar{V}_{-\phi}(K,L)$的基本性质

由于函数 ϕ 在 $[0,\infty)$ 上是严格递增的，那么函数

$$\lambda \mapsto \frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}} \phi\left(\frac{\rho_K(u)}{\lambda\rho_L(u)}\right)\rho_K^n(u)\,\mathrm{d}S(u)$$

在 $(0,\infty)$ 内是严格递减的，且这个函数也是连续的。这样，对于 $K,L \in \mathcal{S}_o^n$，

$$\bar{V}_{-\phi}(K,L) = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}} \phi\left(\frac{\rho_K(u)}{\lambda\rho_L(u)}\right)\rho_K^n(u)\,\mathrm{d}S(u) = 1. \tag{11}$$

而且由 ϕ 的单调性可得，如果 $\phi_1,\phi_2 \in \mathcal{C}$，则

$$\phi_1 \le \phi_2 \quad \Rightarrow \quad \bar{V}_{-\phi_1}(K,L) \le \bar{V}_{-\phi_2}(K,L). \tag{12}$$

由于 ϕ 在 $[0,\infty)$ 上是严格递增的、凸的且 $\phi(0)=0$，那么存在实数 $0<c_\phi<\infty$，使得 $\phi(c_\phi)=1$。

引理 3.1：若 $\phi \in \mathcal{C}, L_1, L_2 \in \mathcal{S}_o^n$，则

$$L_1 \subseteq L_2 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{V}_{-\phi}(K,L_1) \ge \bar{V}_{-\phi}(K,L_2).$$

证明：令 $\bar{V}_{-\phi}(K,L_1)=\lambda_1$ 和 $\bar{V}_{-\phi}(K,L_2)=\lambda_2$。于是由 $\bar{V}_{-\phi}(\cdot,\cdot)$ 的定义和(11)式，可得

$$\frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}} \phi\left(\frac{\rho_K(u)}{\lambda\rho_{L_1}(u)}\right)\rho_K^n(u)\,\mathrm{d}S(u) = 1,$$

以及

$$\frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}} \phi\left(\frac{\rho_K(u)}{\lambda\rho_{L_2}(u)}\right)\rho_K^n(u)\,\mathrm{d}S(u) = 1.$$

又由(2)式可得

$$L_1 \subseteq L_2 \quad \Leftrightarrow \quad \rho_{L_1}(u) \le \rho_{L_2}(u).$$

以上三式结合，并注意到 $\phi \in \mathcal{C}$ 在 $[0,\infty)$ 上单调递增，则得

$$\bar{V}_{-\phi}(K,L_1) = \lambda_1 \ge \lambda_2 = \bar{V}_{-\phi}(K,L_2).$$

反之，若 $\lambda_1 \ge \lambda_2$，则 $L_1 \subseteq L_2$ 显然成立。

接下来，为了建立$\bar{V}_{-\phi}(\cdot,\cdot)$的连续性，我们需要对$\bar{V}_{-\phi}(\cdot,\cdot)$进行粗略的上下界估计。

引理 3.2：若$\phi\in\mathcal{C}$以及$K,L\in\mathcal{S}_o^n$，那么

$$\frac{r_K}{c_\phi R_K}\le\bar{V}_{-\phi}(K,L)\le\frac{R_K}{c_\phi r_K}.$$

证明：由于$\phi\in\mathcal{C}$，那么存在实数$c_\phi, 0<c_\phi<\infty$，使得$\phi(c_\phi)=1$。令$\bar{V}_{-\phi}(K,L)=\lambda$。由(11)式可得

$$\frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}}\phi\left(\frac{\rho_K(u)}{\lambda\rho_L(u)}\right)\rho_K^n(u)\,\mathrm{d}S(u)=1.$$

再由ϕ的单调性和体积的极坐标公式(8)，得到

$$\begin{aligned}\phi(c_\phi)=1&=\frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}}\phi\left(\frac{\rho_K(u)}{\lambda\rho_L(u)}\right)\rho_K^n(u)\,\mathrm{d}S(u)\\&\le\frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}}\phi\left(\frac{R_K}{\lambda r_L}\right)\rho_K^n(u)\,\mathrm{d}S(u)\\&=\phi\left(\frac{R_K}{\lambda r_L}\right)\int_{S^{n-1}}\frac{1}{n|K|}\rho_K^n(u)\,\mathrm{d}S(u)\\&=\phi\left(\frac{R_K}{\lambda r_L}\right).\end{aligned}$$

这蕴含着

$$\bar{V}_{-\phi}(K,L)=\lambda\le\frac{R_K}{c_\phi r_K}.$$

另一方面，我们也可得到类似的下界估计：

$$\bar{V}_{-\phi}(K,L)\ge\frac{r_K}{c_\phi R_K}.$$

引理 3.2 证毕。

若$K,L\in\mathcal{S}_o^n, c>0$，由定义 1.1 和(4)式，我们容易得到

$$\bar{V}_{-\phi}(cK,L)=c\bar{V}_{-\phi}(K,L)\tag{13}$$

和

$$\bar{V}_{-\phi}(K,cL)=c^{-1}\bar{V}_{-\phi}(K,L).\tag{14}$$

引理 3.3：如果$K_i,L_i\in\mathcal{S}_o^n$，那么

$$K_i\to K\in\mathcal{S}_o^n\text{ 和 }L_i\to L\in\mathcal{S}_o^n\quad\Rightarrow\quad\bar{V}_{-\phi}(K_i,L_i)\to\bar{V}_{-\phi}(K,L),$$

对于任意$\phi\in\mathcal{C}$。

假设$\bar{V}_{-\phi}(K_i,L_i)=\lambda_i$，由引理 3.2 可知

$$\frac{r_{K_i}}{c_\phi R_{K_i}}\le\bar{V}_{-\phi}(K_i,L_i)\le\frac{R_{K_i}}{c_\phi r_{K_i}}.$$

由于$K_i\to K\in\mathcal{S}_o^n$以及$L_i\to L\in\mathcal{S}_o^n$，那么$r_{K_i}\to r_K>0, r_{L_i}\to r_L>0$以及$R_{K_i}\to R_K<\infty, R_{L_i}\to R_L<\infty$。结合$K_i,L_i$的紧性，则存在实数$a,b$使得$0<a\le\lambda_i\le b<\infty$，对所有的$i$。

为了证明有界序列$\{\lambda_i\}$收敛到$\bar{V}_{-\phi}(K,L)$，我们只须证明$\{\lambda_i\}$中任意收敛子列收敛到$\bar{V}_{-\phi}(K,L)$。不失一般性，设$\{\lambda_i\}$的任一收敛子列仍记为$\{\lambda_i\}$。假设这个子列$\lambda_i \to \lambda_0$。显然，$0 < a \le \lambda_0 \le b < \infty$。令$\tilde{K}_i = \lambda_i K_i$和$\tilde{L}_i = \lambda_i L_i$。那么

$$\tilde{K}_i \to \lambda_0 K, \tilde{L}_i \to \lambda_0 L.$$

由(13)式和$\bar{V}_{-\phi}(K_i, L_i) = \lambda_i$，可得

$$\frac{1}{\lambda_i}\bar{V}_{-\phi}(K_i, L_i) = \bar{V}_{-\phi}(K_i, \lambda_i L_i) = \bar{V}_{-\phi}(K_i, \tilde{L}_i) = 1.$$

于是，再由(4)式和(11)式，我们得到对所有i，

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{n|K_i|}\int_{S^{n-1}} \phi\left(\frac{\rho_{K_i}(u)}{\rho_{\tilde{L}_i}(u)}\right)\rho_{K_i}^n(u)\,\mathrm{d}S(u) \\ &= \frac{1}{n|\tilde{K}_i|}\int_{S^{n-1}} \phi\left(\frac{\rho_{\tilde{K}_i}(u)}{\lambda_i \rho_{\tilde{L}_i}(u)}\right)\rho_{\tilde{K}_i}^n(u)\,\mathrm{d}S(u). \end{aligned}$$

同时$\tilde{K}_i \to \lambda_0 K$和$\tilde{L}_i \to \lambda_0 L$蕴涵着函数$\rho_{\tilde{K}_i} \to \rho_{\lambda_0 K}, \rho_{\tilde{L}_i} \to \rho_{\lambda_0 L}$在$S^{n-1}$上一致收敛。因此，利用$\phi$的连续性以及$\lambda_i \to \lambda_0$，可得

$$\frac{1}{n|\lambda_0 K|}\int_{S^{n-1}} \phi\left(\frac{\rho_{\lambda_0 K}(u)}{\lambda_0 \rho_{\lambda_0 L}(u)}\right)\rho_{\lambda_0 K}^n(u)\,\mathrm{d}S(u) = 1,$$

结合(11)式，(13)式和(14)式，便得

$$\bar{V}_{-\phi}(\lambda_0 K, \lambda_0 L) = \bar{V}_{-\phi}(K, L) = \lambda_0.$$

这就得到了所需要的结果。

下面的引理说明函数$\bar{V}_{-\phi}(K,L)$对于ϕ也是连续的。

引理 3.4：如果$\phi_i \in \mathcal{C}$，那么对于任意$K, L \in \mathcal{S}_o^n$，

$$\phi_i \to \phi \in \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad \bar{V}_{-\phi_i}(K,L) \to \bar{V}_{-\phi}(K,L).$$

证明：令$\bar{V}_{-\phi_i}(K,L) = \lambda_i$。由引理 3.2 给出

$$\frac{r_K}{c_{\phi_i} R_K} \le \lambda_i \le \frac{R_K}{c_{\phi_i} r_K}.$$

由于$\phi_i \to \phi$，那么$c_{\phi_i} \to c_\phi$，于是存在实数a, b使得对所有的i，$0 < a \le \lambda_i \le b < \infty$。

为了证明有界序列$\{\lambda_i\}$收敛到$\bar{V}_{-\phi}(K,L)$，我们只须证明$\{\lambda_i\}$中任意收敛子列收敛到$\bar{V}_{-\phi}(K,L)$。不失一般性，设$\{\lambda_i\}$的任一收敛子列仍是$\{\lambda_i\}$。假设这个子列$\lambda_i \to \lambda_0$。显然，$0 < a \le \lambda_0 \le b < \infty$。因为$\bar{V}_{-\phi_i}(K,L) = \lambda_i$，由(11)式可得

$$\frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}} \phi_i\left(\frac{\rho_K(u)}{\lambda_i \rho_L(u)}\right)\rho_K^n(u)\,\mathrm{d}S(u) = 1.$$

结合$\phi_i \to \phi \in \mathcal{C}$以及$\lambda_i \to \lambda_0 \in (0, \infty)$，我们得到

$$\frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}} \phi\left(\frac{\rho_K(u)}{\lambda_0 \rho_L(u)}\right)\rho_K^n(u)\,\mathrm{d}S(u) = 1.$$

即 $\bar{V}_{-\phi}(K,L)=\lambda_0$。于是 $\bar{V}_{-\phi_i}(K,L)\to\bar{V}_{-\phi}(K,L)$。

下面的是 $\bar{V}_{-\phi}(K,L)$ 的仿射性质：

引理 3.5：如果 $K,L\in\mathcal{S}_o^n,\phi\in\mathcal{C}$ 以及 $T\in\mathrm{SL}(n)$，那么

$$\bar{V}_{-\phi}(TK,L)=\bar{V}_{-\phi}(K,T^{-1}L).$$

证明：由 $\bar{V}_{-\phi}(K,L)$ 的定义和(3)式，我们得到

$$\begin{aligned}
&\bar{V}_{-\phi}(TK,L)\\
&=\inf\left\{\lambda>0:\frac{1}{n|TK|}\int_{S^{n-1}}\phi\left(\frac{\rho_{TK}(u)}{\lambda\rho_L(u)}\right)\rho_{TK}^n(u)\mathrm{d}S(u)\le 1\right\}\\
&=\inf\left\{\lambda>0:\frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}}\phi\left(\frac{\rho_K(T^{-1}u)}{\lambda\rho_L(u)}\right)\rho_K^n(T^{-1}u)\mathrm{d}S(u)\le 1\right\}\\
&=\inf\left\{\lambda>0:\frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}}\phi\left(\frac{\rho_K(T^{-1}u)}{\lambda\rho_L(TT^{-1}u)}\right)\rho_K^n(T^{-1}u)\mathrm{d}S(TT^{-1}u)\le 1\right\}\\
&=\inf\left\{\lambda>0:\frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}}\phi\left(\frac{\rho_K(T^{-1}u)}{\lambda\rho_{T^{-1}L}(T^{-1}u)}\right)\rho_K^n(T^{-1}u)|\det T|\mathrm{d}S(T^{-1}u)\le 1\right\}\\
&=\inf\left\{\lambda>0:\frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}}\phi\left(\frac{\rho_K(v)}{\lambda\rho_{T^{-1}L}(v)}\right)\rho_K^n(v)\mathrm{d}S(v)\le 1\right\}\quad\left(v=\frac{T^{-1}u}{T^{-1}u\|}\in S^{n-1}\right)\\
&=\bar{V}_{-\phi}(K,T^{-1}L)
\end{aligned}$$

这就完成了证明。

结合引理 3.5，(13)式和(14)式，我们得到对于 $T\in\mathrm{GL}(n)$，

$$\bar{V}_{-\phi}(TK,TL)=\bar{V}_{-\phi}(K,L).$$

下面的定理是规范化的对偶 Orlicz-Minkowski 不等式。

定理 3.1：如果 $\phi\in\mathcal{C},\phi(c_\phi)=1$ 以及 $K,L\in\mathcal{S}_o^n$，那么

$$\bar{V}_{-\phi}(K,L)\ge c_\phi^{-1}\left(\frac{|K|}{|L|}\right)^{\frac{1}{n}},\tag{15}$$

等式成立当且仅当 K 和 L 是膨胀的。

证明：由于 $\phi\in\mathcal{C}$，那么存在实数 $0<c_\phi<\infty$ 使得 $\phi(c_\phi)=1$。由(11)式，Jensen 不等式以及 L_1-对偶调和混合体积的 Minkowski 不等式(10)，我们有

$$\begin{aligned}
\phi(c_\phi)=1&=\frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}}\phi\left(\frac{\rho_K(u)}{\bar{V}_{-\phi}(K,L)\rho_L(u)}\right)\rho_K^n(u)\mathrm{d}S(u)\\
&\ge\phi\left(\frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}}\frac{\rho_K(u)}{\bar{V}_{-\phi}(K,L)\rho_L(u)}\times\rho_K^n(u)\mathrm{d}S(u)\right)\\
&=\phi\left(\frac{V_{-1}(K,L)}{|K|\bar{V}_{-\phi}(K,L)}\right)\ge\phi\left(\frac{|K|^{\frac{n+1}{n}}|L|^{-\frac{1}{n}}}{|K|\bar{V}_{-\phi}(K,L)}\right)=\phi\left(\frac{|K|^{\frac{1}{n}}|L|^{-\frac{1}{n}}}{\bar{V}_{-\phi}(K,L)}\right).
\end{aligned}\tag{16}$$

由 ϕ 的严格单调性知，上式蕴涵着

$$\bar{V}_{-\phi}(K,L)^n \ge c_\phi^{-n}|K||L|^{-1} = |K||c_\phi L|^{-1}.$$

等式成立的条件可由Jensen不等式和L_1-对偶调和混合体积Minkowski不等式的等号成立的条件得到。如果 ϕ 是严格凸的，那么Jensen不等式蕴涵着(16)式也是严格的，除非 ϕ 是常数，也就是说，$\rho_K(u)/\rho_L(u)$ 对所有的 $u \in S^{n-1}$ 是个常数，即 K 和 L 是膨胀的。如果 $\phi \in \mathcal{C}$ 不是严格凸的，那么 ϕ 的严格单调性意味着 ϕ 必定在一些区间 $I \subset [0,\infty)$ 上是线性的，其它是严格凸的。如果 ϕ 是线性的，那么(16)式等号自动成立。

结合 L_1-对偶调和混合体积的Minkowski不等式等号成立的条件，我们得到不等式(15)等号成立当且仅当 K 和 L 是膨胀的。定理3.1证毕。

注意到如果 $\phi(t)=|t|^p$，$p \ge 1$，那么 $c_\phi = 1$，不等式(15)就是 L_p-对偶调和混合体积Min-kowski不等式(9)。

4. 主要结果的证明

在本节中，我们首先给出引理1.1的证明。

引理1.1的证明： 首先证明 $S_{-\phi}$ 中的约束条件可以转化为 $\bar{V}_{-\phi}(K,E)=1$，即满足极值问题 $S_{-\phi}$ 的椭球 E_0 必须满足 $\bar{V}_{-\phi}(K,E_0)=1$。事实上，设 $E \in \mathcal{E}^n$ 且 $\bar{V}_{-\phi}(K,E)<1$。由(14)式知 $\bar{V}_{-\phi}\left(K,\bar{V}_{-\phi}(K,E)E\right)=1$。因为

$$\frac{\omega_n}{\left|\bar{V}_{-\phi}(K,E)E\right|} = \frac{\omega_n}{\bar{V}_{-\phi}(K,E)^n|E|} > \frac{\omega_n}{|E|},$$

这意味着 E 不是 $S_{-\phi}$ 的解答。

现在设 $E' \in \mathcal{E}^n$ 且 $|E'| \le \omega_n$。由(14)式知 $\bar{V}_{-\phi}\left(K,\bar{V}_{-\phi}(K,E')E'\right)=1$，因此 $\bar{V}_{-\phi}(K,E')E'$ 满足 $S_{-\phi}$ 的约束条件。又因为 E_0 是极值问题 $S_{-\phi}$ 的解答，则有 $\left|\bar{V}_{-\phi}(K,E')E'\right| \ge |E_0|$。因此，由假设 $|E'| \le \omega_n$，事实 $\bar{V}_{-\phi}(K,E_0)=1$ 和(14)式，我们有

$$\begin{aligned}\bar{V}_{-\phi}(K,E') &\ge \left(\frac{|E_0|}{|E'|}\right)^{\frac{1}{n}} \ge \left(\frac{|E_0|}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}} = \bar{V}_{-\phi}(K,E_0)\left(\frac{|E_0|}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \bar{V}_{-\phi}\left(K,\left(\frac{\omega_n}{|E_0|}\right)^{\frac{1}{n}}E_0\right),\end{aligned}$$

这说明 $\left(\omega_n/|E_0|\right)^{\frac{1}{n}}E_0$ 是 $\bar{S}_{-\phi}$ 的解。

反之，设 $E \in \mathcal{E}^n$ 被 $\bar{V}_{-\phi}(K,E) \le 1$ 所控制。因为 $\left(\omega_n/|E|\right)^{\frac{1}{n}}E$ 满足 $\bar{S}_{-\phi}$ 的约束条件，而 E_1 是满足约束条件 $|E_1|=\omega_n$ 的 $\bar{S}_{-\phi}$ 的解，于是有

$$\begin{aligned}\left|\bar{V}_{-\phi}(K,E_1)E_1\right| &= \bar{V}_{-\phi}(K,E_1)^n|E_1| \le \bar{V}_{-\phi}\left(K,\left(\frac{\omega_n}{|E|}\right)^{\frac{1}{n}}E\right)^n|E_1| \\ &= \frac{|E|}{\omega_n}\bar{V}_{-\phi}(K,E)^n|E_1| = |E|\bar{V}_{-\phi}(K,E)^n \le |E|.\end{aligned}$$

因此 $\left|\bar{V}_{-\phi}(K,E_1)E_1\right| \le |E|$，即

$$\frac{\omega_n}{\left|\bar{V}_{-\phi}(K,E_1)E_1\right|} \ge \frac{\omega_n}{|E|},$$

这说明$\overline{V}_{-\phi}(K,E_1)E_1$是$S_{-\phi}$的解。证毕。

著名的 Blaschke 选择定理表明，如果$\{K_i\}$是一族满足条件

$$rB_2^n \subseteq K_i \subseteq RB_2^n$$

的凸体，其中r和R为两个给定的常数且$0<r<R<\infty$，那么$\{K_i\}$一定有一个收敛到某一凸体K的子列$\{K_{i_k}\}$。

假设X是$\mathbb{R}^n$中的一个有界集，定义它的通径(diameter)为

$$\operatorname{diam}(X)=\sup\{|x-y|:x,y\in X\},$$

其中$|x-y|$表示x和y之间的由欧氏范数诱导出的欧氏距离。

引理 4.1：若$\phi\in\mathcal{C},K\in\mathcal{K}_o^n$，那么$S_{-\phi}$和$\overline{S}_{-\phi}$的解存在。

证明：设$K\in\mathcal{K}_o^n$，则K满足$r_K B_2^n\subseteq K\subseteq R_K B_2^n$。则由(2)式知$r_K\le\rho_K(u)\le R_K$。设$\{E_i\}\subset\mathcal{E}^n$是一族非退化的原点对称椭球，根据 Blaschke 选择定理，我们只需证明存在常数$M\ge\frac{2r_K}{c_\phi}>0$使得$\frac{2r_K}{c_\phi}B_2^n\subseteq E_i\subseteq MB_2^n$，其中$c_\phi$满足$\phi(c_\phi)=1$。根据凸体的通径定义和径向函数的定义，易知对于所有的$u\in S^{n-1}$，有

$$\rho_{E_i}(u)\le\frac{1}{2}\operatorname{diam}(E_i).$$

设$\overline{V}_{-\phi}(K,E_i)=\lambda_i$。由(11)式，$\phi$的单调递增性，Jensen 不等式以及星体的极坐标体积公式(8)，得到

$$\begin{aligned}\phi(c_\phi)=1&=\frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}}\phi\left(\frac{\rho_K(u)}{\lambda_i\rho_{E_i}(u)}\right)\rho_K^n(u)\,\mathrm{d}S(u)\\&\ge\frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}}\phi\left(\frac{2r_K}{\lambda_i\operatorname{diam}(E_i)}\right)\rho_K^n(u)\,\mathrm{d}S(u)\\&\ge\left(\frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}}\frac{2r_K\rho_K^n(u)}{\lambda_i\operatorname{diam}(E_i)}\mathrm{d}S(u)\right)\\&=\phi\left(\frac{2r_K}{\lambda_i\operatorname{diam}(E_i)}\right),\end{aligned}$$

这个不等式意味着

$$\operatorname{diam}(E_i)\ge\frac{2r_K}{\lambda_i c_\phi}=\frac{2r_K}{\overline{V}_{-\phi}(K,E_i)c_\phi},$$

因此，由$S_{-\phi}$的约束条件$\overline{V}_{-\phi}(K,E_i)\le1$，可得

$$\operatorname{diam}(E_i)\ge\frac{2r_K}{c_\phi},$$

即

$$E_i\supseteq\frac{2r_K}{c_\phi}B_2^n,\ i=1,2,\cdots.$$

另一方面，设$\varepsilon=\{E_i':|E_i'|=\omega_n,E_i'\in\mathcal{E}^n\}\subseteq\mathcal{E}^n\subset(\mathcal{K}_o^n,\delta)$，则$\varepsilon$是度量空间$(\mathcal{K}_o^n,\delta)$中的紧集。因此存在通用常数$R_E$使得对于任意$E_i'\in\varepsilon$有$E_i'\subseteq R_E B_2^n$。令$E_i=\overline{V}_{-\phi}(K,E_i')E_i'$，显然$E_i$满足$S_{-\phi}$的约束条件，且

$$E_i\subseteq\overline{V}_{-\phi}(K,E_i')R_E B_2^n.$$

固定 $K\in\mathcal{K}_o^n$。由引理 3.3 知 $\bar{V}_{-\phi}(K,E_i')$ 是紧集 ε 上的连续泛函，故存在正数 $M_0>0$ 使得对于任意 $E_i'\in\varepsilon$ 有 $\bar{V}_{-\phi}(K,E_i')\le M_0$。由此，并结合上式即得

$$E_i\subseteq MB_2^n,$$

这里 $M=M_0R_E$。

这样，满足 $S_{-\phi}$ 的椭球序列 $\{E_i\}$ 的通径是一致有界的，因而有下确界，那么 $S_{-\phi}$ 的存在性可由 Blaschke 选择定理保证。由于 $S_{-\phi}$ 和 $\bar{S}_{-\phi}$ 的解只差一个有限的标量因子，因此 $\bar{S}_{-\phi}$ 的解的存在性也能保证。

由于 $S_{-\phi}$ 和 $\bar{S}_{-\phi}$ 的解的存在性已经建立，那么现在只需证明解的唯一性和其特征表示。注意 $S_{-\phi}$ 和 $\bar{S}_{-\phi}$ 的解只差一个标量因子，所以我们只需证明 $S_{-\phi}$ 的解情形。

由引理 3.5 中 $\bar{V}_{-\phi}(K,L)$ 的仿射性质，我们可以假设 K 的 $S_{-\phi}$ 的解的椭球为欧氏单位球 B_2^n，那么极值问题 $S_{-\phi}$ 可描述为：对于 $T\in\mathrm{GL}(n),\det(T)\ge 1$，使得

$$\bar{V}_{-\phi}(K,TB_2^n)\ge\bar{V}_{-\phi}(K,B_2^n). \tag{17}$$

这个又等价于

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|K|}\int_{S^{n-1}}\phi\left(\frac{\rho_K(u)}{\bar{V}_{-\phi}(K,B_2^n)\rho_{TB_2^n}(u)}\right)\rho_K^n(u)\mathrm{d}S(u)\\&\ge\frac{1}{|K|}\int_{S^{n-1}}\phi\left(\frac{\rho_K(u)}{\bar{V}_{-\phi}(K,B_2^n)\rho_{B_2^n}(u)}\right)\rho_K^n(u)\mathrm{d}S(u).\end{aligned} \tag{18}$$

事实上，由引理 3.1 知，(17)式蕴涵着 $TB_2^n\subseteq B_2^n$，即 $\rho_{TB_2^n}(u)\le\rho_{B_2^n}(u)$。由此和 ϕ 在区间 $(0,\infty)$ 上的单调递增性，我们立即知道(18)式成立。

为了建立 $S_{-\phi}$ 极值问题的特征性质，我们需要引进一些定义和记号。若 T 是一非奇异的 $n\times n$ 矩阵，那么 T 能表示成 $T=RA$，其中 R 是对称正定矩阵，A 是正交矩阵[3]。于是我们可把一个 $n\times n$ 对称矩阵 $T=(a_{ij})_{n\times n}$ 看成是点

$$(a_{11},\cdots,a_{1n},a_{22},\cdots,a_{2n},\cdots,a_{nn})^t\in\mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}.$$

这样所有 $n\times n$ 对称正定矩阵可表示成一开凸锥 $\mathcal{P}\subset\mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$，其顶点在 $\mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ 的原点 O。由于 $\mathbb{R}^n$ 中的非奇异线性变换可看成一非奇异的 $n\times n$ 矩阵，那么由上面的论述可知，在正交变换下，$S_{-\phi}$ 极值问题可以建立在 $\mathcal{P}$ 上。设 $\phi\in\mathcal{C}$ 和 $K\in\mathcal{K}_o^n$，考虑到(18)式，我们定义泛函 $F:\mathcal{P}\to\mathbb{R}$ 为

$$F(K,AB_2^n)=\frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}}\phi\left(\frac{\rho_K(u)|Au|}{\bar{V}_{-\phi}(K,B_2^n)}\right)\rho_K^n(u)\mathrm{d}S(u)$$

对于任意 $A\in\mathcal{P}$。引理 3.3 和 $\phi\in\mathcal{C}$ 说明泛函 F 是连续的。显然 $F(K,B_2^n)=1$。

引理 4.2：若 $\phi\in\mathcal{C}$ 以及 $K\in\mathcal{K}_o^n$，那么

$$\mathcal{F}=\mathcal{F}(A)=\left\{A\in\mathcal{P}:F(K,AB_2^n)\le F(K,B_2^n)\right\}$$

是一闭凸区域，且在边界点 I_n 的邻域内光滑。而且

$$\frac{1}{n|K|\bar{V}_{-\phi}(K,B_2^n)}\int_{S^{n-1}}\phi'\left(\frac{\rho_K(u)}{\bar{V}_{-\phi}(K,B_2^n)}\right)\rho_K^{n+1}(u)u\otimes u\mathrm{d}S(u)\ne O$$

是 $\mathcal{F}$ 在 I_n 的外法向量。

证明： F 的定义和 ϕ 的严格单调性意味着 F 在 $\mathcal{P}$ 中通过顶点 O 的每一条射线 $\{tA:t\geq 0\}$ 上是由 0 到 ∞ 严格递增的，又由 F 的连续性可得 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{P}$ 中的一闭区域。

为了证明区域 $\mathcal{F}$ 是凸的和光滑的，只需证明函数 F 是凸的和光滑的。

事实上，设 $A,B\in\mathcal{P},0\leq\alpha\leq 1$，那么由 $\phi\in\mathcal{C}$ 的单调性和凸性，我们有

$$\begin{aligned}
&F\left(K,\left((1-\alpha)A+\alpha B\right)B_2^n\right)\\
&=\frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}}\phi\left(\frac{\rho_K(u)\left|\left((1-\alpha)A+\alpha B\right)u\right|}{\bar{V}_{-\phi}\left(K,B_2^n\right)}\right)\rho_K^n(u)\mathrm{d}S(u)\\
&\leq\frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}}\phi\left(\frac{\rho_K(u)\left((1-\alpha)|Au|+\alpha|Bu|\right)}{\bar{V}_{-\phi}\left(K,B_2^n\right)}\right)\rho_K^n(u)\mathrm{d}S(u)\\
&\leq\frac{1-\alpha}{n|K|}\int_{S^{n-1}}\phi\left(\frac{\rho_K(u)|Au|}{\bar{V}_{-\phi}\left(K,B_2^n\right)}\right)\rho_K^n(u)\mathrm{d}S(u)+\frac{\alpha}{n|K|}\int_{S^{n-1}}\phi\left(\frac{\rho_K(u)|Bu|}{\bar{V}_{-\phi}\left(K,B_2^n\right)}\right)\rho_K^n(u)\mathrm{d}S(u)\\
&=(1-\alpha)F\left(K,AB_2^n\right)+\alpha F\left(K,BB_2^n\right).
\end{aligned}$$

则 F 在 $\mathcal{P}$ 中是凸的。

由于 F 是凸的，为了证明 F 是光滑的，只需证明对任意 $A\in\mathcal{P}$，F 关于 A 的表值 a_{ik} 的偏导数存在[31]。假设 $h\in\mathbb{R}$ 是一有界数，令矩阵 $A(h)$ 和 A 具有相同的表值，除了 $a_{ik}+h$ 代换 a_{ik}。那么由 Cauchy-Schwarz 不等式，对任意 $u\in S^{n-1}$ 有

$$\left\|A(h)u\right|-|Au\|\leq\left|A(h)u-Au\right|\leq\left|A(h)-A\right||u|\leq|h|.$$

再由 $\phi\in\mathcal{C}$ 的凸性，$\phi(0)=0$，$\bar{V}_{-\phi}\left(K,B_2^n\right)$ 和 $\rho_K(u)$ 的有界性，可得函数

$$\phi\left(\frac{\rho_K(u)\left|A(\cdot)u\right|}{\bar{V}_{-\phi}\left(K,B_2^n\right)}\right):\mathbb{R}\to[0,\infty)$$

在 $\mathbb{R}$ 的每一个有界集上是 Lipschitz 的。因此，

$$\frac{\phi\left(\frac{\rho_K(u)\left|A(h)u\right|}{\bar{V}_{-\phi}\left(K,B_2^n\right)}\right)-\phi\left(\frac{\rho_K(u)|Au|}{\bar{V}_{-\phi}\left(K,B_2^n\right)}\right)}{h}\tag{19}$$

在 S^{n-1} 上有界。

由于 ϕ 是凸的，那么它在 $t\in[0,\infty)$ 几乎处处可微[30] [31]。又因为 A 是一非奇异矩阵，则 ϕ 在 $t=\dfrac{\rho_K(u)|Au|}{\bar{V}_{-\phi}\left(K,B_2^n\right)}$ 几乎处处对所有的 $u\in S^{n-1}$ 可微。基本的计算可得，对几乎所有的 $u\in S^{n-1}$，

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to\infty}\frac{\phi\left(\frac{\rho_K(u)\left|A(h)u\right|}{\bar{V}_{-\phi}\left(K,B_2^n\right)}\right)-\phi\left(\frac{\rho_K(u)|Au|}{\bar{V}_{-\phi}\left(K,B_2^n\right)}\right)}{h}\\
&=\frac{\phi'\left(\frac{\rho_K(u)|Au|}{\bar{V}_{-\phi}\left(K,B_2^n\right)}\right)\left(\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}u_j\right)u_k+\left(\sum_{j=1}^n a_{kj}u_j\right)u_i\right)}{|Au|\bar{V}_{-\phi}\left(K,B_2^n\right)\rho_K^{-1}(u)}.
\end{aligned}\tag{20}$$

由(19)式，(20)式和 Lebesgue 有界收敛定理，我们得到 F 关于 $a_{ik}\left(=a_{ki}\right)$ 的偏导数表达式：

$$\frac{\partial F\left(K,AB_2^n\right)}{\partial a_{ik}}=\frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}}\frac{\phi'\left(\frac{\rho_K(u)|Au|}{\bar{V}_{-\phi}\left(K,B_2^n\right)}\right)\left(\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}u_j\right)u_k+\left(\sum_{j=1}^{n}a_{kj}u_j\right)u_i\right)}{|Au|\bar{V}_{-\phi}\left(K,B_2^n\right)}\rho_K^{n+1}(u)\mathrm{d}S(u),$$

对于 $A\in\mathcal{P}$ 。

这样，F 关于 a_{ik} 的所有偏导数存在。由于 F 是凸的，则 F 是光滑的。令 $A=I_n$，那么 F 关于 I_n 的梯度可写成：

$$\nabla F\left(K,I_nB_2^n\right)=\frac{1}{n|K|\bar{V}_{-\phi}\left(K,B_2^n\right)}\int_{S^{n-1}}\phi'\left(\frac{\rho_K(u)}{\bar{V}_{-\phi}\left(K,B_2^n\right)}\right)\rho_K^{n+1}(u)u\otimes u\mathrm{d}S(u).\tag{21}$$

显然 $\nabla F\left(K,I_nB_2^n\right)\neq O$ 。由于 $\mathcal{F}$ 是闭凸的光滑区域，再结合隐函数存在定理我们便得到所需要的结果。

由(18)式和 F 的定义，我们可以把优化问题 $S_{-\phi}$ 转化为如下极值问题：函数 F 达到最小值当且仅当 $A=I_n$，也就是说，B_2^n 是 F 的最小值位置。

优化问题 $S_{-\phi}$ 的解的唯一性和特征表示可建立如下：

引理 4.3：若 $\phi\in\mathcal{C}$ 以及 $K\in\mathcal{K}_o^n$，那么在正交变换下，B_2^n 是 F 的关于保体积线性变换的唯一的最小值位置。而且，B_2^n 是 F 的最小值位置当且仅当

$$I_n=\frac{\beta}{n|K|\bar{V}_{-\phi}\left(K,B_2^n\right)}\int_{S^{n-1}}\phi'\left(\frac{\rho_K(u)}{\bar{V}_{-\phi}\left(K,B_2^n\right)}\right)\rho_K^{n+1}(u)u\otimes u\mathrm{d}S(u)\tag{22}$$

对于适当的 $\beta>0$ 。

证明：设

$$\mathcal{D}=\left\{A\in\mathcal{P}:\det(A)\geq 1\right\}.$$

那么集合 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{P}$ 中闭的、光滑的且具有非空内部的凸集。而且 I_n 是 $\mathcal{D}$ 在边界点 I_n 的内法向量[1] [2]。由引理 4.2，区域

$$\mathcal{F}=\left\{A\in\mathcal{P}:F\left(K,AB_2^n\right)\leq F\left(K,B_2^n\right)\right\}$$

是凸的且在 I_n 的邻域内光滑。因此，我们断言区域 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{F}$ 在它们的公共边界点 I_n 相切。如果断言不成立，那么区域 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{F}$ 将有重叠，于是存在一 $n\times n$ 矩阵 $A'\in\mathrm{bd}\mathcal{D}\cap\mathrm{int}\mathcal{F}$ 。由 B_2^n 是 F 的最小值位置假设，我们得到

$$F\left(K,B_2^n\right)>F\left(K,A'B_2^n\right)\geq F\left(K,B_2^n\right),$$

这便产生了矛盾。于是区域 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{F}$ 在它们的公共边界点 I_n 相切，这也意味着 B_2^n 是 F 的唯一的最小值位置。

如果 B_2^n 是 F 的最小值位置，那么区域 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{F}$ 在它们的公共边界点 I_n 相切。这样，$\mathcal{F}$ 在 I_n 的外法向量 $\nabla F\left(K,I_nB_2^n\right)$ 是 $\mathcal{D}$ 在 I_n 的内法向量的倍数。因此由(21)可得

$$I_n=\frac{\beta}{n|K|\bar{V}_{-\phi}\left(K,B_2^n\right)}\int_{S^{n-1}}\phi'\left(\frac{\rho_K(u)}{\bar{V}_{-\phi}\left(K,B_2^n\right)}\right)\rho_K^{n+1}(u)u\otimes u\mathrm{d}S(u)$$

对于适当的 $\beta>0$ 。

另一方面，由于 I_n 是区域 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{F}$ 的公共边界点，由(21)式和(22)式，$\mathcal{F}$ 在 I_n 的外法向量和 $\mathcal{D}$ 在 I_n 的

内法向量指向相同，那么区域 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{F}$ 有公共边界点 I_n，这也意味着 B_2^n 是 F 的最小值位置。

定理 1.1 的证明： $\bar{S}_{-\phi}$ 的解的存在性和唯一性已经在引理 4.1 和引理 4.3 中建立，下面只需证明(1)式和(22)式的等价性。注意到(13)式和(14)式，我们可限制线性变换 $T\in\mathrm{GL}(n)$ 为 $T\in\mathrm{SL}(n)$。

由引理 3.5，存在 $T\in\mathrm{SL}(n)$ 使得

$$\bar{V}_{-\phi}(K,E)=\bar{V}_{-\phi}\left(K,TB_2^n\right)=\bar{V}_{-\phi}\left(T^{-1}K,B_2^n\right).$$

设(22)成立，则由(22)式可知 $E\in\mathcal{E}^n$ 是 $F(K,E)$ 的最小值位置当且仅当

$$I_n=\frac{\beta}{n|K|\bar{V}_{-\phi}\left(T^{-1}K,B_2^n\right)}\int_{S^{n-1}}\phi'\left(\frac{\rho_{T^{-1}K}(v)}{\bar{V}_{-\phi}\left(T^{-1}K,B_2^n\right)}\right)\rho_{T^{-1}K}^{n+1}(v)v\otimes v\mathrm{d}S(v)$$

对于适当的 $\beta>0$，这意味着对任意 $x\in\mathbb{R}^n$，

$$|x|^2=\frac{\beta}{n|K|\bar{V}_{-\phi}(K,E)}\int_{S^{n-1}}\phi'\left(\frac{\rho_K(Tv)}{\bar{V}_{-\phi}(K,E)}\right)\rho_{T^{-1}K}^{n+1}(v)\langle x,v\rangle^2\,\mathrm{d}S(v).\tag{23}$$

令 $\langle Tv\rangle=\dfrac{Tv}{|Tv|}=u$，则 $u\in S^{n-1}$。注意到 $\det\left(T^{-1}\right)=1,(TK)^\circ=T^{-t}K^\circ$ 和

$$\left|T^{-1}u\right|=h_{B_2^n}\left(T^{-1}u\right)=h_{T^{-t}B_2^n}(u)=h_{\left(TB_2^n\right)^\circ}(u)=h_{E^\circ}(u)=\frac{1}{\rho_E(u)},\tag{24}$$

可得

$$\begin{aligned}
&n|K|\bar{V}_{-\phi}(K,E)|x|^2\\
&=\beta\int_{S^{n-1}}\phi'\left(\frac{\rho_K(Tv)}{\bar{V}_{-\phi}(K,E)}\right)\rho_K^{n+1}(Tv)\langle x,v\rangle^2\,\mathrm{d}S(v)\\
&=\beta\det\left(T^{-1}\right)\int_{S^{n-1}}\phi'\left(\frac{\left|T^{-1}\langle Tv\rangle\right|\rho_K(\langle Tv\rangle)}{\bar{V}_{-\phi}(K,E)}\right)\frac{\rho_K^{n+1}(\langle Tv\rangle)}{\left|T^{-1}\langle Tv\rangle\right|}\left\langle x,T^{-1}\langle Tv\rangle\right\rangle^2\mathrm{d}S(\langle Tv\rangle)\\
&=\beta\int_{S^{n-1}}\phi'\left(\frac{\left|T^{-1}u\right|\rho_K(u)}{\bar{V}_{-\phi}(K,E)}\right)\frac{\rho_K^{n+1}(u)}{\left|T^{-1}u\right|}\left\langle T^{-t}x,u\right\rangle^2\mathrm{d}S(u)\\
&=\beta\int_{S^{n-1}}\phi'\left(\frac{\rho_K(u)}{\rho_E(u)\bar{V}_{-\phi}(K,E)}\right)\rho_E(u)\rho_K^{n+1}(u)\left\langle T^{-t}x,u\right\rangle^2\mathrm{d}S(u).
\end{aligned}$$

由此可知对任意的 $x\in\mathbb{R}^n$，

$$n|K|\bar{V}_{-\phi}(K,E)\left|T^tx\right|^2=\beta\int_{S^{n-1}}\phi'\left(\frac{\rho_K(u)}{\rho_E(u)\bar{V}_{-\phi}(K,E)}\right)\rho_E(u)\rho_K^{n+1}(u)\langle x,u\rangle^2\,\mathrm{d}S(u).\tag{25}$$

由于 $\left|T^tx\right|=h_{TB_2^n}(x)=h_E(x)$，于是，由(25)式可知对任意的 $x\in\mathbb{R}^n$，有

$$h_E^2(x)=\frac{\beta}{n|K|\bar{V}_{-\phi}(K,E)}\int_{S^{n-1}}\phi'\left(\frac{\rho_K(u)}{\rho_E(u)\bar{V}_{-\phi}(K,E)}\right)\rho_E(u)\rho_K^{n+1}(u)\langle x,u\rangle^2\,\mathrm{d}S(u),$$

即(1)式成立。

反之，若(1)式成立，从而(25)式亦成立，即对任意的 $x\in\mathbb{R}^n$，

$$\left|T^tx\right|^2=\frac{\beta}{n|K|\bar{V}_{-\phi}(K,E)}\int_{S^{n-1}}\phi'\left(\frac{\rho_K(u)}{\rho_E(u)\bar{V}_{-\phi}(K,E)}\right)\rho_E(u)\rho_K^{n+1}(u)\langle x,u\rangle^2\,\mathrm{d}S(u).$$

令 $v=\dfrac{T^{-1}u}{\left|T^{-1}u\right|}=\left\langle T^{-1}u\right\rangle\in S^{n-1}$。利用(24)并注意到 $\det(T)=1$，可得

$$\begin{aligned}\left|T^{t}x\right|^{2}&=\frac{\beta}{n|K|\bar{V}_{-\phi}(K,E)}\int_{S^{n-1}}\phi'\left(\frac{\left|T^{-1}u\right|\rho_K(u)}{\bar{V}_{-\phi}(K,E)}\right)\frac{\rho_K^{n+1}(u)}{\left|T^{-1}u\right|}\langle x,u\rangle^2\,\mathrm{d}S(u)\\&=\frac{\beta}{n|K|\bar{V}_{-\phi}(K,E)}\int_{S^{n-1}}\phi'\left(\frac{\rho_K\left(T\left\langle T^{-1}u\right\rangle\right)}{\bar{V}_{-\phi}(K,E)}\right)\rho_K^{n+1}\left(T\left\langle T^{-1}u\right\rangle\right)\left\langle x,T\left\langle T^{-1}u\right\rangle\right\rangle^2\det(T)\,\mathrm{d}S\left(\left\langle T^{-1}u\right\rangle\right)\\&=\frac{\beta}{n|K|\bar{V}_{-\phi}(K,E)}\int_{S^{n-1}}\phi'\left(\frac{\rho_K(Tv)}{\bar{V}_{-\phi}(K,E)}\right)\rho_K^{n+1}(Tv)\langle x,Tv\rangle^2\det(T)\,\mathrm{d}S(v).\end{aligned}$$

这个等价于对任意的 $x\in\mathbb{R}^n$，

$$|x|^2=\frac{\beta}{n|K|\bar{V}_{-\phi}(K,E)}\int_{S^{n-1}}\phi'\left(\frac{\rho_K(Tv)}{\bar{V}_{-\phi}(K,E)}\right)\rho_K^{n+1}(Tv)\langle x,v\rangle^2\det(T)\,\mathrm{d}S(v),$$

即(23)式和(22)式同时成立。这就完成了定理 1.1 的证明。

5. 对偶 Orlicz John 椭球的一些性质

由(13)式，(14)式和对偶 Orlicz John 椭球的定义，我们立即可得到下面的结果。

引理 5.1：若 $\phi\in\mathcal{C},K\in\mathcal{K}_o^n$，那么对于 $T\in\mathrm{GL}(n)$，

$$E_{-\phi}TK=TE_{-\phi}K.$$

显然，$E_{-\phi}B_2^n=B_2^n$。由引理 5.1，我们可看到如果 E 是原点对称椭球，那么 $E_{-\phi}E=E$。

引理 5.2：设 $\phi\in\mathcal{C},\phi(c_\phi)=1$，且 $K\in\mathcal{K}_o^n$ 使得 $aB_2^n\subseteq K\subseteq bB_2^n$，其中 $0<a<b<\infty$ 是满足条件的最佳实数。那么

$$\bar{E}_{-\phi}K\supseteq\frac{2a}{b}B_2^n.$$

证明：设 $\operatorname{diam}\left(\bar{E}_{-\phi}K\right)$ 是椭球 $\bar{E}_{-\phi}K$ 的通径，$\bar{V}_{-\phi}\left(K,\bar{E}_{-\phi}K\right)=\lambda$。注意到对于所有的 $u\in S^{n-1}$，

$$\rho_{\bar{E}_{-\phi}K}(u)\le\frac{1}{2}\operatorname{diam}\left(\bar{E}_{-\phi}K\right),\ \rho_K(u)\ge a,$$

因此，由规范化的对偶 Orlicz John 椭球的定义，ϕ 的凸性和体积的极坐标公式(8)，可得

$$\begin{aligned}\phi(c_\phi)=1&=\frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}}\phi\left(\frac{\rho_K(u)}{\lambda\rho_{\bar{E}_{-\phi}K}(u)}\right)\rho_K^n(u)\,\mathrm{d}S(u)\\&\ge\frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}}\phi\left(\frac{2a}{\lambda\operatorname{diam}\left(\bar{E}_{-\phi}K\right)}\right)\rho_K^n(u)\,\mathrm{d}S(u)\\&\ge\phi\left(\frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}}\frac{2a}{\lambda\operatorname{diam}\left(\bar{E}_{-\phi}K\right)}\times\rho_K^n(u)\,\mathrm{d}S(u)\right)\\&=\phi\left(\frac{2a}{\lambda\operatorname{diam}\left(\bar{E}_{-\phi}K\right)n|K|}\int_{S^{n-1}}\rho_K^n(u)\,\mathrm{d}S(u)\right)\\&=\phi\left(\frac{2a}{\lambda\operatorname{diam}\left(\bar{E}_{-\phi}K\right)}\right)=\phi\left(\frac{2a}{\operatorname{diam}\left(\bar{E}_{-\phi}K\right)\bar{V}_{-\phi}\left(K,\bar{E}_{-\phi}K\right)}\right),\end{aligned}$$

这意味着

$$\operatorname{diam}\left(\bar{E}_{-\phi}K\right) \geq \frac{2a}{c_\phi \bar{V}_{-\phi}\left(K, \bar{E}_{-\phi}K\right)}.$$

由椭球 $\bar{E}_{-\phi}K$ 的定义和上式，可得

$$\operatorname{diam}\left(\bar{E}_{-\phi}K\right) \geq \frac{2a}{c_\phi \bar{V}_{-\phi}\left(K, \bar{E}_{-\phi}K\right)} \geq \frac{2a}{c_\phi \bar{V}_{-\phi}\left(K, B_2^n\right)}. \tag{26}$$

现在我们来估计 $\bar{V}_{-\phi}\left(K, B_2^n\right)$ 在 $aB_2^n \subseteq K \subseteq bB_2^n$ 条件下的值。令 $\bar{V}_{-\phi}\left(K, B_2^n\right) = \lambda_0$，那么

$$\begin{aligned}\phi\left(c_\phi\right) = 1 &= \frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}} \phi\left(\frac{\rho_K(u)}{\lambda_0 \rho_{B_2^n}(u)}\right)\rho_K^n(u)\,\mathrm{d}S(u) \\ &\leq \frac{1}{n|K|}\int_{S^{n-1}} \phi\left(\frac{b}{\lambda_0}\right)\rho_K^n(u)\,\mathrm{d}S(u) = \phi\left(\frac{b}{\lambda_0}\right).\end{aligned}$$

即

$$\bar{V}_{-\phi}\left(K, B_2^n\right) = \lambda_0 \leq \frac{b}{c_\phi}. \tag{27}$$

(26)式和(27)式结合，即得

$$\operatorname{diam}\left(\bar{E}_{-\phi}K\right) \geq \frac{2a}{b} \quad \Rightarrow \quad \bar{E}_{-\phi}K \supseteq \frac{2a}{b}B_2^n.$$

引理 5.2 得证。

我们知道 $\bar{E}_{-\phi}K$ 是唯一满足

$$\bar{V}_{-\phi}\left(K, \bar{E}_{-\phi}K\right) = \min_{|E|=\omega} \bar{V}_{-\phi}\left(K, E\right) \tag{28}$$

的椭球，那么我们可以建立对偶 Orlicz John 椭球关于 ϕ 的连续性。

引理 5.3：若 $\phi_i, \phi \in \mathcal{C}$ 以及 $K \in \mathcal{K}_o^n$，那么

$$\lim_{\phi_i \to \phi} \bar{V}_{-\phi_i}\left(K, \bar{E}_{-\phi_i}K\right) = \bar{V}_{-\phi}\left(K, \bar{E}_{-\phi}K\right).$$

证明：运用(28)式，引理 3.3 和引理 3.4，我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{\phi_i \to \phi} \bar{V}_{-\phi_i}\left(K, \bar{E}_{-\phi_i}K\right) &= \lim_{\phi_i \to \phi} \min_{|E|=\omega} \bar{V}_{-\phi_i}\left(K, E\right) \\ &= \min_{|E|=\omega} \lim_{\phi_i \to \phi} \bar{V}_{-\phi_i}\left(K, E\right) \\ &= \min_{|E|=\omega} \bar{V}_{-\phi}\left(K, E\right) = \bar{V}_{-\phi}\left(K, \bar{E}_{-\phi}K\right).\end{aligned}$$

定理 5.1：若 $\phi_i, \phi \in \mathcal{C}$ 以及 $K \in \mathcal{K}_o^n$，那么

$$\lim_{\phi_i \to \phi} E_{-\phi_i}K = E_{-\phi}K, \quad \lim_{\phi_i \to \phi} \bar{E}_{-\phi_i}K = \bar{E}_{-\phi}K.$$

证明：根据引理 1.1，我们只需证明第二个等式，而第一个等式由

$$E_{-\phi}K = \bar{V}_{-\phi}\left(K, \bar{E}_{-\phi}K\right)\bar{E}_{-\phi}K$$

便可得到。运用反证法，假设第二个等式不成立，那么由引理 5.2，Blaschke 选择定理和我们的假设，可知

$$\phi_i \to \phi \quad \Rightarrow \quad \bar{E}_{-\phi_i}K \to E' \neq \bar{E}_{-\phi}K.$$

由于 $\bar{S}_{-\phi}$ 的解是唯一的，由引理 3.4 可得

$$\bar{V}_{-\phi}\left(K,\bar{E}_{-\phi}K\right) < \bar{V}_{-\phi}\left(K,E'\right) = \lim_{\phi_i\to\phi}\bar{V}_{-\phi}\left(K,\bar{E}_{-\phi_i}K\right) = \lim_{\phi_i\to\phi}\bar{V}_{-\phi_i}\left(K,\bar{E}_{-\phi_i}K\right),$$

这与引理 5.3 相矛盾。

由(12)式和对偶 Orlicz John 椭球的定义，我们立即得到如下定理。

定理 5.2：如果 $K\in\mathcal{K}_o^n$ 以及 $\phi_1,\phi_2\in\mathcal{C}$ 使得 $\phi_1\le\phi_2$，那么

$$\left|E_{-\phi_1}K\right| \ge \left|E_{-\phi_2}K\right|.$$

$E_{-\phi}K$ 和 K 的体积关系可以叙述如下：

定理 5.3：设 $\phi\in\mathcal{C},\phi\left(c_\phi\right)=1$ 以及 $K\in\mathcal{K}_o^n$，那么

$$\left|c_\phi E_{-\phi}K\right| \ge |K|, \tag{29}$$

等号成立当且仅当 K 是一个中心在原点的椭球。

证明：由 $E_{-\phi}K$ 的定义和对偶 Orlicz-Minkowski 不等式(15)，我们有

$$1 \ge \bar{V}_{-\phi}\left(K,E_{-\phi}K\right)^n \ge c_\phi^{-n}|K|\left|E_{-\phi}K\right|^{-1},$$

也就是说

$$\left|c_\phi E_{-\phi}K\right| \ge |K|.$$

等号成立的条件由对偶 Orlicz-Minkowski 不等式等号成立的条件以及对于任意 $u\in S^{n-1}$，

$$\frac{\rho_K(u)}{\rho_{E_{-\phi}K}(u)} = c_\phi$$

得到。即不等式(29)等号成立当且仅当 K 是一个中心在原点的椭球。

注意到如果 $\phi(t)=|t|^p, p\ge1$，那么 $c_\phi=1$，$E_{-\phi}K$ 就是对偶 Lp-John 椭球 $\tilde{E}_pK$，于是不等式(29)变成熟知的不等式[6]：

$$\left|\tilde{E}_pK\right| \ge |K|,$$

等号成立当且仅当 K 是一个中心在原点的椭球。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(批准号：11561020)。

参考文献

[1] Lutwak, E., Yang, D. and Zhang, G. (2005) Lp-John Ellipsoids. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **90**, 497-520. https://doi.org/10.1112/S0024611504014996

[2] Giannopoulos, A. and Papadimitrakis, M. (1999) Isotropic Surface Area Measures. *Mathematika*, **46**, 1-13. https://doi.org/10.1112/S0025579300007518

[3] Petty, C.M. (1961) Surface Area of a Convex Body under Affine Transformations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **12**, 824-828. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1961-0130618-0

[4] Lutwak, E., Yang, D. and Zhang, G. (2000) A New Ellipsoid Associated with Convex Bodies. *Duke Mathematical Journal*, **104**, 375-390. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-00-10432-2

[5] Lutwak, E. (1993) The Brunn-Minkowski-Firey Theory I: Mixed Volumes and the Minkowski Problem. *Journal of Differential Geometry*, **38**, 131-150. https://doi.org/10.4310/jdg/1214454097

[6] Yu, W., Leng, G. and Wu, D. (2007) Dual Lp-John Ellipsoids. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, **50**, 737-753.

[7] Lutwak, E. (1996) The Brunn-Minkowski-Firey Theory II: Affine and Geominimal Surface Areas. *Advances in Mathematics*, **118**, 244-294. https://doi.org/10.1006/aima.1996.0022

[8] Lutwak, E., Yang, D. and Zhang, G. (2010) Orlicz Projection Bodies. *Advances in Mathematics*, **223**, 220-242. https://doi.org/10.1016/j.aim.2009.08.002

[9] Lutwak, E., Yang, D. and Zhang, G. (2010) Orlicz Centroid Bodies. *Journal of Differential Geometry*, **84**, 365-387. https://doi.org/10.4310/jdg/1274707317

[10] Ludwig, M. (2005) Minkowski Valuations. *Transactions of the American Mathematical Society*, **357**, 4191-4213. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-04-03666-9

[11] Haberl, C. and Schuater, F. (2009) Asymmetric Affine Lp Sobolev Inequalities. *Journal of Functional Analysis*, **257**, 641-658. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2009.04.009

[12] Haberl, C. and Schuater, F. (2009) General Lp Affine Isoperimetric Inequalities. *Journal of Differential Geometry*, **83**, 1-26. https://doi.org/10.4310/jdg/1253804349

[13] Haberl, C., Lutwak, E., Yang, D., *et al*. (2010) The Even Orlicz Minkowski Problem. *Advances in Mathematics*, **224**, 2485-2510. https://doi.org/10.1016/j.aim.2010.02.006

[14] Ma, T. and Wang, W. (2016) Dual Orlicz Geominimal Surface Area. *Journal of Inequalities and Applications*, **56**, 1-13. https://doi.org/10.1186/s13660-016-1005-4

[15] Ma, T. (2018) On the Reverse Orlicz Blaschke-Santal'o Inequality. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **32**, 1-11.

[16] Ma, T. (2016) The Minimal Dual Orlicz Surface Area. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **20**, 287-309.

[17] Gardner, R.J., Hu, D. and Weil, W. (2014) The Orlicz-Brunn-Minkowski Theory: A General Framework, Additions, and Inequalities. *Journal of Differential Geometry*, **97**, 427-476. https://doi.org/10.4310/jdg/1406033976

[18] Xi, D., Jin, H. and Leng, G. (2014) The Orlicz Brunn-Minkowski Inequality. *Advances in Mathematics*, **260**, 350-374. https://doi.org/10.1016/j.aim.2014.02.036

[19] Xiong, G. and Zou, D. (2014) Orlicz Mixed Quermassintegrals. *Science China Mathematics*, **57**, 1-14. https://doi.org/10.1007/s11425-014-4812-4

[20] Zou, D. and Xiong, G. (2014) The Minimal Orlicz Surface Area. *Advances in Applied Mathematics*, **61**, 25-45. https://doi.org/10.1016/j.aam.2014.08.006

[21] Zhu, G. (2012) The Orlicz Centroid Inequality for Star Bodies. *Advances in Applied Mathematics*, **48**, 432-445. https://doi.org/10.1016/j.aam.2011.11.001

[22] Zhu, B., Zhou, J. and Xu, W. (2014) Dual Orlicz-Brunn-Minkowski Theory. *Advances in Mathematics*, **264**, 700-725. https://doi.org/10.1016/j.aim.2014.07.019

[23] Lin, Y. (2017) Affine Orlicz Póya-Szegö Principle for Log-Concave Functions. *Journal of Functional Analysis*, **273**, 3295-3326. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2017.08.017

[24] Zou, D. and Xiong, G. (2014) Orlicz-John Ellipsoids. *Advances in Mathematics*, **265**, 132-168. https://doi.org/10.1016/j.aim.2014.07.034

[25] Zou, D. and Xiong, G. (2014) Orlicz-Legendre Ellipsoids. *Journal of Geometric Analysis*, **26**, 1-29.

[26] Li, A. (2010) Extremal Problems in Theory of Convex Geometrical Functional Analysis. Doctoral Dissertation, Shanghai University, Shanghai.

[27] Gruber, P.M. and Schuster, F. (2005) An Arithmetic Proof of John's Ellipsoid Theorem. *Archiv der Mathematik*, **85**, 82-88. https://doi.org/10.1007/s00013-005-1326-x

[28] Gruber, P.M. (2008) Application of an Idea of Voronoi to John Type Problems. *Advances in Mathematics*, **218**, 309-351. https://doi.org/10.1016/j.aim.2007.12.005

[29] Gardner, R.J., Daniel, H., Wolfgang, W., *et al*. (2015) The Dual Orlicz-Brunn-Minkowski Theory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **430**, 810-829. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.05.016

[30] Gruber, P.M. (2007) Convex and Discrete Geometry. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 336, Springer, Berlin.

[31] Schneider, R. (1993) Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org