Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2018, 7(12), 1486-1489
Published Online December 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.712172

Lagrange Interpolation on Tetrahedral Mesh

Wengfang Jiang, Zhaohui Mu, Lihong Cui

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning
Email: 853638414@qq.com, 1192798009@qq.com, 2458416309@qq.com

Received: Nov. 11th, 2018; accepted: Nov. 30th, 2018; published: Dec. 7th, 2018

Abstract

On the basis of Lagrange interpolation on triangular mesh, this paper further studies Lagrange interpolation on tetrahedral mesh, gives the suitably fixed node group theorem in space composed of ternary polynomial, constructs the Lagrange interpolation formula on tetrahedral mesh, and verifies the given formula.

Keywords

Tetrahedron, Multiple Lagrange Interpolation, Adaptive Node Set

四面体网格上的Lagrange插值

姜文芳，牟朝会，崔利宏

辽宁师范大学，辽宁 大连
Email: 853638414@qq.com, 1192798009@qq.com, 2458416309@qq.com

收稿日期：2018年11月11日；录用日期：2018年11月30日；发布日期：2018年12月7日

摘 要

本文在三角形网点上的Lagrange插值的基础上，进一步的研究了四面体网格上的Lagrange插值，给出了三元多项式构成的空间中的适定结点组定理，构造出了四面体网格上的Lagrange插值公式，并对所给公式进行了验证。

关键词

四面体，多元Lagrange插值，适定结点组

文章引用：姜文芳，牟朝会，崔利宏．四面体网格上的 Lagrange 插值[J]．应用数学进展, 2018, 7(12): 1486-1489.
DOI: 10.12677/aam.2018.712172

1. 引言

多元函数插值是一元函数插值理论的进一步发展，是在插值工具和被插值对象的多元推广，多元函数插值是计算数学研究领域的一个重要方面。(见文献[1])近年来，人们发现二元插值(见文献[2])已经远远不能满足科学发展的需要。在解决某些科学计算问题时，常常涉及到多元函数插值问题。(见文献[3])经过很多学者在多元插值和逼近的研究，(见文献[4] [5] [6] [7] [8])我发现在许多实际问题中，常常会遇到与四面体网格有关的插值，而怎样将四面体网格划分和插值就成了难题。本文就将介绍如何在四面体上进行网格划分，如何选取适定结点组和如何在四面体上进行 Lagrange 插值进行研究，并给出了相应的研究成果。四面体是生活中最常见的立体图形之一，在很多机械模型中都会出现。例如：对机械零件进行四面体网格划分确定精度，对不规则的零部件进行四面体网格划分和插值计算，所得结果比其他算法更精准。

2. 基本定义和基本定理

本文主要研究在四面体网格上进行多元 Lagrange 插值的问题.

首先引入若干基本概念：

基本引理：$\{Q_i\}_{i=1}^{l}$ 是 $\wp$ 的适定结点组的充分必要条件是 $\{Q_i\}_{i=1}^{l}$ 不落在 $\wp$ 中的任何一个曲面上。

Lagrange 方法：设 $\{Q_{ijk}\}_{i,j,k=1}^{l}$ 是多项式空间 $\wp$ 的适定结点组。设法求得 $L_j(x,y,z)\in\wp$，$j=1,2,\cdots,l$ $L_k(x,y,z)\in\wp$，$k=1,2,\cdots,l$ 使得满足 $L_{ijk}(Q_i)=\partial_{ijk}, i=j=k=1,2,\cdots,l$，则对 $f(x,y,z)\in D(R^3)$ 可求得它的插值多项式如下：$p(x,y,z)=\sum\limits_{i,j,k=1}^{l} f(Q_{ijk})L_{ijk}(x,y,z)$，这种方法称为 Lagrange 方法，$L_{ijk}(x,y,z)$ 称为 Lagrange 基本多项式。

定理 1：若 m 次代数曲面 $f_1(x,y,z)$，n 次代数曲面 $f_2(x,y,z)$ 和 k 次代数曲面 $f_3(x,y,z)$ 交点个数多于 mnk，则一定有次数不超过 m 也不超过 n 和 k 的非零多项式 $q(x,y,z)$ 存在，使得

$$f_1(x,y,z)=q(x,y,z)\cdot r_1(x,y,z),\quad f_2(x,y,z)=q(x,y,z)\cdot r_2(x,y,z),$$

$f_3(x,y,z)=q(x,y,z)\cdot r_3(x,y,z)$，式中，$r_1(x,y,z)$，$r_2(x,y,z)$ 和 $r_3(x,y,z)$ 分别是次数不小于 m，n 和 k 的三元实系数多项式。

定理 2：若 $\{Q_i\}_{i=1}^{k}$ 是 R^3 上关于插值空间 $\wp_{m,n,l}$ 的适定结点组。若它的每个点都不在水平面 $x+y=a$ 上，则在该水平面上任取 $n+1$ 个互不相同的点与 $\{Q_i\}_{i=1}^{k}$ 一起必定构成 $\wp_{m+1,n,l}$ 的适定结点组。同样 $\alpha_0(x,y,z)=A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 地，若 $\{Q_i\}_{i=1}^{k}$ 的每个点都不在 $x+z=b$ ($y+z=c$)上，则在该平面上任取 $m+1$ ($l+1$)个互不相同的点与 $\{Q_i\}_{i=1}^{k}$ 一起必定构成 $\wp_{m,n+1,l}$ ($\wp_{m,n,l+1}$)的适定结点组。

特殊的 Lagrange 插值：四面体网格上的 Lagrange 插值，设四面体 $O\text{-}ABC$ 的四面体分别为 OAB，OBC，OAC，ABC，且四面体的方程分别为：

$$\alpha_0(x,y,z)=A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$\beta_0(x,y,z)=A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

$$\gamma_0(x,y,z)=A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0,$$

$$\lambda_0(x,y,z)=A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0,$$

用 4 簇平行平面：

$$\alpha_i(x,y,z)=A_1x+B_1y+C_1z+D_1+iE_1=0, i=0,1,\cdots,n$$

$$\beta_j(x,y,z)=A_2x+B_2y+C_2z+D_2+jE_2=0, j=0,1,\cdots,n$$

$$\gamma_k(x,y,z)=A_3x+B_3y+C_3z+D_3+kE_3=0, k=0,1,\cdots,n$$

$$\tau_h(x,y,z)=A_4x+B_4y+C_4z+D_4+hE_4=0, h=0,1,\cdots,n$$

将该四面体作等距剖分。我们用 Q_{ijk} 表 $\alpha_i(x,y,z)=0$ 示， $\beta_j(x,y,z)=0$ 与 $\gamma_k(x,y,z)=0$ 的交点则有 $\Im_n=\{Q_{ijk} \mid i=0,1,\cdots,n, j=0,1,2,\cdots,n-i, k=0,1,\cdots,n-i-j\}$ 构成 $\wp_n$ 的适定结点组。

令

$$A_i(x,y,z)=\prod_{l=0}^{i-1}\alpha_l(x,y,z), A_0(x,y,z)\equiv 1，\quad B_j(x,y,z)=\prod_{l=0}^{j-1}\beta_l(x,y,z), B_0(x,y,z)\equiv 1，$$

$$C_k(x,y,z)=\prod_{l=0}^{k-1}\gamma_l(x,y,z), C_0(x,y,z)\equiv 1，\quad D_h(x,y,z)=\prod_{l=0}^{h-1}\tau_l(x,y,z), D_0(x,y,z)\equiv 1$$

则对应 Q_{ijk} 的 Lagrange 插值基本多项式为

$$L_{ijk}(x,y,z)=\frac{A_i(x,y,z)}{A_i(Q_{ijk})}\cdot\frac{B_j(x,y,z)}{B_j(Q_{ijk})}\cdot\frac{C_k(x,y,z)}{C_k(Q_{ijk})}\cdot\frac{D_{n-i-j-k}(x,y,z)}{D_{n-i-j-k}(Q_{ijk})}$$

从而得到 $\Im_n$ 上的 Lagrange 插值公式如下： $P(x,y,z)=\sum\limits_{0\le i+j+k\le n} f(Q_{ijk})L_{ijk}(x,y,z)$。

例 1：利用四面体网格上的 Lagrange 插值公式，构造如下多项式：四面体 *O-ABC* 为 *OAB*，*OAC*，*OBC* 三个面分别是直角三角形的四面体，被插值函数为 $f(x,y,z)=2x+3y+z+1$ 构造出三元一次插值多项式。

解：

$$Q_{000}(0,0,0)\quad Q_{001}(0,1,0)\quad Q_{010}(1,0,0)\quad Q_{100}(0,0,1)$$

$$A_0\equiv 1\quad A_1=\alpha_0=z\quad B_0\equiv 1\quad B_1=\beta_0=x$$

$$C_0\equiv 1\quad C_1=\gamma_0=y\quad D_0\equiv 1\quad D_1=\tau_0=x+y+z-1$$

$$L_{000}(x,y,z)=-x-y-z+1\quad L_{001}(x,y,z)=y\quad L_{010}(x,y,z)=x\quad L_{100}(x,y,z)=z$$

$$f(Q_{000})=1\quad f(Q_{001})=4\quad f(Q_{010})=3\quad f(Q_{100})=2$$

经验证： $P(x,y,z)=f(x,y,z)$

例 2：利用四面体网格上的 Lagrange 插值公式，构造如下多项式：四面体 *O-ABC* 为 *OAB*，*OAC*，*OBC* 三个面分别是直角三角形的四面体，被插值函数为 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+1$，构造出三元二次插值多项式。

解：

$$Q_{000}(0,0,0)\quad Q_{001}(0,1,0)\quad Q_{002}(0,2,0)\quad Q_{010}(1,0,0)\quad Q_{011}(1,1,0)$$

$$Q_{020}(2,0,0)\quad Q_{100}(0,0,1)\quad Q_{101}(0,1,1)\quad Q_{110}(1,0,1)\quad Q_{200}(0,0,2)$$

$$A_0\equiv 1\quad A_1=\alpha_0=z\quad A_2=\alpha_1\cdot\alpha_0=z^2-z$$

$$B_0\equiv 1\quad B_1=\beta_0=x\quad B_2=\beta_1\cdot\beta_0=x^2-x$$

$$C_0\equiv 1\quad C_1=\gamma_0=y\quad C_2=\gamma_1\cdot\gamma_0=y^2-y$$

$$D_0 \equiv 1 \quad D_1 = \tau_0 = x + y + z - 2$$

$$D_2 = \tau_1 \cdot \tau_0 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 3x - 3y - 3z + 2$$

$$L_{000}(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2 + xy + yz + xz - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z + 1$$

$$L_{001}(x,y,z) = -xy - y^2 - yz + 2y \quad L_{002}(x,y,z) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y$$

$$L_{010}(x,y,z) = -x^2 - xy - xz + 2x \quad L_{011}(x,y,z) = xy$$

$$L_{020}(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \quad L_{100}(x,y,z) = -xz - yz - z^2 + 2z$$

$$L_{101}(x,y,z) = yz \quad L_{110}(x,y,z) = xz$$

$$L_{200}(x,y,z) = \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z$$

$$f(Q_{000}) = 1 \quad f(Q_{001}) = 2 \quad f(Q_{002}) = 5 \quad f(Q_{010}) = 2 \quad f(Q_{011}) = 3$$

$$f(Q_{020}) = 5 \quad f(Q_{100}) = 2 \quad f(Q_{101}) = 3 \quad f(Q_{110}) = 3 \quad f(Q_{200}) = 5$$

经验证：$P(x,y,z) = f(x,y,z)$。

致　谢

首先我要感谢我的论文指导老师也是我硕士研究生导师崔利宏教授，还有我的小伙伴牟朝会同学。本文是在导师崔利宏教授的悉心指导和严格要求下完成的。感谢老师为我提供了论文材料,耐心为我讲解疑难问题,指明方向。每一个环节导师都倾注了大量的时间和心血。导师和蔼可亲,遇到问题总是耐心讲解,他的严谨求实的治学态度、诲人不倦的精神,对我的影响深远而广泛,使我在做文和做人方面终身受益。在此,我向我的导师致以深深的谢意。最后，向在百忙中抽出时间对本文进行评审并提出宝贵意见的各位专家表示衷心地感谢！

基金项目

辽宁省教育厅科研支持项目 L201683661，辽宁省大学生实践基地建设项目，辽教[2015]399 号。

参考文献

[1] 梁学章, 李强. 多元逼近[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005.
[2] 徐利治, 王仁宏, 周蕴时. 函数逼近的理论与方法[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1981.
[3] 梁学章. 二元插值的适定结点组与迭加插值法[J]. 吉林大学自然科学学报, 1979(1): 27-32.
[4] 梁学章. 关于多元函数的插值与逼近[J]. 高等学校计算数学学报, 1979, 1(1): 123-124.
[5] 梁学章, 崔利宏. 代数曲线上的 Lagrange 插值[J]. 吉林大学自然科学学报, 2001(3): 17-20.
[6] 王仁宏, 梁学章. 多元逼近[M]. 北京: 科学出版社,1988.
[7] 刘莹, 范晓倩, 崔利宏. 关于三元分次插值适定性的研究[J]. 应用数学进展, 2016, 5(4): 651-656.
[8] 惠婷婷, 刘海波, 崔利宏. 定义于椭球面上的多元Lagrange插值问题研究[J]. 应用数学进展, 2017, 6(4): 442-447.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org