Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(1), 135-144
Published Online January 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.81015

Periodic and Asymptotically Periodic Solutions on Nonlinear Coupled Integro-Differential Systems with Impulses

Qiufeng Chen, Jianli Li

School of Mathmatics and Statistics, Hunan Normal University, Changsha Hunan
Email: 995460263@qq.com, ljianli@sina.com

Received: Jan. 2nd, 2019; accepted: Jan. 17th, 2019; published: Jan. 24th, 2019

Abstract

In this paper, we study the existence of periodic and asymptotically periodic solutions for a coupled nonlinear Volterra integro-differential equation with impulses. By using Schauder's fixed point theorem, we obtain that the system has at least one periodic solution and an asymptotically periodic solution.

Keywords

Impulsive Differential Equation, Schauder's Fixed Point Theorem, Periodic Solutions, Asymptotic Periodic Solutions

具有脉冲的非线性耦合积分–微分系统的周期性

陈秋凤，李建利

湖南师范大学，数学与统计学院，湖南 长沙
Email: 995460263@qq.com, ljianli@sina.com

收稿日期：2019年1月2日；录用日期：2019年1月17日；发布日期：2019年1月24日

摘　要

该文研究了具有脉冲的非线性耦合积分—微分系统的周期性。利用Schauder不动点定理，证明了具有脉

文章引用: 陈秋凤, 李建利. 具有脉冲的非线性耦合积分–微分系统的周期性[J]. 应用数学进展, 2019, 8(1): 135-144.
DOI: 10.12677/aam.2019.81015

冲的非线性耦合积分—微分系统至少存在一个周期解和一个渐近周期解，我们的结果推广和改进了相关文献的结果。

关键词

脉冲微分方程，Schauder不动点定理，周期解，渐近周期解

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

脉冲效应指在一定时间内状态突然发生改变，脉冲微分方程广泛应用于种群生物学，医学，工程，化学等领域[1] [2] [3] [4] [5]。耦合积分-微分方程也广泛应用于生物和环境科学的许多领域。该文中，我们研究一类具有脉冲的非线性耦合积分-微分方程周期解和渐近周期解的存在性。

在文献[6] [7] [8] [9]中，作者研究了 Volterra 积分－微分方程线性系统渐近周期解的存在性。在文献[10]中，作者考虑了无脉冲时周期解和渐近周期解的存在性，该文改进了文献[10]中的一些条件，进而得到周期解和渐近周期解的存在性结果。

该文考虑下面的耦合 Volterra 脉冲微分方程

$$\begin{cases} x'(t)=h_1(t)x(t)+h_2(t)y(t)+\int_{-\infty}^{t}a(t,s)f(x(s),y(s)),t\neq t_k \\ y'(t)=p_1(t)y(t)+p_2(t)x(t)+\int_{-\infty}^{t}b(t,s)g(x(s),y(s)),t\neq t_k \\ x(t_k^+)=x(t_k)+I_k(x(t_k)),t=t_k \\ y(t_k^+)=y(t_k)+J_k(y(t_k)),t=t_k \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 a，b，f，g，$h_i,p_i,i=1,2$，$I_k,J_k,k\in N^+$ 是连续函数。

假设存在一个正常数 $T>0$，使得对 $\forall t,s\in R$ 有

$$\begin{aligned} &a(t+T,s+T)=a(t,s),b(t+T,s+T)=b(t,s), \\ &p_i(t+T)=p_i(t),h_i(t+T)=h_i(t),i=1,2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

且存在常数 $q>0$，使得

$$t_{k+q}=t_k+T,I_{k+q}(\cdot)=I_k(\cdot),J_{k+q}(\cdot)=J_k(\cdot),k\in N^+ \tag{1.3}$$

此外，假设

$$\int_0^T h_1(s)\mathrm{d}s\neq 0,\int_0^T p_1(s)\mathrm{d}s\neq 0 \tag{1.4}$$

定义 $P_T=\{(\varphi,\psi)(t+T)=(\varphi,\psi)(t)\}$，其中 φ,ψ 是实值连续函数。定义范数

$$\|(x,y)\|=\max\left\{\max_{t\in[0,T]}|x(t)|,\max_{t\in[0,T]}|y(t)|\right\}$$

那么，P_T 是 Banach 空间。

引理 1.1 假设(1.2)~(1.4)成立，如果 $(x,y)\in P_T$，那么 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是(1.1)的一个周期解当且仅当

$$x(t)=\begin{cases}x^*(t), & t\in[0,T]\\ x^*(t-nT), & t\in[nT,(n+1)T]\end{cases}$$

$$y(t)=\begin{cases}y^*(t), & t\in[0,T]\\ y^*(t-nT), & t\in[nT,(n+1)T]\end{cases}$$

其中

$$x^*(t)=\int_0^T G_1(t,s)\left(h_2(s)y(s)+\int_{-\infty}^{s}a(s,u)f(x(u),y(u))\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<T}G_1(t,t_k)I_k(x(t_k))$$

$$G_1(t,s)=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\int_0^T h_1(s)\mathrm{d}s}}\begin{cases}\mathrm{e}^{\int_s^t h_1(u)\mathrm{d}u}, & 0\le s<t\le T\\ \mathrm{e}^{\int_s^{t+T} h_1(u)\mathrm{d}u}, & 0\le t\le s\le T\end{cases}$$

$$y^*(t)=\int_0^T G_2(t,s)\left(p_2(s)x(s)+\int_{-\infty}^{s}b(s,u)g(x(u),y(u))\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<T}G_2(t,t_k)J_k(y(t_k))$$

$$G_2(t,s)=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\int_0^T p_1(s)\mathrm{d}s}}\begin{cases}\mathrm{e}^{\int_s^t p_1(u)\mathrm{d}u}, & 0\le s<t\le T\\ \mathrm{e}^{\int_s^{t+T} p_1(u)\mathrm{d}u}, & 0\le t\le s\le T\end{cases}$$

证明： 设 $(x,y)\in P_T$ 是(1.1)的解，对(1.1)的第一个方程从 $[0,t]$ 积分得

$$x(t)\mathrm{e}^{-\int_0^t h_1(s)\mathrm{d}s}-x(0)=\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s h_1(u)du}\left(h_2(s)y(s)+\int_{-\infty}^{s}a(s,u)f(x(u),y(u))\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s$$
$$+\sum_{0<t_k<t}\mathrm{e}^{-\int_0^{t_k} h_1(s)\mathrm{d}s}I_k(x(t_k))$$

由 $x(0)=x(T)$ 得

$$\begin{aligned}x^*(t)&=x(0)\mathrm{e}^{\int_0^t h_1(u)\mathrm{d}u}+\int_0^t \mathrm{e}^{\int_s^t h_1(u)\mathrm{d}u}\left(h_2(s)y(s)+\int_{-\infty}^{s}a(s,u)f(x(u),y(u))\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<T}\mathrm{e}^{\int_{t_k}^t h_1(s)\mathrm{d}s}I_k(x(t_k))\\
&=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\int_0^T h_1(s)\mathrm{d}s}}\int_0^t \mathrm{e}^{\int_s^t h_1(u)\mathrm{d}u}\left(h_2(s)y(s)+\int_{-\infty}^{s}a(s,u)f(x(u),y(u))\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s\\
&\quad+\frac{\mathrm{e}^{\int_0^T h_1(s)\mathrm{d}s}}{1-\mathrm{e}^{\int_0^T h_1(s)\mathrm{d}s}}\int_t^T \mathrm{e}^{\int_s^t h_1(u)\mathrm{d}u}\left(h_2(s)y(s)+\int_{-\infty}^{s}a(s,u)f(x(u),y(u))\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s\\
&\quad+\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\int_0^T h_1(s)\mathrm{d}s}}\sum_{0<t_k<t}\mathrm{e}^{\int_{t_k}^t h_1(s)\mathrm{d}s}I_k(x(t_k))+\frac{\mathrm{e}^{\int_0^T h_1(s)\mathrm{d}s}}{1-\mathrm{e}^{\int_0^T h_1(s)\mathrm{d}s}}\sum_{t<t_k<T}\mathrm{e}^{\int_{t_k}^t h_1(s)\mathrm{d}s}I_k(x(t_k))\\
&=\int_0^T G_1(t,s)\left(h_2(s)y(s)+\int_{-\infty}^{s}a(s,u)f(x(u),y(u))\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<T}G_1(t,t_k)I_k(x(t_k))\end{aligned}$$

同理可证，

$$y^*(t)=\int_0^T G_2(t,s)\left(p_2(s)x(s)+\int_{-\infty}^{s} b(s,u)g(x(u),y(u))\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<T}G_2(t,t_k)J_k(y(t_k))$$

反之亦然，因此，引理 1.1 得证。

2. 周期解

定理 2.1 (Schuder 不动点定理)设 X 是 Banach 空间，K 是 X 中有界闭凸子集。如果 $T:K\to K$ 是全连续的，则 T 在 K 中有一个不动点。

本文给出以下假设。

假设存在正常数 $L_1,L_2,L_1^*,L_2^*,M_1,M_2,N_1,N_2,b_k,c_k,(k\in N^+)$，使得

$$|f(x,y)|\le M_1,\ |g(x,y)|\le M_2 \tag{2.1}$$

$$\int_0^T|G_1(t,s)h_2(s)|\mathrm{d}s\le L_1,\ \int_0^T|G_2(t,s)p_2(s)|\mathrm{d}s\le L_2 \tag{2.2}$$

$$\int_0^T|G_1(t,s)|\int_{-\infty}^{s}|a(s,u)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s\le N_1,\ \int_0^T|G_2(t,s)|\int_{-\infty}^{s}|b(s,u)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s\le N_2 \tag{2.3}$$

$$\begin{cases}|I_k(x)|\le b_k|x|,\left|\sum_{k=1}^{p}G_1(t,t_k)b_k\right|\le L_1^*,t\in[0,T]\\ |J_k(x)|\le c_k|y|,\left|\sum_{k=1}^{p}G_2(t,t_k)c_k\right|\le L_2^*,t\in[0,T]\end{cases} \tag{2.4}$$

设 $\Omega_M=\{(x,y):(x,y)\in P_T,\|(x,y)\|\le M\}$ 是 P_T 的子集，则 Ω_M 是 P_T 中的有界闭子集。

定义算子 $F:\Omega_M\to P_T$

$$F(x,y)=(F_1(x,y)(t),F_2(x,y)(t))$$

其中

$$F_1(x,y)(t)=\int_0^T G_1(t,s)\left(h_2(s)y(s)+\int_{-\infty}^{s}a(s,u)f(x(u),y(u))\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<T}G_1(t,t_k)I_k(x(t_k))$$

$$F_2(x,y)(t)=\int_0^T G_2(t,s)\left(p_2(s)x(s)+\int_{-\infty}^{s}b(s,u)g(x(u),y(u))\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<T}G_2(t,t_k)J_k(y(t_k))$$

定理 2.2 假设(1.2)~(1.4)，(2.1)~(2.4)成立，且

$$L_1+L_1^*<1,\ L_2+L_2^*<1 \tag{2.5}$$

则(1.1)至少有一个 T-周期解。

证明：若 $x(t),y(t)$ 是(1.1)的周期解，由引理 1.1 可知，$F(x,y)(t+T)=F(x,y)(t)$。设

$$M=\max\left\{\frac{N_1M_1}{1-L_1-L_1^*},\frac{N_2M_2}{1-L_2-L_2^*}\right\}$$

对于 $(x,y)\in\Omega_M,t\in[0,T]$ 有

$$\left|F_1(x,y)(t)\right| \le \int_0^T \left|G_1(t,s)h_2(s)\right|\left|y(s)\right|\mathrm{d}s + \sum_{0<t_k<T}\left|G_1(t,t_k)\right|\left|I_k(x(t_k))\right|$$
$$+\int_0^T \left|G_1(t,s)\right|\int_{-\infty}^{s}\left|a(s,u)\right|\left|f(x(u),y(u))\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}s$$
$$\le ML_1 + N_1M_1 + ML_1^* \le M$$

$$\left|F_2(x,y)(t)\right| \le \int_0^T \left|G_2(t,s)p_2(s)\right|\left|x(s)\right|\mathrm{d}s + \sum_{0<t_k<T}\left|G_2(t,t_k)\right|\left|J_k(y(t_k))\right|$$
$$+\int_0^T \left|G_2(t,s)\right|\int_{-\infty}^{s}\left|b(s,u)\right|\left|g(x(u),y(u))\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}s$$
$$\le ML_2 + N_2M_2 + ML_2^* \le M$$

所以，$F(\Omega_M)\subseteq\Omega_M$。

下证 F 连续。取 Ω_M 中的一个序列 $\{(x^n,y^n)\}$，且

$$\lim_{n\to\infty}\left\|(x^n,y^n)-(x,y)\right\|=0$$

因为 Ω_M 是闭的，我们有 $(x,y)\in\Omega_M$。由 F 的定义，有

$$\left\|F(x^n,y^n)-F(x,y)\right\|$$
$$=\max\left\{\max_{t\in[0,T]}\left|F_1(x^n,y^n)(t)-F_1(x,y)(t)\right|,\max_{t\in[0,T]}\left|F_2(x^n,y^n)(t)-F_2(x,y)(t)\right|\right\}$$

$$\left|F_1(x^n,y^n)(t)-F_1(x,y)(t)\right|$$
$$=\left|\int_0^T G_1(t,s)\left(h_2(s)y^n(s)+\int_{-\infty}^{s}a(s,u)f(x^n(u),y^n(u))\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s\right.$$
$$-\int_0^T G_1(t,s)\left(h_2(s)y(s)+\int_{-\infty}^{s}a(s,u)f(x(u),y(u))\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s$$
$$\left.+\sum_{0<t_k<T}G_1(t,t_k)\left(I_k(x^n(t_k))-I_k(x(t_k))\right)\right|$$
$$\le\int_0^T\left|G_1(t,s)\right|\left(\int_{-\infty}^{s}\left|a(s,u)\right|\left|f(x^n(u),y^n(u))-f(x(u),y(u))\right|\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s$$
$$+\int_0^T\left|G_1(t,s)h_2(s)\right|\left|y^n(s)-y(s)\right|\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<T}\left|G_1(t,t_k)\right|\left|I_k(x^n(t_k))-I_k(x(t_k))\right|$$

由 f,I_k 的连续性和 Lebesgue 控制收敛定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\max_{t\in[0,T]}\left|F_1(x^n,y^n)(t)-F_1(x,y)(t)\right|=0$$

同理可证，

$$\lim_{n\to\infty}\max_{t\in[0,T]}\left|F_2(x^n,y^n)(t)-F_2(x,y)(t)\right|=0$$

所以，F 是连续映射。因为 $F(\Omega_M)\subseteq\Omega_M$，所以 $F(\Omega_M)$ 是一致有界的。易证对任意的 $(x,y)\in\Omega_M,t\ne t_k$ 存在一个常数 $L>0$，使得 $\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_1(x,y)(t)\right|\le L,\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_2(x,y)(t)\right|\le L$，即 $\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(x,y)(t)\right|\le L$。所以，$F(\Omega_M)\subseteq\Omega_M$

是拟等度连续的。由 Arzela-Ascoli's 定理，$F(\Omega_M)$ 是列紧的。综上，F 是全连续的。

由定理 2.1 可知，F 在 Ω_M 中有一个不动点，即存在 $(x,y)\in\Omega_M$，使得 $(x,y)=F(x,y)$。由引理 1.1 可知，(1.1)有一个 T-周期解。

定理 2.3 假设(1.2)~(1.4)，(2.3)~(2.5)成立，且存在连续函数 G,W，及正常数 Q_1,Q_2 使得

$$|f(x,y)|\le Q_1W(|y|),\ \frac{W(u)}{u}\le\frac{1-L_1-L_1^*}{N_1Q_1},u>0$$

$$|g(x,y)|\le Q_2G(|x|),\ \frac{G(u)}{u}\le\frac{1-L_2-L_2^*}{N_2Q_2},u>0$$

那么(1.1)至少有一个 T-周期解。

证明：令

$$M=\max\left\{\frac{W(M)N_1Q_1}{1-L_1-L_1^*},\frac{G(M)N_2Q_2}{1-L_2-L_2^*}\right\}$$

对 $(x,y)\in\Omega_M,t\in[0,T]$ 有

$$\begin{aligned}|F_1(x,y)(t)|&\le\int_0^T|G_1(t,s)h_2(s)||y(s)|\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<T}|G_1(t,t_k)||I_k(x(t_k))|\\&\quad+\int_0^T|G_1(t,s)|\int_{-\infty}^s|a(s,u)||f(x(u),y(u))|\mathrm{d}u\mathrm{d}s\\&\le\int_0^T|G_1(t,s)h_2(s)||y(s)|\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<T}|G_1(t,t_k)||I_k(x(t_k))|\\&\quad+Q_1\int_0^T|G_1(t,s)|\int_{-\infty}^s|a(s,u)|W(|y(u)|)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\\&\le ML_1+ML_1^*+\frac{1-L_1-L_1^*}{N_1Q_1}N_1Q_1|y(u)|\\&\le ML_1+ML_1^*+(1-L_1-L_1^*)M=M\end{aligned}$$

类似地，

$$\begin{aligned}|F_2(x,y)(t)|&\le\int_0^T|G_2(t,s)p_2(s)||x(s)|\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<T}|G_2(t,t_k)||J_k(y(t_k))|\\&\quad+\int_0^T|G_2(t,s)|\int_{-\infty}^s|b(s,u)||g(x(u),y(u))|\mathrm{d}u\mathrm{d}s\\&\le\int_0^T|G_2(t,s)p_2(s)||x(s)|\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<T}|G_2(t,t_k)||J_k(y(t_k))|\\&\quad+Q_2\int_0^T|G_2(t,s)|\int_{-\infty}^s|b(s,u)|G(|x(u)|)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\\&\le ML_2+ML_2^*+\frac{1-L_2-L_2^*}{N_2Q_2}N_2Q_2|x(u)|\\&\le ML_2+ML_2^*+(1-L_2-L_2^*)M=M\end{aligned}$$

其余的证明类似定理 2.2 的证明。

3. 渐近周期解

定义 3.1 一个函数 $x(t)$ 称为渐近 T-周期的，如果存在两个函数 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，使得 $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$，其中 $x_1(t)$ 是 T-周期的，$\lim\limits_{t\to\infty} x_2(t)=0$。

假设 $h_1(t), p_1(t)$ 是 T-周期的，且

$$\int_0^T h_1(s)\mathrm{d}s=0,\ \int_0^T p_1(s)\mathrm{d}s=0 \tag{3.1}$$

从而存在常数 $m_k, M_k, k=1,2$，使得

$$m_1\le \mathrm{e}^{\int_0^t h_1(s)\mathrm{d}s}\le M_1^*,\ m_2\le \mathrm{e}^{\int_0^t p_1(s)\mathrm{d}s}\le M_2^* \tag{3.2}$$

假设存在正数 A，B 使得

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^s |a(s,u)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s\le A,\ \int_0^\infty\int_{-\infty}^s |b(s,u)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s\le B \tag{3.3}$$

另外，假设

$$\int_t^\infty |h_2(s)|\mathrm{d}s\le M_3^*,\ \int_t^\infty |p_2(s)|\mathrm{d}s\le M_4^* \tag{3.4}$$

$$b_k\ge 0,\ c_k\ge 0,\ \sum_{k=1}^\infty b_k<\infty,\ \sum_{k=1}^\infty c_k<\infty \tag{3.5}$$

定理 3.1 假设(2.4)，(3.1)~(3.5)成立，存在正常数 $\bar{Q}_1,\bar{Q}_2$，使得

$$|f(x,y)|\le \bar{Q}_1|y|,\ |g(x,y)|\le \bar{Q}_2|x|$$

且

$$1-M_3^*M_1^*m_1^{-1}-M_1^*m_1^{-1}A\bar{Q}_1-M_1^*M_5^*>0,$$
$$1-M_4^*M_2^*m_2^{-1}-M_2^*m_2^{-1}B\bar{Q}_2-M_2^*M_6^*>0$$

则系统(1.1)有渐近 T-周期解 (x,y)，满足

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t),\ y(t)=y_1(t)+y_2(t)$$

其中，

$$x_1(t)=c_1\mathrm{e}^{\int_0^t h_1(s)\mathrm{d}s},\ y_1(t)=c_2\mathrm{e}^{\int_0^t p_1(s)\mathrm{d}s},t\in R$$

c_1,c_2 为固定的非零常数，

$$\lim_{t\to\infty} x_2(t)=\lim_{t\to\infty} y_2(t)=0.$$

证明： 定义 $H_T=\left\{(\varphi,\psi):\varphi=\varphi_1+\varphi_2,\psi=\psi_1+\psi_2,(\varphi_1,\psi_1)(t+T)=(\varphi_1,\psi_1)(t),\ (\varphi_2,\psi_2)(t)\to(0,0),t\to\infty\right\}$。定义范数

$$\|(x,y)\|=\max\left\{\max_{t\in[0,T]}|x(t)|,\max_{t\in[0,T]}|y(t)|\right\}$$

则 H_T 是一个 Banach 空间。记 $\Omega_{M^*}=\left\{(x,y):(x,y)\in H_T,\|(x,y)\|\le M^*\right\}$，则 Ω_{M^*} 是 H_T 中的有界闭凸

子集。

对 $(x,y)\in\Omega_{M^*}$，定义算子 $E:\Omega_{M^*}\to H_T$

$$E(x,y)(t)=\left(E_1(y)(t),E_2(x)(t)\right)$$

其中

$$\begin{aligned}&E_1(y)(t)\\&=c_1\mathrm{e}^{\int_0^t h_1(s)\mathrm{d}s}-\int_t^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\int_0^t h_1(l)\mathrm{d}l}}{\mathrm{e}^{\int_0^s h_1(l)\mathrm{d}l}}h_2(s)y(s)\mathrm{d}s-\int_t^{\infty}\int_{-\infty}^{s}\frac{\mathrm{e}^{\int_0^t h_1(l)\mathrm{d}l}}{\mathrm{e}^{\int_0^s h_1(l)\mathrm{d}l}}a(s,u)f\left(x(u),y(u)\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\\&\quad-\sum_{t<t_k<\infty}\mathrm{e}^{\int_{t_k}^{t}h_1(s)\mathrm{d}s}I_k\left(x(t_k)\right)\\&E_2(x)(t)\\&=c_2\mathrm{e}^{\int_0^t p_1(s)\mathrm{d}s}-\int_t^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\int_0^t p_1(l)\mathrm{d}l}}{\mathrm{e}^{\int_0^s p_1(l)\mathrm{d}l}}p_2(s)x(s)\mathrm{d}s-\int_t^{\infty}\int_{-\infty}^{s}\frac{\mathrm{e}^{\int_0^t p_1(l)\mathrm{d}l}}{\mathrm{e}^{\int_0^s p_1(l)\mathrm{d}l}}b(s,u)g\left(x(u),y(u)\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\\&\quad-\sum_{t<t_k<\infty}\mathrm{e}^{\int_{t_k}^{t}p_1(s)\mathrm{d}s}J_k\left(y(t_k)\right)\end{aligned}$$

下证映射 E 在 Ω_{M^*} 中有一个不动点。由(3.5)可知，存在正常数 M_5^*,M_6^* 使得

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}b_k\right|\le M_5^*,\ \left|\sum_{k=1}^{\infty}c_k\right|\le M_6^*$$

设

$$M^*=\left\{\frac{c_1M_1^*}{1-M_3^*M_1^*m_1^{-1}-M_1^*m_1^{-1}A\bar{Q}_1-M_1^*M_5^*},\frac{c_2M_2^*}{1-M_4^*M_2^*m_2^{-1}-M_2^*m_2^{-1}B\bar{Q}_2-M_2^*M_6^*}\right\}$$

$$\begin{aligned}&\left|E_1(y)(t)-c_1\mathrm{e}^{\int_0^t h_1(s)ds}\right|\\&\le M^*M_3^*M_1^*m_1^{-1}+M_1^*m_1^{-1}\bar{Q}_1\int_t^{\infty}\int_{-\infty}^{s}|a(s,u)||x|\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\sum_{t<t_k<\infty}\mathrm{e}^{\int_{t_k}^{t}h_1(s)\mathrm{d}s}\left|I_k\left(x(t_k)\right)\right|\\&\le M^*M_3^*M_1^*m_1^{-1}+M_1^*m_1^{-1}\bar{Q}_1\|x\|\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{s}|a(s,u)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\left|\sum_{t<t_k<\infty}b_k\right|M_1^*M^*\\&\le M^*M_3^*M_1^*m_1^{-1}+M_1^*m_1^{-1}A\bar{Q}_1M^*+M_1^*M^*M_5^*\end{aligned}$$

同理，

$$\left|E_2(x)(t)-c_2\mathrm{e}^{\int_0^t p_1(s)\mathrm{d}s}\right|\le M^*M_4^*M_2^*m_2^{-1}+M_2^*m_2^{-1}B\bar{Q}_2M^*+M_2^*M^*M_6^*$$

因此，

$$\left|E_1\left(y\right)\left(t\right)\right| \le M^* M_3^* M_1^* m_1^{-1} + M_1^* m_1^{-1} A \bar{Q}_1 M^* + M_1^* M^* M_5^* + c_1 M_1^* \le M^*$$

$$\left|E_2\left(x\right)\left(t\right)\right| \le M^* M_4^* M_2^* m_2^{-1} + M_2^* m_2^{-1} B \bar{Q}_2 M^* + M_2^* M^* M_6^* + c_2 M_2^* \le M^*$$

设

$$x_1\left(t\right) = c_1 \mathrm{e}^{\int_0^t h_1(s)\mathrm{d}s}, \quad y_1\left(t\right) = c_2 \mathrm{e}^{\int_0^t p_1(s)\mathrm{d}s}, t \in R$$

$$x_2\left(t\right) = -\int_t^\infty \frac{\mathrm{e}^{\int_0^t h_1(l)\mathrm{d}l}}{\mathrm{e}^{\int_0^s h_1(l)\mathrm{d}l}} h_2\left(s\right) y\left(s\right) \mathrm{d}s - \int_t^\infty \int_{-\infty}^s \frac{\mathrm{e}^{\int_0^t h_1(l)\mathrm{d}l}}{\mathrm{e}^{\int_0^s h_1(l)\mathrm{d}l}} a\left(s,u\right) f\left(x\left(u\right), y\left(u\right)\right) \mathrm{d}u\mathrm{d}s$$
$$- \sum_{t<t_k<\infty} \mathrm{e}^{\int_{t_k}^t h_1(s)\mathrm{d}s} I_k\left(x\left(t_k\right)\right)$$

$$y_2\left(t\right) = -\int_t^\infty \frac{\mathrm{e}^{\int_0^t p_1(l)\mathrm{d}l}}{\mathrm{e}^{\int_0^s p_1(l)\mathrm{d}l}} p_2\left(s\right) x\left(s\right) \mathrm{d}s - \int_t^\infty \int_{-\infty}^s \frac{\mathrm{e}^{\int_0^t p_1(l)\mathrm{d}l}}{\mathrm{e}^{\int_0^s p_1(l)\mathrm{d}l}} b\left(s,u\right) g\left(x\left(u\right), y\left(u\right)\right) \mathrm{d}u\mathrm{d}s$$
$$- \sum_{t<t_k<\infty} \mathrm{e}^{\int_{t_k}^t p_1(s)\mathrm{d}s} J_k\left(y\left(t_k\right)\right)$$

计算可知，

$$x_1\left(t+T\right) = c_1 \mathrm{e}^{\int_0^{t+T} h_1(s)\mathrm{d}s} = c_1 \mathrm{e}^{\int_0^t h_1(s)\mathrm{d}s} \mathrm{e}^{\int_t^{t+T} h_1(s)\mathrm{d}s} = c_1 \mathrm{e}^{\int_0^t h_1(s)\mathrm{d}s}$$

$$y_1\left(t+T\right) = c_2 \mathrm{e}^{\int_0^{t+T} p_1(s)\mathrm{d}s} = c_2 \mathrm{e}^{\int_0^t p_1(s)\mathrm{d}s} \mathrm{e}^{\int_t^{t+T} p_1(s)\mathrm{d}s} = c_2 \mathrm{e}^{\int_0^t p_1(s)\mathrm{d}s}$$

由(3.4)~(3.5)可知，

$$\lim_{t\to\infty}\left|x_2\left(t\right)\right| \le M^* M_1^* m_1^{-1} \lim_{t\to\infty} \int_t^\infty \left|h_2\left(s\right)\right| \mathrm{d}s + M_1^* m_1^{-1} \bar{Q}_1 M^* \lim_{t\to\infty} \int_t^\infty \int_{-\infty}^s \left|a\left(s,u\right)\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}s$$
$$+ M^* M_1^* \lim_{t\to\infty} \left|\sum_{t<t_k<\infty} b_k\right| = 0$$

$$\lim_{t\to\infty}\left|y_2\left(t\right)\right| \le M^* M_2^* m_2^{-1} \lim_{t\to\infty} \int_t^\infty \left|p_2\left(s\right)\right| \mathrm{d}s + M_2^* m_2^{-1} \bar{Q}_2 M^* \lim_{t\to\infty} \int_t^\infty \int_{-\infty}^s \left|b\left(s,u\right)\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}s$$
$$+ M^* M_2^* \lim_{t\to\infty} \left|\sum_{t<t_k<\infty} c_k\right| = 0$$

因此，$\lim\limits_{t\to\infty} x_2\left(t\right) = 0, \lim\limits_{t\to\infty} y_2\left(t\right) = 0$。故 $E\left(\Omega_{M^*}\right) \subseteq \Omega_{M^*}$。

类似定理 2.2 可证 E 是全连续的。因此，由 Schauder 不动点定理，存在一个不动点 $\left(x,y\right) \in \Omega_{M^*}$，使得

$$E\left(x,y\right)\left(t\right) = \left(E_1\left(y\right)\left(t\right), E_2\left(x\right)\left(t\right)\right) = \left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right)$$

易知该不动点是(1.1)的解。所以 $\left(x,y\right)$ 是(1.1)的解，定理 3.2 得证。

例 3.1 考虑下面的系统

$$\begin{cases} x'(t)=\cos(t)x(t)+\dfrac{2t}{(t^2+10)^2}y(t)+\displaystyle\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-6t+4s}\sin\big(x(t)+y(t)\big)\mathrm{d}s, \ t\neq t_k \\ y'(t)=\cos(t)y(t)+\dfrac{2t}{(t^2+10)^2}x(t)+\displaystyle\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-6t+4s}\cos\big(x(t)+y(t)\big)\mathrm{d}s, \ t\neq t_k \\ x(t_k^+)=x(t_k)+\left(\dfrac{1}{12}\right)^k\big(x(t_k)\big), \ t=t_k \\ y(t_k^+)=y(t_k)+\left(\dfrac{1}{13}\right)^k\big(y(t_k)\big), \ t=t_k \end{cases}$$

经过简单的计算知，定理 3.1 中的条件均满足，因此，该系统有一个渐近 2π-周期解。

基金项目

国家自然科学基金(No. 11571088, No. 11471109)；
浙江省自然科学项目(No. LY14A010024)；
湖南省教育厅项目(No. 14A098)。

参考文献

[1] Li, J., Nieto, J.J. and Shen, J. (2007) Impulsive Periodic Boundary Value Problems of First-Order Differential Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **325**, 226-236. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.04.005

[2] Gao, S., Chen, L., Nieto, J.J. and Terres, A. (2006) Analysis of a Delayed Epidemic Model with Pulse Vaccination and Staturation Incidence. *Vaccine*, 24, 6037-6045. https://doi.org/10.1016/j.vaccine.2006.05.018

[3] Dai, B. and Su, H. (2009) Periodic Solution of a Delayed Ratio-Dependent Predator-Prey Model with Monotonic Functional Response and Impulse. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **70**, 126-134. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.11.036

[4] Georescu, P. and Morosanu, G. (2007) Pest Regulation by Means of Impulsive Controls. *Applied Mathematics and Computation*, **190**, 790-803. https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.01.079

[5] Lenci, S. and Rega, G. (2000) Periodic Solutions and Bifurcations in an Impact Inverted Pendulum under Impulsive Excitation. *Chaos Solutions Fractals*, **11**, 2453-2472. https://doi.org/10.1016/S0960-0779(00)00030-8

[6] Diblik, J., Schmeidel, E. and Ruzickova, M. (2010) Asymptotically Periodic Solutions of Volterra System of Difference Equations. *Computers & Mathematics with Applications*, **59**, 2854-2867. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.01.055

[7] Diblik, J., Schmeidel, E. and Ruzickova, M. (2009) Existence of Asymptotically Periodic Solutions of System of Volterra Difference Equations. *Journal of Difference Equations and Applications*, **15**, 1165-1177. https://doi.org/10.1080/10236190802653653

[8] Islam, M.N. and Raffoul, Y.N. (2014) Periodic and Asymptotically Periodic Solutions in Coupled Nonlinear Systems of Volterra Integro-Differential Equations. *Dynamic Systems and Applications*, **23**, 235-244.

[9] Myslo, Y.M. and Tkachenko, V.I. (2017) Asymptotically Almost Periodic Solutions of Equations with Delays and Nonfixed Times of Pulse Action. *Journal of Mathematical Sciences*, **228**, 1-16.

[10] Raffoul, Y. (2018) Analysis of Periodic and Asymptotically Periodic Solutions in Nonlinear Coupled Volterra Integro-Differential Systems. *Turkish Journal of Mathematics*, **42**, 108-120. https://doi.org/10.3906/mat-1611-123

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org