Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2019, 8(1), 119-134**
Published Online January 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.81014

The Uniform *q*-Order Growth Condition

Jigen Yang, Penghui Lv, Bin Chen

School of Information, Tourism and Cultural College Yunnan University, Lijiang Yunnan
Email: 18487266515@qq.com, 18487279097@163.com, 303664681@qq.com

Received: Jan. 2nd, 2019; accepted: Jan. 17th, 2019; published: Jan. 24th, 2019

Abstract

Uniform second order growth condition is an important notion in optimization and has been studied extensively. Recently, as a natural extension of the uniform second order growth condition, with a positive number q replacing 2, the uniform q-order growth condition was introduced and studied in [1]. Motivated by [1], this thesis further studies the uniform q-order growth condition of a q-order regular real-valued function f. In terms of the Hölder metric regularity of the subdifferential mapping ∂f, we provide sufficient and necessary conditions for f to have the uniform q-order growth condition. In particular, using the modulus and radius appearing in the Hölder metric regularity of the subdifferential mapping ∂f, we give an exact quantitative formula of the radius appearing in the uniform q-order growth condition, which improves some existing results on the uniform second order growth condition and uniform q-order growth condition.

Keywords

The Uniform q-Order Growth Condition, The Hölder Regularity, The Hölder Metric Regularity, Subdifferential

一致q阶增长条件

杨吉根，吕鹏辉，陈　斌

云南大学旅游文化学院信息学院，云南　丽江
Email: 18487266515@qq.com, 18487279097@163.com, 303664681@qq.com

收稿日期：2019年1月2日；录用日期：2019年1月17日；发布日期：2019年1月24日

摘　要

一致二阶增长条件是优化中的重要概念，已被广泛研究。近来，作为一致二阶增长条件的自然推广，用一般的正数q代替二，文献[1]引进并研究了一致q阶增长条件。本文在文献[1]的基础上，进一步考虑q-

文章引用: 杨吉根, 吕鹏辉, 陈斌. 一致 q 阶增长条件[J]. 应用数学进展, 2019, 8(1): 119-134.
DOI: 10.12677/aam.2019.81014

正则函数f的一致q阶增长条件，通过q-正则函数f之次微分映射 ∂f 的Hölder度量正则性刻画了f的一致q阶增长条件。特别地，本文给出了 ∂f 的Hölder度量正则性所涉及模及半径与f的一致q阶增长条件涉及半径之间的确切数量关系，从而改进了一致二阶增长条件及一致q阶增长条件方面的一些现有结果。

关键词

一致q阶增长条件，Hölder正则性，Hölder度量正则性，次微分

1. 引言

作为凸性的一个有意义的延拓，在 1996 年，Poliquin 和 Rockafellar [2]提出并研究了 *prox*-正则性。设 $f: R^n \to R\cup\{+\infty\}$ 是一个真下半连续泛函且 $(\bar{x},\bar{x}^*)\in gph(\partial f)$，若存在 $\rho,\delta\in(0,+\infty)$ 使得对于任意的 $y\in B(\bar{x},\delta)$，$(x,f(x))\in B((\bar{x},f(\bar{x})),\delta)$ 及 $x^*\in gph(\partial f)\cap B(\bar{x}^*,\delta)$ 都有

$$\langle x^*, y-x\rangle \le f(y)-f(x)+\rho\|y-x\|^2, \tag{1.1}$$

则称 f 在 (x,x^*) 处是 *prox*-正则的，其中 $B((\bar{x},f(\bar{x})),\delta)$ 表示乘积空间 $R^n\times R$ 中以 δ 为半径且以 $(\bar{x},f(\bar{x}))$ 为心的开球，$B(\bar{x}^*,\delta)$ 表示 R^n 中以 δ 为半径且以 $\bar{x}^*$ 为心的开球，而 ∂f 表示 f 的 *Clarke* 次微分。之后，Bernard 和 Thibault [3]将上述的 *prox*-正则性推广到无限维空间中，并被很好地研究。特别地，一个真下半连续泛函 f 的正则性与它的次微分映射 ∂f 的 hypomonotocity 有着紧密的关系(参见文献[4] [5] [6] [7] [8])。

当目标函数在小的线性扰动下，*prox*-正则性在研究目标函数的一致二阶增长条件和 *tilt*-稳定性中起着很重要的作用(参见文献[9]-[16])。特别地，当 $f: X\to R\cup\{+\infty\}$ 在 $(\bar{x},\bar{x}^*)$ 处是 *prox*-正则的及次微分连续时，Poliquin 和 Rockafellar [14]中证明了 $\partial^2 f(\bar{x},0)$ 在 Mordukhovich [17]意义下是正定的当且仅当 f 在 $\bar{x}$ 处有 *tilt*-稳定的极小值，即，$f(\bar{x})<+\infty$ 且存在 $\delta>0$ 使得映射

$$M: v\to \mathop{\arg\min}_{x\in B_X[\bar{x},\delta]}\{f(x)-f(\bar{x})-\langle v,x-\bar{x}\rangle\}$$

是单值的，满足 $M(0)=\bar{x}$ 且在 $v=0$ 附近是 Lipschitz 的。最近，这个结果被 Mordukhovich 和 Nghia [11]和 Mordukhovich 和 Rockafellar [18]分别推广到了 Asplund 空间和希尔伯特空间。而 Drusvyatskiy 和 Lewis 在[9]中证明了 ∂f 在 $\bar{x}$ 处有 *tilt*-稳定的极小值当且仅当 f 在 $\bar{x}$ 处满足一致二阶增长条件，即，存在 $\delta,\kappa,r\in(0,+\infty)$ 及映射 $\vartheta: B(0,\delta)\to B(\bar{x},r)$ 使得对于任意的 $(x,u^*)\in B(\bar{x},r)\times B(0,\delta)$ 有 $\vartheta(0)=\bar{x}$ 且

$$\kappa\left\|x-\vartheta(u^*)\right\|^2 \le f(x)-f(\vartheta(u^*))-\langle u^*, x-\vartheta(u^*)\rangle. \tag{1.2}$$

在 f 是希尔伯特空间 X 上的一个真下半连续凸泛函的假设下，Artacho 在[19]证明了 f 在 $\bar{x}$ 处满足一致二阶增长条件当且仅当 ∂f 在 $(\bar{x},0)$ 处是强度量正则的。之后，在有限维空间中，将 f 的凸性减弱为 f 是次微分连续及 *prox*-正则的，Drusvyatskiy 和 Lewis [9]证明了类似的结果。近来，在更一般的无限维空间中，许多的学者利用次微分映射 ∂f 的度量正则性和度量次正则性进一步研究了一致二阶增长条件(参

见文献[11] [15] [20] [21] [22])。

适定性是优化中基本概念，它可以叙述如下：一 Banach 个空间 X 上的广泛实值下半连续函数 f 被称为在 $\bar{x}\in X$ 处具有适定性，若 f 的每一个极小化序列 $\{x_n\}\subset X$ 都收敛于 $\bar{x}$ (即，若每当 $\{x_n\}\subset X$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\inf\limits_{x\in X} f(x)$ 必有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\bar{x}$)。回顾一个函数 $\varphi:R^+\to R^+$ 是 admissible 函数，若 φ 是一个非减的函数，$\varphi(0)=0$ 且 $[\varphi(t)\to 0\Rightarrow t\to 0]$。下面的适定性特征容易验证(参见文献[23]，定理 2)，f 在 $\bar{x}\in X$ 处具有适定性等价于存在一个 admissible 函数 $\varphi:R_+\to R_+$ 使得

$$\varphi(\|x-\bar{x}\|)\le f(x)-f(\bar{x}),\ \forall x\in X.$$

基于适定性的上述特征，通过 admissible 函数，Zheng 和 Zhu [24]引进并研究了适定性的稳定性。特别地，他们将一致二阶增长条件推广为一致 φ-增长条件：若存在 $\delta,\kappa,r,\tau\in(0,+\infty)$ 及映射 $\vartheta:B_{X^*}(0,\delta)\to B_X(\bar{x},r)$ 使得 $\vartheta(0)=\bar{x}$ 且对于任意的 $(x,u^*)\in B_X(\bar{x},r)\times B_{X^*}(0,\delta)$ 都有

$$\kappa\varphi\left(\tau\left\|x-\vartheta(u^*)\right\|\right)\le f(x)-f\left(\vartheta(u^*)\right)-\left\langle u^*,x-\vartheta(u^*)\right\rangle, \tag{1.3}$$

则称 f 在 $\bar{x}$ 处是满足一致 φ-增长条件。在 $\varphi(t)=t^2$ 的特殊情况下，一致 φ-增长条件即回归到一致二阶增长条件。在 $\bar{x}$ 是 f 的局部极小值点且 φ 是一个凸的 admissible 函数的条件下，Zheng 和 Zhu [24]证明了 ∂f 在 $(\bar{x},0)$ 处是强度量 φ'_+ 正则的是 f 在 $\bar{x}$ 处是满足一致 φ-增长条件的一个充分条件，其中 φ'_+ 是 φ 的右方向导数。该结果要求 $\bar{x}$ 是 f 的局部极小值点的假设在实际应用中有一定的局限性。另一方面，在 $\varphi(t)=t^2$ 的特殊情况下，不要求 $\bar{x}$ 是 f 的局部极小值点，若 f 在 $(\bar{x},0)$ 处是 *prox*-正则的且次微分连续，则 ∂f 在 $(\bar{x},0)$ 处处是强度量 φ'_+ 正则的是 f 在 $\bar{x}$ 处是满足一致二阶增长条件的一个必要条件。*Prox*-正则性在研究一致二阶增长条件中起着很重要的作用，可能是因为 *prox*-正则性和一致二阶增长条件涉及到了二阶变分行为之故(见(1.1)和(1.2))。由此对于一个一般的 admissible 函数就产生了一个问题：是否存在 φ-阶正则性，作为 *prox*-正则性的合理推广，使得它在研究一致 φ-增长条件中所起的作用与 *prox*-正则性在研究一致二阶增长条件中所起的作用类似? Yao，Zheng 和 Zhu [1]就解决了上述的问题，将 *prox*-正则性推广为 φ-正则性。设 $f:X\to R\cup\{+\infty\}$ 是一个真的下半连续泛函，若存在 $\delta,\rho,\tau\in(0,+\infty)$ 使得对于任意 $x\in B_X(\bar{x},\delta)$，$(z,f(z))\in B((\bar{x},f(\bar{x})),\delta)$ 及 $u^*\in\partial f(z)\cap B_{X^*}(\bar{x}^*,\delta)$ 都有

$$\left\langle u^*,x-z\right\rangle\le f(x)-f(z)+\rho\varphi(\tau\|x-z\|),$$

则称 f 在 $(\bar{x},\bar{x}^*)$ 处是 φ-正则的。他们也定义了 φ-S-正则，φ-次正则及 φ-S-次正则(参见文献[1]，定义 3.1)，并用上述的 φ-正则性及度量正则性与度量次正则性来研究一致 φ-增长条件，得到了一致 φ-增长条件的存在性证明，同时还得到了一致 φ-增长条件的一个必要条件。不仅改进了之前的一些结果，而且深刻地刻画了一致 φ-增长条件。上述所有关于一致增长条件的结果都是存在性的，即存在半径 $\delta,r\in(0,+\infty)$ 使得当 $(x,u^*)\in B_X(\bar{x},r)\times B_{X^*}(0,\delta)$ 时(1.2)或(1.3)成立。然而在实际应用当中，尤其是在算法的收敛性分析及稳定性分析中，只有半径 r 和 δ 存在性是不够的，需要知道相关性质成立的明确范围。本文主要改进了 Yao，Zheng 和 Zhu [1]在得到一致 φ-增长条件时只有存在性的不足，我们将给出半径 r 和 δ 与条件中出现的系数之间的确切数量关系。

2. 预备知识

在这一章，我们将给出一些常用的符号以及后面讨论中将会用到的一些定义及结论。设 X 是 Banach 空间，X^* 和 B_X 分别表示 X 的共轭空间和 X 的单位闭球。对于 $\bar{x}\in X$ 及 $\delta>0$，设 $B_X(\bar{x},\delta)$ 和 $B_X[\bar{x},\delta]$ 分

别表示 X 中以 δ 为半径且以 $\bar{x}$ 为心的开球和闭球。设 $f: X \to R \cup \{+\infty\}$ 是一个真的下半连续泛函，集合

$$dom(f) := \{x \in X : f(x) < +\infty\}$$

和

$$epi(f) := \{(x, \alpha) \in X \times R : f(x) < \alpha\}$$

分别表示 f 的有效定义域和上方图形。对于 $x \in dom(f)$ 及 $h \in X$，用 $f^{\uparrow}(x, h)$ 表示 f 在 x 点沿方向 h 的 Rockafelllar 方向导数(参见文献[25])，即

$$f^{\uparrow}(x,h) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{u \xrightarrow{f} x, t \downarrow 0} \inf_{\omega \in h + \varepsilon B_X} \frac{f(u + t\omega) - f(u)}{t},$$

其中 $u \xrightarrow{f} x$ 表示 $u \to x$ 且 $f(u) \to f(x)$。当 f 在 x 附近是 Lipschitz 的，则

$$f^{\uparrow}(x,h) := \limsup_{u \to x, t \downarrow 0} \frac{f(u + th) - f(u)}{t},$$

此时 $f^{\uparrow}(x,h)$ 即为 f 在 x 点沿方向 h 的 Clarke 方向导数。记 $\partial f(x)$ 为 f 在 x 处的 Clarke 次微分，即

$$\partial f(x) := \left\{x^* \in X^* : \langle x^*, h\rangle \le f^{\uparrow}(x,h), \forall y \in X\right\}.$$

当 f 是凸泛函时，

$$\begin{aligned}\partial f(x) &= \left\{x^* \in X^* : \langle x^*, y - x\rangle \le f(y) - f(x), \forall y \in X\right\} \\ &= \left\{x^* \in X^* : \langle x^*, h\rangle \le \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x + th) - f(x)}{h}, \forall y \in X\right\}\end{aligned}$$

对于 $(\bar{x}, \bar{x}^*) \in gph(\partial f) := \left\{(x, x^*) \in X \times X^*, x^* \in gph(\partial f)\right\}$，若有

$$\lim_{(x,x^*) \xrightarrow{gph(\partial f)} (\bar{x}, \bar{x}^*)} f(x) = f(\bar{x}),$$

则称 f 在 $(\bar{x}, \bar{x}^*)$ 处是次微分连续，其中 $(x, x^*) \xrightarrow{gph(\partial f)} (\bar{x}, \bar{x}^*)$ 表示 $(x, x^*) \in gph(\partial f)$ 且 $(x, x^*) \to (\bar{x}, \bar{x}^*)$。

下面的引理在变分分析中起着重要的作用(参见文献[25]，命题 2.3.3)。

引理 2.1 设 X 是 Banach 空间，$f_1, f_2 : X \to R \cup \{+\infty\}$ 是真的下半连续泛函，$x \in dom(f_1) \cap dom(f_2)$ 且 f_1 在 x 附近是 Lipschitz 的，则

$$\partial(f_1 + f_2)(x) \subset \partial f_1(x) + \partial f_2(x)$$

且

$$\partial(\alpha f_1)(x) = \alpha \partial f_1(x), \forall \alpha \in R.$$

给定一个 admissible 函数 $\varphi : R_+ \to R_+$，Zheng 和 Zhu [24]引进并研究了一致 φ-增长条件，本文主要考虑在 $\varphi(t) = t^q$ 的情况下对应的一致增长条件。

设 X 是 Banach 空间，$f : X \to R \cup \{+\infty\}$ 是一个真的下半连续泛函，$\bar{x} \in dom(f)$ 且 $q \in [1, +\infty)$。若存在 $\kappa, \delta_1, \delta_2 \in (0, +\infty)$ 及映射 $\vartheta : B_{X^*}(0, \delta_1) \to B_X(\bar{x}, \delta_2)$ 使得 $\vartheta(0) = \bar{x}$ 且

$$\kappa \left\| x - \vartheta(u^*) \right\|^q \le f(x) - f(\vartheta(u^*)) - \langle u^*, x - \vartheta(u^*)\rangle, \forall (x, u^*) \in B_X(\bar{x}, \delta_2) \times B_{X^*}(0, \delta_1),$$

则称 f 在 $\overline{x}$ 处满足一致 q 阶增长条件。

为了研究一致 q 阶增长条件，本文采用 Hölder 度量正则性。

设 X 和 Y 都是 Banach 空间， $F:X\to Y$ 是一个多值映射， $p\in(0,+\infty)$ 且 $(\overline{x},\overline{y})\in gph(F):=\{(x,y)\in X\times Y: y\in F(x)\}$。

1) 若存在 $\kappa,\delta_1,\delta_2\in(0,+\infty)$ 使得

$$d\left(x,F^{-1}(y)\right)^p\le \kappa d\left(y,F(x)\right),\ \forall(x,y)\in B_X(\overline{x},\delta_1)\times B_Y(\overline{y},\delta_2), \tag{2.1}$$

则称 F 在 $(\overline{x},\overline{y})$ 处是 p 阶 Hölder 度量正则的。

2) 若存在 $\kappa,\delta_1,\delta_2,\delta_3\in(0,+\infty)$ 使得(2.1)成立且

$$F^{-1}(y)\cap B_X(\overline{x},\delta_3)=\{z_y\},\forall y\in B_Y(\overline{y},\delta_2),$$

则称 F 在 $(\overline{x},\overline{y})$ 处是 p 阶 Hölder 强度量正则的。

命题 2.1. 设 X 和 Y 都是 Banach 空间， $F:X\to Y$ 是一个多值映射， $p\in(0,+\infty)$ 且 $(\overline{x},\overline{y})\in gph(F):=\{(x,y)\in X\times Y: y\in F(x)\}$，则称 F 在 $(\overline{x},\overline{y})$ 处是 p 阶 Hölder 强度量正则的当且仅当存在 $\kappa_0,\delta_1',\delta_2'\in(0,+\infty)$ 及 $\theta:B_Y(\overline{y},\delta_1')\to B_X(\overline{x},\delta_2')$ 使得

$$\|x-\theta(y)\|^p\le\kappa_0 d\left(y,F(x)\right),\forall(x,y)\in B_X(\overline{x},\delta_1')\times B_Y(\overline{y},\delta_1') \tag{2.2}$$

且

$$F^{-1}(y)\cap B_X(\overline{x},\delta_2')=\{\theta(y)\},\forall y\in B_Y(\overline{y},\delta_1'). \tag{2.3}$$

证明： 充分性是显然的，下证必要性。由于 F 在 $(\overline{x},\overline{y})$ 处是 p 阶 Hölder 强度量正则的，则存在 $\kappa,\delta_1,\delta_2,\delta_3\in(0,+\infty)$ 使得(2.1)成立且

$$F^{-1}(y)\cap B_X(\overline{x},\delta_3)=\{z_y\},\forall y\in B_Y(\overline{y},\delta_2). \tag{2.4}$$

由(2.1)及 $\overline{y}\in F(\overline{x})$ 可知

$$d\left(x,F^{-1}(y)\right)^p\le\kappa d\left(y,F(x)\right)\le\kappa\|y-\overline{y}\|,\forall y\in B_Y(\overline{y},\delta_2)$$

所以

$$\lim_{y\to\overline{y}} d\left(\overline{x},F^{-1}(y)\right)=0.$$

于是存在 $\delta_0\in(0,\delta_3)$ 使得对于任意的 $y\in B_Y(\overline{y},\delta_0)$ 都存在 $x_y\in F^{-1}(y)$ 使得

$$\|x_y-\overline{x}\|<\min\left\{\delta_1,\delta_2,\frac{\delta_3}{4}\right\}. \tag{2.5}$$

令 $\delta_1':=\min\left\{\delta_0,\delta_1,\delta_2,\frac{\delta_3}{4}\right\}$， $\kappa_0:=\kappa$ 及 $\delta_2':=\delta_3$。并定义 $\theta:B_Y(\overline{y},\delta_1')\to B_X(\overline{x},\delta_2')$ 使得 $\theta(y)=z_y,\forall y\in B_Y(\overline{y},\delta_1')$。

由(2.4)和(2.5)可知对于任意的 $y\in B_Y(\overline{y},\delta_1')$ 都有

$$x_y\in\left(F^{-1}(y)\cap B_X(\overline{x},\delta_2')\right)=\left(F^{-1}(y)\cap B_X(\overline{x},\delta_3)\right)=\{z_y\}=(\theta(y)),$$

所以 $\theta(y)=x_y=z_y\in B_X(\overline{x},\delta_2')$ 且(2.3)成立。下面只需证明(2.2)。由(2.5)可知对于任意的 $(x,y)\in B_X(\overline{x},\delta_1')\times B_Y(\overline{y},\delta_1')$ 都有

$$d\left(x,F^{-1}(y)\cap B_X(\bar{x},\delta_2')\right)\le\|x-x_y\|\le\|x-\bar{x}\|+\|\bar{x}-x_y\|$$
$$<\delta_1'+\frac{\delta_3}{4}\le\frac{\delta_3}{2}=\frac{\delta_2'}{2}$$

且

$$d\left(x,F^{-1}(y)\setminus B_X(\bar{x},\delta_2')\right)\ge d\left(\bar{x},F^{-1}(y)\setminus B_X(\bar{x},\delta_2')\right)-\|x-\bar{x}\|$$
$$>\delta_2'-\delta_1'\ge\delta_2'-\frac{\delta_3}{4}=\frac{3\delta_2'}{4}$$

所以对于任意的 $(x,y)\in B_X(\bar{x},\delta_1')\times B_Y(\bar{y},\delta_1')$ 都有

$$\begin{aligned}d\left(x,F^{-1}(y)\right)&=\min\left\{d\left(x,F^{-1}(y)\cap B_X(\bar{x},\delta_2')\right),d\left(x,F^{-1}(y)\setminus B_X(\bar{x},\delta_2')\right)\right\}\\&=d\left(x,F^{-1}(y)\cap B_X(\bar{x},\delta_2')\right)=\|x-\theta(y)\|\end{aligned}\tag{2.6}$$

(最后一个等式成立是因为(2.3))，从而由(2.1)和(2.6)可得到(2.2)，证毕。

Prox-正则体现了二阶变分性质，在变分分析中被广泛使用，本文采用更一般的 Hölder 正则性(参见文献[1]，定义 3.1，取 $\varphi(t)=t^p$)。

设 X 是 Banach 空间，$f:X\to R\cup\{+\infty\}$ 是一个真的下半连续泛函，$(\bar{x},\bar{x}^*)\in gph(\partial f)$ 且 $s\in[1,+\infty)$。

1) 若存在 $\delta,\rho\in(0,+\infty)$ 使得对于任意的 $x\in B_X(\bar{x},\delta),(z,f(z))\in B((\bar{x},f(\bar{x})),\delta)$ 及 $u^*\in\partial f(z)\cap B_{X^*}(\bar{x}^*,\delta)$ 都有

$$\langle u^*,x-z\rangle\le f(x)-f(z)+\rho\|x-z\|^s,$$

则称 f 在 $(\bar{x},\bar{x}^*)$ 处是 s 阶正则的。

2) 若存在 $\delta,\rho\in(0,+\infty)$ 使得对于任意的 $x\in B_X(\bar{x},\delta),(z,f(z))\in B((\bar{x},f(\bar{x})),\delta)$ 及 $u^*\in\partial f(z)\cap B_{X^*}(\bar{x}^*,\delta)$ 都有

$$\langle u^*,x-z\rangle\le f(x)-f(z)+\rho d\left(x,(\partial f)^{-1}(u^*)\right)^s,$$

则称 f 在 $(\bar{x},\bar{x}^*)$ 处是 s 阶 S-正则的。

3) 若存在 $\delta,\rho\in(0,+\infty)$ 使得对于任意的 $x\in B_X(\bar{x},\delta)$ 都有

$$\langle\bar{x}^*,x-\bar{x}\rangle\le f(x)-f(\bar{x})+\rho\|x-\bar{x}\|^s,$$

则称 f 在 $(\bar{x},\bar{x}^*)$ 处是 s 阶次正则的。

4) 若存在 $\delta,\rho\in(0,+\infty)$ 使得对于任意的 $x\in B_X(\bar{x},\delta)$ 都有

$$\langle\bar{x}^*,x-\bar{x}\rangle\le f(x)-f(\bar{x})+\rho d\left(x,(\partial f)^{-1}(\bar{x}^*)\right)^s,$$

则称 f 在 $(\bar{x},\bar{x}^*)$ 处是 s 阶 S-次正则的。

命题 2.2. 设 X 是 Banach 空间，$f:X\to R\cup\{+\infty\}$ 是一个真的下半连续泛函，$(\bar{x},\bar{x}^*)\in gph(\partial f)$ 且 $s\in[1,+\infty)$。若 f 在 $(\bar{x},\bar{x}^*)$ 处是次微分连续，则 f 在 $(\bar{x},\bar{x}^*)$ 处是 s 阶正则的当且仅当 $\delta,\rho\in(0,+\infty)$ 使得对于任意的 $x,z\in B_X(\bar{x},\delta)$ 且 $u^*\in\partial f(z)\cap B_{X^*}(\bar{x}^*,\delta)$ 都有

$$\langle u^*, x-z\rangle \le f(x)-f(z)+\rho\|x-z\|^s.$$

证明：充分性是显然的，下证必要性。由于 f 在 $(\bar{x},\bar{x}^*)$ 处是 s 阶正则的，则存在 $\delta_0,\rho_0\in(0,+\infty)$ 使得对于任意的 $x\in B_X(\bar{x},\delta_0),(z,f(z))\in B((\bar{x},f(\bar{x})),\delta_0)$ 及 $u^*\in\partial f(z)\cap B_{X^*}(\bar{x}^*,\delta_0)$ 都有

$$\langle u^*, x-z\rangle \le f(x)-f(z)+\rho_0\|x-z\|^s. \tag{2.7}$$

由于 f 在 $(\bar{x},\bar{x}^*)$ 处是次微分连续的，故存在 $\delta\in(0,\delta_0)$ 使得对于任意的 $(z,u^*)\in\partial f(z)\cap\left(B_X(\bar{x},\delta)\times B_{X^*}(\bar{x}^*,\delta)\right)$ 都有

$$|f(x)-f(\bar{x})|<\delta_0. \tag{2.8}$$

令 $\rho:=\rho_0$，由(2.7)和(2.8)可知对于任意的 $x,z\in B_X(\bar{x},\delta)$ 且 $u^*\in\partial f(z)\cap B_{X^*}(\bar{x}^*,\delta)$ 都有

$$\langle u^*, x-z\rangle \le f(x)-f(z)+\rho\|x-z\|^s,$$

证毕。

为了后面的叙述方便，我们回顾下面的概念。

设 X 是 Banach 空间，$f:X\to R\cup\{+\infty\}$ 是一个真的下半连续泛函，f 的共轭函数定义如下 $f^*:X^*\to R\cup(0,+\infty)$：

$$f^*(x^*):=\sup_{x\in X}\left(\langle x^*,x\rangle-f(x)\right),\forall x^*\in X^*.$$

对于 $x^*\in X^*$ 和 $x\in X$，容易得到(参见文献[26]，命题 5.3.1)

$$f^*(x^*)=\langle x^*,x\rangle-f(x)\Rightarrow x\in\partial f^*(x^*).$$

当 f 是凸泛函时(参见文献[26]，推论 5.3.3)，则

$$x^*\in\partial f(x)\Leftrightarrow x\in\partial f^*(x^*).$$

3. 一致 q 阶增长条件

下面的引理引自文献[1]，推论 4.4，它在本文主要结果的证明中起着关键作用。

引理 3.1 设 $q\in(1,+\infty)$，设 X 是 Banach 空间，$f:X\to R\cup\{+\infty\}$ 是一个真的下半连续泛函，$\alpha\in(0,1)$，$(\bar{x},\bar{x}^*)\in gph(\partial f)$ 且 $\bar{x}\in A\subset(\partial f)^{-1}(\bar{x}^*)$，并设 $\kappa_0,\delta,r\in(0,+\infty)$ 及 $\rho_0\in\left[0,\frac{1}{q\kappa_0}\right)$ 使得

$$d(x,A)^{q-1}\le\kappa_0 d(\bar{x}^*,\partial(x)),\ \forall x\in B_X(\bar{x},\delta)$$

且

$$f(x)\ge f(\bar{x})+\langle\bar{x}^*,x-\bar{x}\rangle-\rho_0 d(x,A)^q,\ \forall x\in B_X[\bar{x},r].$$

令

$$\nu:=\max\left\{n\in N:n\le 1-\log_{\left(1+q(1-\alpha)\alpha^{q-1}\right)}(1-q\rho_0\kappa_0)\right\}, \tag{3.1}$$

$$\lambda:=\left(\frac{1}{q\alpha^q\kappa_0}-\frac{\rho_0}{\alpha^q}\right)\left(1+q(1-\alpha)\alpha^{q-1}\right)^\nu-\frac{1}{q\alpha^q\kappa_0} \tag{3.2}$$

及

$$\eta_n := -\left(\frac{1}{q\alpha^q\kappa_0}-\lambda\right)\left(1-q(1-\alpha)\alpha^{q-1}\right)^{n-1}+\frac{1}{q\alpha^q\kappa_0}, \forall n\in N. \tag{3.3}$$

则

a) $\nu\ge 1$，$\frac{1}{q\alpha^q\kappa_0}>\lambda>0$ 且 $\lim_{n\to\infty}\eta_n=\frac{1}{q\alpha^q\kappa_0}$；

b) $f(x)\ge f(\bar{x})+\langle\bar{x}^*,x-\bar{x}\rangle+\eta_n\alpha^q d(x,A)^q$，$\forall n\in N$ 及 $x\in B_X\left[\bar{x},\frac{\min\{r,\delta\}}{(2-\alpha)^{\nu+n-1}}\right]$。

下面的引理 3.2 对我们后面的叙述是有用的。

引理 3.2. 设 $q\in(1,+\infty)$ 且 $\alpha\in(0,1)$，则 $\frac{1}{q}>(1-\alpha)\alpha^{q-1}$。

证明：定义

$$\phi(t):=t^q,\forall t\in(0,1).$$

容易知道 ϕ 是凸函数，从而

$$\frac{1}{q}=\frac{\phi(t)}{t\phi'(t)}>(1-\alpha)\frac{\phi(t)-\phi(\alpha t)}{(t-\alpha t)\phi'(t)}\ge(1-\alpha)\frac{\phi'(\alpha t)}{\phi'(t)}=(1-\alpha)\alpha^{q-1},$$

证毕。

一个非减的函数 $\varphi:R_+\to R_+$ 是 admissible 函数(见参考文献[1])，若 $\varphi(0)=0$ 且 $[\varphi(t)\to 0\Rightarrow t\to 0]$。Yao，Zheng 和 Zhu [1]使用 admissible 函数研究了更一般的一致 φ-增长条件，并证明了如下结果：

定理 I. (参见文献[1]，定理 5.1)设 $\alpha\in(0,1),\varphi:R_+\to R_+$ 是一个严格凸的可微 admissible 函数满足 $\varphi'(0)=0$，X 是 Banach 空间，$f:X\to R\cup\{+\infty\}$ 是一个真的下半连续泛函，且 f 在 $(\bar{x},0)\in gph(\partial f)$ 处是次微分连续。并设 $\kappa,\delta_1,\delta_2,\tau\in(0,+\infty)$ 及 $\rho\in\left[0,\frac{1}{\mu_\alpha\kappa\tau}\right)$ 使得下述条件成立：

1) 对于任意的 $(x,u^*)\in B_X(\bar{x},\delta_1)\times B_{X^*}(0,\delta_1)$ 都有

$$\varphi'\left(\tau d\left(x,(\partial f)^{-1}(u^*)\right)\right)\le\kappa d\left(u^*,\partial f(x)\right);$$

2) 对于任意的 $x\in B_X(\bar{x},\delta_2)$，$(z,f(z))\in B_{X^*}((\bar{x},f(\bar{x})),\delta_2)$ 及 $u^*\in\partial f(z)\cap B_{X^*}(0,\delta_2)$ 都有

$$\langle u^*,x-z\rangle\le f(x)-f(z)+\rho\varphi\left(\alpha\tau d\left(x,(\partial f)^{-1}(u^*)\right)\right).$$

则对于任意 $\beta\in\left(0,\frac{1}{\mu_\alpha\kappa\tau}\right)$ 存在 $r,\delta\in(0,+\infty)$ 使得对于任意的 $u^*\in B_{X^*}(0,\delta)$ 都有 $x_{u^*}\in B_X(\bar{x},r)$，满足 $x_0=\bar{x}$ 且

$$\beta\varphi\left(\alpha\tau\|x-x_{u^*}\|\right)\le f(x)-f(x_{u^*})-\langle u^*,x-x_{u^*}\rangle,\forall x\in B_X(\bar{x},r), \tag{3.4}$$

这里

$$\mu_\alpha:=\sup_{t>0}\frac{\alpha\varphi'_+(\alpha t)}{\varphi'_+(t)} \tag{3.5}$$

及 φ'_+ 表示 φ 的右方向导数，故 f 在 $\bar{x}$ 处满足一致 φ-增长条件。

在 $\varphi(t)=t^q$ 的特殊情况下，$\mu_\alpha = t^q$ (见(3.5))，由定理 **I** 和命题 2.2 可得以下推论。

推论 I. 设 $q\in(1,+\infty)$，$\alpha\in(0,1)$，X 是 Banach 空间，$f: X\to R\cup\{+\infty\}$ 是一个真的下半连续泛函且 $(\bar{x},0)\in gph(\partial f)$。并设 $\kappa_0,\delta_1,\delta_2\in(0,+\infty)$ 及 $\rho_0\in\left[0,\frac{1}{q\kappa_0}\right)$ 使得下述条件成立：

1) 对于任意的 $(x,u^*)\in B_X(\bar{x},\delta_1)\times B_{X^*}(0,\delta_1)$ 都有

$$d\left(x,(\partial f)^{-1}(u^*)\right)^{q-1}\le \kappa_0 d\left(u^*,\partial f(x)\right);$$

2) 对于任意的 $x,z\in B_X(\bar{x},\delta_2)$ 及 $u^*\in\partial f(z)\cap B_{X^*}(0,\delta_2)$ 都有

$$\left\langle u^*,x-z\right\rangle\le f(x)-f(z)+\rho_0 d\left(x,(\partial f)^{-1}(u^*)\right)^q.$$

则对于任意 $\beta\in\left(0,\frac{1}{q\alpha^q\kappa_0}\right)$ 存在 $r,\delta\in(0,+\infty)$ 及映射 $\vartheta: B_{X^*}(0,\delta_1)\to B_X(\bar{x},\delta_2)$ 使得对于任意的 $(x,u^*)\in B_X(\bar{x},r)\times B_{X^*}(0,\delta)$ 有 $\vartheta(0)=\bar{x}$ 且

$$\beta\alpha^q\left\|x-\vartheta(u^*)\right\|^q\le f(x)-f\left(\vartheta(u^*)\right)-\left\langle u^*,x-\vartheta(u^*)\right\rangle, \tag{3.6}$$

故 f 在 $\bar{x}$ 处满足一致 q 阶增长条件。

定理 **I** 和推论 **I** 建立了对应一致增长条件的存在性，即存在半径 r 和 δ 分别使得定理 **I** 中的(3.4)和推论 **I** 中的(3.6)不等式成立。然而在算法的收敛性分析及稳定性分析中，只有存在性是不够的，需要知道相关性质成立的明确范围。本文主要改进了推论 **I** 中半径 r 和 δ 只有存在性的不足，我们将给出半径 r 和 δ 与条件中出现的 $\alpha,q,\kappa,\rho_0,\delta_1$ 和 δ_2 的确切数量关系。

定理 3.1. 设 $q\in(1,+\infty)$，$\alpha\in(0,1)$，X 是 Banach 空间，$f: X\to R\cup\{+\infty\}$ 是一个真的下半连续泛函且 $(\bar{x},0)\in gph(\partial f)$。并设 $\kappa_0,\delta_1,\delta_2\in(0,+\infty)$ 及 $\rho_0\in\left[0,\frac{1}{q\kappa_0}\right)$ 使得下述条件成立：

1) 对于任意的 $(x,u^*)\in B_X(\bar{x},\delta_1)\times B_{X^*}(0,\delta_1)$ 都有

$$d\left(x,(\partial f)^{-1}(u^*)\right)^{q-1}\le \kappa_0 d\left(u^*,\partial f(x)\right); \tag{3.7}$$

2) 对于任意的 $x,z\in B_X(\bar{x},\delta_2)$ 及 $u^*\in\partial f(z)\cap B_{X^*}(0,\delta_2)$ 都有

$$\left\langle u^*,x-z\right\rangle\le f(x)-f(z)+\rho_0 d\left(x,(\partial f)^{-1}(u^*)\right)^q. \tag{3.8}$$

对于任意的 $\beta\in\left(0,\frac{1}{q\alpha^q\kappa_0}\right)$，令

$$\begin{gathered}
N_\beta := \max\left\{n\in N: \log_{\left(1-q(1-\alpha)\alpha^{q-1}\right)}\frac{\left(1-q(1-\alpha)\alpha^{q-1}\right)\left(1-\beta q\alpha^q\kappa_0\right)}{1-\lambda q\alpha^q\kappa_0}\le n\right\},\\
\gamma(\beta):=\frac{\min\{\delta_1,\delta_2\}}{4(2-\alpha)^{\nu+N_\beta-1}},\\
r(\beta):=\min\left\{\delta_1,\delta_2,\frac{\beta\alpha^q\gamma^{q-1}(\beta)}{32^{q-1}},\frac{\gamma^{q-1}(\beta)}{4^{q-1}\kappa_0},\frac{\beta\alpha^q\gamma^{q-1}(\beta)}{16^q}\right\},
\end{gathered} \tag{3.9}$$

$$\delta(\beta):=\frac{\min\{\delta_1,\delta_2\}}{64(2-\alpha)^{\nu+N_\beta-1}}$$

及

$$\psi(u^*):=\underset{u\in B_X[\bar{x},\gamma(\beta)]}{\arg\min}(f-u^*),\forall u^*\in X^*,$$

而其中 ν 和 λ 分别由(3.1)和(3.2)定义，则 ψ 在 $B_{X^*}(0,r(\beta))$ 上是单值的且对于任意的 $(x,u^*)\in B_X(\bar{x},\delta(\beta))\times B_{X^*}(0,r(\beta))$ 有 $\vartheta(0)=\bar{x}$ 且

$$\beta\alpha^q\|x-\psi(u^*)\|^q\le f(x)-f(\psi(u^*))-\langle u^*,x-\psi(u^*)\rangle, \tag{3.10}$$

故 f 在 $\bar{x}$ 处满足一致 q 阶增长条件。

证明：由(3.7))及 $0\in\partial f(\bar{x})$ 可知

$$d\left(\bar{x},(\partial f)^{-1}(u^*)\right)^{q-1}\le\kappa_0 d(u^*,\partial f(\bar{x}))\le\kappa_0\|u^*\|,\forall u^*\in B_{X^*}(0,\delta_1). \tag{3.11}$$

对于任意的 $\beta\in\left(0,\frac{1}{q\alpha^q\kappa_0}\right)$，由 N_β 的定义可知

$$N_\beta\ge\log_{(1-q(1-\alpha)\alpha^{q-1})}\frac{(1-q(1-\alpha)\alpha^{q-1})(1-\beta q\alpha^q\kappa_0)}{1-\lambda q\alpha^q\kappa_0},$$

由于 $0<1-q(1-\alpha)\alpha^{q-1}<1$ (见引理 3.2)，可得

$$(1-q(1-\alpha)\alpha^{q-1})^{N_\beta}\le\frac{(1-q(1-\alpha)\alpha^{q-1})(1-\beta q\alpha^q\kappa_0)}{1-\lambda q\alpha^q\kappa_0},$$

又由于 $0<1-\lambda q\alpha^q\kappa_0$ (见引理 3.1(a))，从而

$$(1-\lambda q\alpha^q\kappa_0)(1-q(1-\alpha)\alpha^{q-1})^{N_\beta-1}\le1-\beta q\alpha^q\kappa_0,$$

由此及 η_n 的定义(见 3.3)，即得

$$\eta_{N_\beta}:=-\left(\frac{1}{q\alpha^q\kappa_0}-\lambda\right)(1-q(1-\alpha)\alpha^{q-1})^{N_\beta-1}+\frac{1}{q\alpha^q\kappa_0}\ge\beta. \tag{3.12}$$

令 $\delta:=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ 及 $r_1(\beta):=\min\left\{\delta,\frac{\gamma^{q-1}(\beta)}{\kappa_0}\right\}$，其中 $\gamma(\beta)$ 是由定义(3.9)定义。由(3.11)，δ 及 $r_1(\beta)$ 的定义可知对于任意的 $u^*\in B_{X^*}(0,r_1(\beta))$ 都存在 $z\in(\partial f)^{-1}(u^*)$ 使得 $\|\bar{x}-z\|^{q-1}<\kappa_0 r_1(\beta)\le\gamma^{q-1}(\beta)$，于是 $\|\bar{x}-z\|<\gamma(\beta)$，故

$$(\partial f)^{-1}(u^*)\cap B_X(\bar{x},\gamma(\beta))\ne\varnothing.$$

设 $u^*\in B_{X^*}(0,r_1(\beta))$ 及 $z\in(\partial f)^{-1}(u^*)\cap B_X(\bar{x},\gamma(\beta))$，由(3.9)可得

$$B_X\left(z,\frac{3\delta}{4}\right)\subset B_X\left(\bar{x},\|\bar{x}-z\|+\frac{3\delta}{4}\right)\subset B_X\left(\bar{x},\gamma(\beta)+\frac{3\delta}{4}\right)\subset B_X(\bar{x},\delta),$$

这样，由(3.7)，(3.8)及 δ 的定义可得

$$d\left(x,(\partial f)^{-1}\left(u^*\right)\right)^{q-1} \le \kappa_0 d\left(u^*,\partial f\left(x\right)\right), \forall x \in B_X\left(z,\frac{3\delta}{4}\right)$$

且

$$\left\langle u^*,x-z\right\rangle \le f\left(x\right)-f\left(z\right)+\rho_0 d\left(x,(\partial f)^{-1}\left(u^*\right)\right)^q, \forall x \in B_X\left[z,\frac{3\delta}{4}\right],$$

由引理 **3.1**(将 $\left(\overline{x},\overline{x}^*\right)$ 和 A 分别替换成 $\left(z,u^*\right)$ 和 $(\partial f)^{-1}\left(u^*\right)$，可得

$$f\left(x\right) \ge f\left(z\right)+\left\langle u^*,x-z\right\rangle+\eta N_\beta \alpha^q d\left(x,(\partial f)^{-1}\left(u^*\right)\right)^q, \forall x \in B_X\left[z,\frac{3\delta}{4(2-\alpha)^{\nu+N_\beta+1}}\right].$$

由(3.9)，即得

$$f\left(x\right) \ge f\left(z\right)+\left\langle u^*,x-z\right\rangle+\eta N_\beta \alpha^q d\left(x,(\partial f)^{-1}\left(u^*\right)\right)^q, \forall x \in B_X\left[z,3\gamma\left(\beta\right)\right]. \tag{3.13}$$

设 $f_{u^*} := f - u^*$，则由(3.12)和(3.13)，有

$$f_{u^*}\left(x\right) \ge f_{u^*}\left(z\right)+\beta\alpha^q d\left(x,(\partial f)^{-1}\left(u^*\right)\right)^q, \forall x \in B_X\left[z,3\gamma\left(\beta\right)\right].$$

由于

$$B_X\left[\overline{x},\gamma\left(\beta\right)\right] \subset B_X\left[z,\gamma\left(\beta\right)+\left\|\overline{x}-z\right\|\right] \subset B_X\left[z,2\gamma\left(\beta\right)\right],$$

所以

$$f_{u^*}\left(x\right) \ge f_{u^*}\left(z\right)+\beta\alpha^q d\left(x,(\partial f)^{-1}\left(u^*\right)\right)^q, \forall x \in B_X\left[\overline{x},\gamma\left(\beta\right)\right]. \tag{3.14}$$

这表明 $z \in \underset{u\in B_X\left[\overline{x},\gamma(\beta)\right]}{\arg\min} f_{u^*}\left(u\right)$。由 z 在 $(\partial f)^{-1}\left(u^*\right) \cap B_X\left(\overline{x},\gamma\left(\beta\right)\right)$ 上的任意性，则对于任意的 $u^* \in B_{X^*}\left(0,r_1\left(\beta\right)\right)$ 都有

$$\underset{u\in B_X\left[\overline{x},\gamma(\beta)\right]}{\arg\min} f_{u^*}\left(u\right) \supset (\partial f)^{-1}\left(u^*\right) \cap B_X\left(\overline{x},\gamma\left(\beta\right)\right). \tag{3.15}$$

令 $r_2\left(\beta\right) := \min\left\{r_1\left(\beta\right),\frac{\gamma^{q-1}\left(\beta\right)}{4^{q-1}\kappa_0}\right\}$，则由(3.11)可知对于任意的 $u^* \in B_{X^*}\left(0,r_2\left(\beta\right)\right) \subset B_{X^*}\left(0,\delta_1\right)$，都存在 $x_{u^*} \in (\partial f)^{-1}\left(u^*\right)$ 使得

$$\left\|x_{u^*}-\overline{x}\right\|^{q-1} < \kappa_0 r_2\left(\beta\right) \le \frac{\gamma^{q-1}\left(\beta\right)}{4^{q-1}},$$

故 $\left\|x_{u^*}-\overline{x}\right\| < \frac{\gamma\left(\beta\right)}{4}$。因此，对于任意的 $\left(x,u^*\right) \in B_X\left(\overline{x},\frac{\gamma\left(\beta\right)}{4}\right) \times B_{X^*}\left(0,r_2\left(\beta\right)\right)$ 都有

$$d\left(x,(\partial f)^{-1}\left(u^*\right)\right) \cap B_X\left(\overline{x},\gamma\left(\beta\right)\right) \le \left\|x-x_{u^*}\right\| \le \left\|x-\overline{x}\right\|+\left\|\overline{x}-x_{u^*}\right\| \le \frac{\gamma\left(\beta\right)}{2}$$

且

$$d\left(x,(\partial f)^{-1}\left(u^*\right) \setminus B_X\left(\overline{x},\gamma\left(\beta\right)\right)\right) \ge d\left(\overline{x},(\partial f)^{-1}\left(u^*\right) \setminus B_X\left(\overline{x},\gamma\left(\beta\right)\right)\right)-\left\|x-\overline{x}\right\| \ge \frac{3\gamma\left(\beta\right)}{4}.$$

注意到

$$d\left(x,(\partial f)^{-1}\left(u^*\right)\right)=\min\left\{d\left(x,(\partial f)^{-1}\left(u^*\right)\cap B_X\left(\bar{x},\gamma(\beta)\right)\right),d\left(x,(\partial f)^{-1}\left(u^*\right)\setminus B_X\left(\bar{x},\gamma(\beta)\right)\right)\right\},$$

这表明

$$d\left(x,(\partial f)^{-1}\left(u^*\right)\right)=d\left(x,(\partial f)^{-1}\left(u^*\right)\cap B_X\left(\bar{x},\gamma(\beta)\right)\right). \tag{3.16}$$

由此及(3.15)可知对于任意的$\left(x,u^*\right)\in B_X\left(\bar{x},\frac{\gamma(\beta)}{4}\right)\times B_{X^*}\left(0,r_2(\beta)\right)$都有

$$d\left(x,(\partial f)^{-1}\left(u^*\right)\right)=d\left(x,\underset{u\in B_X\left[\bar{x},\gamma(\beta)\right]}{\arg\min}f_{u^*}(u)\right).$$

设$u^*\in B_{X^*}\left(0,r_2(\beta)\right)$及$z\in(\partial f)^{-1}\left(u^*\right)\cap B_X\left(\bar{x},\gamma(\beta)\right)$，则由(3.14)和(3.16))可得

$$f_{u^*}(x)\geq f_{u^*}(z)+\beta\alpha^q d\left(x,\underset{u\in B_X\left[\bar{x},\gamma(\beta)\right]}{\arg\min}f_{u^*}(u)\right)^q,\forall x\in B_X\left(\bar{x},\frac{\gamma(\beta)}{4}\right).$$

即，对于任意的$\left(x,u^*\right)\in B_X\left(\bar{x},\frac{\gamma(\beta)}{4}\right)\times B_{X^*}\left(0,r_2(\beta)\right)$都有

$$\beta\alpha^q d\left(x,\underset{u\in B_X\left[\bar{x},\gamma(\beta)\right]}{\arg\min}f_{u^*}(u)\right)^q\leq f_{u^*}(x)-f_{u^*}(z)\leq f_{u^*}(x)-\min_{y\in B_X\left[\bar{x},\gamma(\beta)\right]}f_{u^*}(y). \tag{3.17}$$

由(3.13) (将$\left(z,u^*\right)$替换成$\left(\bar{x},0\right)$)，可得

$$\min_{y\in B_X\left[\bar{x},\gamma(\beta)\right]}f_{u^*}(y)=f(\bar{x}). \tag{3.18}$$

注意到$\delta(\beta)<\frac{\gamma(\beta)}{4},r(\beta)\leq r_2(\beta)$及$\psi$的定义，由(3.17)，(3.18)及$\vartheta$的定义，为了证明(3.10)，我们只需要证明$\psi$在$B_{X^*}\left(0,r(\beta)\right)$上是单值的且

$$\psi\left(B_{X^*}\left(0,r(\beta)\right)\right)\subset B_X\left(\bar{x},\delta(\beta)\right). \tag{3.19}$$

令$r_3(\beta):=\min\left\{r_2(\beta),\frac{\beta\alpha^q\gamma^{q-1}(\beta)}{16^q}\right\}$，则由(3.17)和(3.18)可知对于任意的$u^*\in B_{X^*}\left(0,r_3(\beta)\right)$都有

$$\begin{aligned}\beta\alpha^q d\left(\bar{x},\psi\left(u^*\right)\right)^q&\leq f_{u^*}(\bar{x})-\min_{y\in B_X\left[\bar{x},\gamma(\beta)\right]}f_{u^*}(y)\\&=\min_{y\in B_X\left[\bar{x},\gamma(\beta)\right]}f(y)-\min_{y\in B_X\left[\bar{x},\gamma(\beta)\right]}\left(f(y)-\left\langle u^*,y-\bar{x}\right\rangle\right)\\&\leq\min_{y\in B_X\left[\bar{x},\gamma(\beta)\right]}f(y)-\min_{y\in B_X\left[\bar{x},\gamma(\beta)\right]}\left(f(y)-\gamma(\beta)\left\|u^*\right\|\right)\\&=\gamma(\beta)\left\|u^*\right\|<\gamma(\beta)r_3(\beta).\end{aligned}$$

从而

$$d\left(\bar{x},\psi\left(u^*\right)\right)<\frac{\gamma(\beta)}{16},\forall u^*\in B_{X^*}\left(0,r_3(\beta)\right),$$

于是对于任意的$u^*\in B_{X^*}\left(0,r_3(\beta)\right)$都存在$x_{u^*}\in\psi\left(u^*\right)$使得

$$\left\|x_{u^*}-\overline{x}\right\|<\frac{\gamma(\beta)}{16}. \tag{3.20}$$

设 $u^*,v^*\in B_{X^*}\left(0,r_3(\beta)\right)$ 及 $u\in\psi\left(u^*\right)\cap B_X\left(\overline{x},\frac{\gamma(\beta)}{16}\right)$，取 $\{v_n\}\subset\psi\left(v^*\right)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\left\|u-v_n\right\|=d\left(u,\psi\left(v^*\right)\right). \tag{3.21}$$

由(3.20)，我们有

$$d\left(u,\psi\left(v^*\right)\right)\le\left\|u-x_{v^*}\right\|\le\left\|u-\overline{x}\right\|+\left\|\overline{x}-x_{v^*}\right\|<\frac{\gamma(\beta)}{8}.$$

不失一般性，我们假设对于任意的 $n\in N$ 都有 $\left\|u-v_n\right\|<\frac{\gamma(\beta)}{8}$。于是

$$\left\|\overline{x}-v_n\right\|\le\left\|u-v_n\right\|+\left\|\overline{x}-u\right\|<\frac{3\gamma(\beta)}{16}<\frac{\gamma(\beta)}{4},\forall n\in N.$$

由(3.17)及 ψ 的定义可知对于任意的 $n\in N$ 都有

$$\beta\alpha^q d\left(u,\psi\left(v^*\right)\right)^q\le f_{v^*}(u)-\min_{y\in B_X\left[\overline{x},\gamma(\beta)\right]}f_{v^*}(y)=f_{v^*}(u)-f_{v^*}(v_n)$$

且

$$\beta\alpha^q d\left(v_n,\psi\left(u^*\right)\right)^q\le f_{u^*}(v_n)-\min_{y\in B_X\left[\overline{x},\gamma(\beta)\right]}f_{u^*}(y)=f_{u^*}(v_n)-f_{u^*}(u).$$

因此，对于任意的 $n\in N$ 都有

$$\begin{aligned}\beta\alpha^q d\left(u,\psi\left(v^*\right)\right)^q&\le\beta\alpha^q d\left(u,\psi\left(v^*\right)\right)^q+\beta\alpha^q d\left(v_n,\psi\left(u^*\right)\right)^q\\&\le f_{v^*}(u)-f_{v^*}(v_n)+f_{u^*}(v_n)-f_{u^*}(u)\\&=\left\langle u^*-v^*,u-v_n\right\rangle\le\left\|u^*-v^*\right\|\left\|u-v_n\right\|.\end{aligned}$$

由此及(3.21)，令 $n\to\infty$，可得

$$\beta\alpha^q d\left(u,\psi\left(v^*\right)\right)^q\le\left\|u^*-v^*\right\|d\left(u,\psi\left(v^*\right)\right),$$

即

$$d\left(u,\psi\left(v^*\right)\right)\le\frac{1}{\alpha^{\frac{q}{q-1}}\beta^{\frac{1}{q-1}}}\left(\left\|u^*-v^*\right\|\right)^{\frac{1}{q-1}},$$

这表明

$$u\in\psi\left(v^*\right)+\frac{2}{\frac{1}{\alpha^{\frac{q}{q-1}}\beta^{\frac{1}{q-1}}}}\left(\left\|u^*-v^*\right\|\right)^{\frac{1}{q-1}}B_X.$$

由 u 在 $\psi\left(u^*\right)\cap B_X\left(\overline{x},\frac{\gamma(\beta)}{16}\right)$ 上的任意性，可知对于任意的 $u^*,v^*\in B_{X^*}\left(0,r_3(\beta)\right)$ 都有

$$\psi\left(u^*\right)\cap B_X\left(\bar{x},\frac{\gamma(\beta)}{16}\right)\subset\psi\left(v^*\right)+L\left(\left\|u^*-v^*\right\|\right)^{\frac{1}{q-1}}B_X, \tag{3.22}$$

这里 $L:=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\alpha^{\frac{q}{q-1}}\beta^{\frac{1}{q-1}}}}$，设 $u^*\in B_{X^*}\left(0,r_3(\beta)\right)$ 及 $u\in\psi\left(u^*\right)$，则有

$$\left(f+\delta_{B_X[\bar{x},\gamma(\beta)]}\right)^*\left(u^*\right)=\left\langle u^*,u\right\rangle-f(u). \tag{3.23}$$

于是 $u\in\partial\left(f+\delta_{B_X[\bar{x},\gamma(\beta)]}\right)^*\left(u^*\right)$（参见文献[26]，命题 5.3.1)。因此

$$\psi\left(u^*\right)\subset\partial\left(f+\delta_{B_X[\bar{x},\gamma(\beta)]}\right)^*\left(u^*\right),\forall u^*\in B_{X^*}\left(0,r_3(\beta)\right). \tag{3.24}$$

由于 $\bar{x}\in\psi(0)\cap B_X\left(\bar{x},\dfrac{\gamma(\beta)}{16}\right)$，结合(3.22)，则有

$$\bar{x}\in\psi\left(u^*\right)+L\left(\left\|u^*\right\|\right)^{\frac{1}{q-1}}B_X\subset\psi\left(u^*\right)+Lr_3^{\frac{1}{q-1}}(\beta)B_X,\forall u^*\in B_X\left(0,r_3(\beta)\right).$$

由 $r(\beta)$ 的定义，可知 $r(\beta)\le r_3(\beta)\le\dfrac{\beta\alpha^q r^{q-1}(\beta)}{16^q}$，结合 $r(\beta)$ 以及 L 的定义可得 $Lr^{\frac{1}{q-1}}(\beta)=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\alpha^{\frac{q}{q-1}}\beta^{\frac{1}{q-1}}}}r^{\frac{1}{q-1}}(\beta)\le\dfrac{r(\beta)}{16}$，从而

$$\psi\left(u^*\right)\cap B_X\left(\bar{x},\frac{r(\beta)}{16}\right)\supset\psi\left(u^*\right)+B_X\left(\bar{x},L\gamma^{\frac{1}{q-1}}(\beta)\right)\neq\varnothing,\forall u^*\in B_X\left(0,r(\beta)\right).$$

设 $u^*\in B_{X^*}\left(0,r(\beta)\right)$ 及 $x_{u^*}\in\psi\left(u^*\right)\cap B_X\left(\bar{x},\dfrac{r(\beta)}{16}\right)$，则由(3.22)可知对于任意的 $v^*\in B_{X^*}\left(0,r(\beta)\right)$ 及 $z_{v^*}\in\psi\left(v^*\right)$ 使得

$$\left\|x_{u^*}-z_{v^*}\right\|\le L\left\|u^*-v^*\right\|^{\frac{1}{q-1}}, \tag{3.25}$$

注意到(3.24)，则我们有

$$x_{u^*}\in\partial\left(f+\delta_{B_X[\bar{x},\gamma(\beta)]}\right)^*\left(u^*\right)\text{且 }z_{v^*}\in\partial\left(f+\delta_{B_X[\bar{x},\gamma(\beta)]}\right)^*\left(v^*\right)$$

由于 $\left(f+\delta_{B_X[\bar{x},\gamma(\beta)]}\right)^*$ 是凸函数，可得

$$\left\langle z_{v^*},u^*-v^*\right\rangle\le\left(f+\delta_{B_X[\bar{x},\gamma(\beta)]}\right)^*\left(u^*\right)-\left(f+\delta_{B_X[\bar{x},\gamma(\beta)]}\right)^*\left(v^*\right)$$

且

$$\left\langle x_{u^*},v^*-u^*\right\rangle\le\left(f+\delta_{B_X[\bar{x},\gamma(\beta)]}\right)^*\left(v^*\right)-\left(f+\delta_{B_X[\bar{x},\gamma(\beta)]}\right)^*\left(u^*\right).$$

由此及(3.25)，我们有

$$0 \le \left(f+\delta_{B_X[\bar{x},\gamma(\beta)]}\right)^*\left(v^*\right)-\left(f+\delta_{B_X[\bar{x},\gamma(\beta)]}\right)^*\left(u^*\right)-\left\langle x_{u^*}, v^*-u^*\right\rangle$$
$$\le \left\langle z_{v^*}-x_{u^*}, v^*-u^*\right\rangle \le L\left\|v^*-u^*\right\|^{1+\frac{1}{q+1}},$$

这和 v^* 在 $B_{X^*}\left(0,r(\beta)\right)$ 上的任意性表明 $\left(f+\delta_{B_X[\bar{x},\gamma(\beta)]}\right)^*$ 在 u^* 处的可微且有

$$\partial\left(f+\delta_{B_X[\bar{x},\gamma(\beta)]}\right)^*\left(u^*\right)=\left\{\nabla\left(f+\delta_{B_X[\bar{x},\gamma(\beta)]}\right)^*\left(u^*\right)\right\}=\left\{x_{u^*}\right\},\forall u^*\in B_{X^*}\left(0,r(\beta)\right).$$

由(3.24)，即得

$$\psi\left(u^*\right)=\left\{\nabla\left(f+\delta_{B_X[\bar{x},\gamma(\beta)]}\right)^*\left(u^*\right)\right\}=\left\{x_{u^*}\right\}\subset B_X\left(\bar{x},\frac{r(\beta)}{16}\right),\forall u^*\in B_{X^*}\left(0,r(\beta)\right),$$

所以 ψ 在 $B_{X^*}\left(0,r(\beta)\right)$ 上是单值的且有

$$\psi\left(B_{X^*}\left(0,r_3(\beta)\right)\right)\subset B_X\left(\bar{x},\frac{r(\beta)}{16}\right). \tag{3.26}$$

由 $\delta(\beta)$ 的定义可知 $\delta(\beta)=\frac{r(\beta)}{16}$，结合(3.17)，(3.26)及 ψ 的定义，可得

$$\beta\alpha^q\left\|x-\vartheta\left(u^*\right)\right\|^q\le f(x)-f\left(x_{u^*}\right)-\left\langle u^*,x-x_{u^*}\right\rangle,\forall x\in B_X\left(\bar{x},\delta(\beta)\right),$$

由此及 ϑ 的定义可得(3.10)，证毕。

注 3.1 定理 3.1 中的条件(1)即为 ∂f 在 $(\bar{x},0)$ 处是 $q-1$ 阶度量正则的，条件(2)即为 f 在 $(\bar{x},0)$ 处是 q 阶 S-正则性且 f 在 $(\bar{x},0)$ 处是次微分连续的。

参考文献

[1] Yao, J.C., Zheng, X.Y. and Zhu, J. (2017) Stable Minimizers of φ-Regular Functions. *SIAM Journal on Optimization*, **27**, 1150-1170. https://doi.org/10.1137/16M1086741

[2] Poliquin, R.A. and Rockafellar, R.T. (1996) Prox-Regular Functions in Variational Analysis. *Transactions of the American Mathematical Society*, **348**, 1805-1838. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-96-01544-9

[3] Bernard, F. and Thibault, L. (2005) Prox-Regular Functions in Hilbert Spaces. *Journal of Mathematical Analysis Applications*, **303**, 1-14. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.06.003

[4] Bacák, M., Borwein, J.M., *et al*. (2009) Infimal Convolutions and Lipschitzian Properties of Subdifferentials for Prox-Regular Functions in Hilbert Spaces. *Journal of Convex Analysis*, **17**, 737-763.

[5] Bernard, F. and Thibault, L. (2004) Prox-Regularity of Functions and Sets in Banach Spaces. *Set-Valued and Variational Analysis*, **12**, 25-47. https://doi.org/10.1023/B:SVAN.0000023403.87092.a2

[6] Bernard, F. and Thibault, L. (2005) Uniform Prox-Regularity of Functions and Epigraphs in Hilbert Spaces. *Nonlinear Analysis Theory Methods Applications*, **60**, 187-207. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(04)00283-4

[7] Hare, W.L. and Poliquin, R.A. (2007) Prox-Regularity and Stability of the Proximal Mapping. *Journal of Convex Analysis*, **14**, 589-606.

[8] Poliquin, R.A. and Rockafellar, R.T. (2010) A Calculus of Prox-Regularity. *Journal of Convex Analysis*, No. 1, 203-210.

[9] Drusvyatskiy, D. and Lewis, A.S. (2012) Tilt Stability, Uniform Quadratic Growth, and Strong Metric Regularity of the Subdifferential. *Siam Journal on Optimization*, **23**, 256-267. https://doi.org/10.1137/120876551

[10] Gfrerer, H. and Mordukhovich, B.S. (2015) Complete Characterizations of Tilt Stability in Nonlinear Programming under Weakest Qualification Conditions. *Mathematics*.

[11] Mordukhovich, B.S. and Nghia, T.T.A. (2015) Second-Order Characterizations of Tilt Stability with Applications to Nonlinear Programming. *Mathematical Programming*, **149**, 83-104. https://doi.org/10.1007/s10107-013-0739-8

[12] Mordukhovich, B.S. and Nghia, T.T.A. (2013) Second-Order Variational Analysis and Characterizations of Tilt-Stable Optimal Solutions in Infinite-Dimensional Spaces. *Nonlinear Analysis Theory Methods Applications*, **86**, 159-180. https://doi.org/10.1016/j.na.2013.03.014

[13] Modukhovich, B.S. and Outrata, J.V. (2013) Tilt Stability in Nonlinear Programming under Mangasarian-Fromovitz Constraint Qualifcation. *Kybernetika*, **49**, 446-464.

[14] Poliquin, R.A. and Rockafellar, R.T. (1998) Tilt Stability of a Local Minimum. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[15] Zheng, X.Y. and Ng, K.F. (2015) Holder Stable Minimizers, Tilt Stability and Holder Metric Regularity of Subdifferential. *SIAM Journal on Optimization*, **25**, 416-438.

[16] Zheng, X.Y. and Ng, K.F. (2015) Hölder Weak Sharp Minimizers and Hölder Tilt-Stability. *Nonlinear Analysis*, **120**, 186-201.

[17] Mordukhovich, B.S. (1992) Sensitivity Analysis in Nonsmooth Optimization. In: Field, D.A. and Komkov, V., Eds., *Theoretical Aspects of Industrial Design*, Philadelphia, 32-46.

[18] Mordukhovich, B.S. and Rockafellar, R.T. (2011) Second-Order Subdifferential Calculus with Applications to Tilt Stability in Optimization. *Mathematics*, **22**, 953-986.

[19] Aragon Artacho, F.J. and Geoffroy, M.H. (2008) Characterization of Metric Regularity of Subdifferentials. *Journal of Convex Analysis*, **15**, 365-380.

[20] Drusvyatskiy, D., Mordukhovich, B.S. and Nghia, T.T.A. (2013) Second-Order Growth, Tilt Stability, and Metric Regularity of the Subdifferential. *Journal of Convex Analysis*, **21**.

[21] Mordukhovich, B.S. and Ouyang, W. (2015) Higher-Order Metric Subregularity and Its Applications. *Journal of Global Optimization*, **63**, 777-795. https://doi.org/10.1007/s10898-015-0271-x

[22] Yao, J.C. and Zheng, X.Y. (2015) Error Bound and Well-Posedness with Respect to an Admissible Functions. *Applicable Analysis*, **95**, 1-18. https://doi.org/10.1080/00036811.2014.992104

[23] Dontchev, A.L. and Zolezzi, T. (1993) Well-Posed Optimization Problems. Well-Posed Optimization Problems. Springer-Verlag, Berlin.

[24] Zheng, X.Y. and Zhu, J. (2016) Stable Well-Posedness and Tilt Stability with Respect to Admissible Functions.

[25] Clarke, F.H. (1984) Nonsmooth Analysis and Optimization. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, **5**, 847-853.

[26] Lucchetti, R. (2006) Convexity and Well-Posed Problems. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/0-387-31082-7