

A Study on the Pricing of ARIMA Family-Linked Triggering Financial Products

Tuan He, Liangqiong Jin, Yunshuo Chen

School of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang Guizhou
Email: 905494301@qq.com, jinliangqiong@163.com, 1101217439@qq.com

Received: Jan. 2nd, 2019; accepted: Jan. 16th, 2019; published: Jan. 23rd, 2019

Abstract

In this paper, triggering financial products are studied based on the data of dollar/yen exchange rate from 20 November to 25 November in 2017. Firstly, statistical analysis was conducted on the exchange rate data which is changed to stationary panel data by logarithmic difference method. Secondly, model MA(1) is chosen as the optimum time series model using AIC criterion and maximum likelihood. Noting the fact that the data of residual do not follow normal distributions, we use inverse transformation to fit the residual data which is used to predict the price of risk assets. Finally, the value of triggering financial products is analyzed by the Monte-Carlo simulation method.

Keywords

MA(1) Model, Inverse Transformation Method, Pricing of Financial Products, Triggering Financial Products

ARIMA族汇率挂钩型触发式理财产品定价研究

何 团, 金良琼, 陈云烁

贵州民族大学, 数据科学与信息工程学院, 贵州 贵阳
Email: 905494301@qq.com, jinliangqiong@163.com, 1101217439@qq.com

收稿日期: 2019年1月2日; 录用日期: 2019年1月16日; 发布日期: 2019年1月23日

摘要

本文以2017年11月20日至11月25日美元/日元汇率值收盘价为样本数据, 研究挂钩于美元兑日元的触发式理财产品的定价问题。首先对汇率数据进行统计分析, 利用对数差分方法对数据进行平稳化处理; 其次根据AIC准则和极大似然值统计量选出对汇率拟合效果最佳的模型为MA(1)模型, 再次考虑到残差不服从正态分布的情况, 利用逆变换的方法进行残差拟合, 并将其用于风险资产价格的预测; 最后通过Monte-Carlo模拟, 对触发式理财产品进行了价值分析。

关键词

MA(1)模型, 逆变换方法, 理财产品定价, 触发式理财产品

Copyright © 2019 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近年来, 投资者对理财方式呈现出多样化的形式, 为了满足市场需求, 很多商业银行推出了多种汇率挂钩型理财产品。目前, 国内市场上汇率挂钩型理财产品层出不穷, 受2008年金融危机的影响, 当时很多挂钩型理财的收益并不高, 甚至出现“负收益”的现象, 而渣打银行和汇丰银行中却有几款产品不但没有受到影响, 甚至还获得较高的收益, 这些产品就是本文研究的触发式结构性理财产品中的一类[1]。触发式挂钩型理财产品与固定收益类不同, 其收益为一个“区间”, 最终的到期收益率与挂钩标的的走势密切相关(如表1)。在今天, 如何对其进行定价更是现在金融界的一个很重要的研究点。

Table 1. Hook-type triggered financial products related information

表 1. 挂钩型触发式理财产品相关信息

产品名称	挂钩标的	理财期限	认购额	收益决定条款
中国农业银行“金钥匙·如意” 2017年第289期看涨美元兑日元 汇率人民币理财产品	美元兑日元汇率	62天/90天	50,000元/100,000元	见表3

在本文中, 主要研究“多区间累计”汇率挂钩类结构化产品, 在研究挂钩于汇率波动理财产品的定价问题时, 首先对汇率变化数据做时间序列分析, 看其是否符合特定的时间序列模型。在很多学者的研究中, 都将模型的残差序列默认为正态分布, 经过多年的研究, 发现残差序列在很多情况下并不服从正态分布与其它已知的分布, 当默认残差序列服从正态分布或已知分布来进行研究时得出的结果不一定符合实际情况时, 之后逐渐有很多学者寻找新的方法来拟合模型的残差序列。Engle在1982年时首先引入自回归条件异方差模(ARCH), 利用ARCH模型来描述英国通货膨胀率中存在的条件异方差性, 并由Bollerslev(1986)发展成为广义自回归条件异方差模型(GARCH)[2], Bollerslev等(1978)使用厚尾Student-t分布, Nelson等(1991)使用广义误差分布(Generalized Error Distribution, GED), 卢方元, 李成钰(2007)应用ARCH族模型对1990~2006年的上证综指收益率序列进行分析[3], 但在这些文章中残差分布并不是正

态分布，用来研究理财产品的定价并不符合实际情况。在本文中，所用数据所构成的模型残差并不存在 ARCH 效应。

基于以上分析，考虑到模型中的残差分布问题，本文将用逆变换的方法将模型的残差分布进行拟合，研究表明拟合的残差分布模型更加符合原始数据序列，因此用此模型来研究理财产品的定价更加具有实际意义。

2. 数据收集、整理及金融市场建模

本文选取新浪财经网 2017 年 11 月 20 日至 11 月 25 日美元兑日元的收盘价作为样本区间，每 15 分钟收集一个数据，共 576 个观测值，收益率 r_t 定义为两时间间隔 Δt 的收盘价的差分取对数

$r_t = \log(s_t) - \log(s_{t-1})$ ，最后用 575 个数据构成序列并进行模型检验。

首先对原始数据进行统计描述并做作时序图(见图 1)。由图 1 可以看出，原始序列是非平稳状态，峰度为-1.4877，偏度为 0.25739，由此可以得到美元兑日元的即期汇率不服从正态分布，再对原始数据进行正态性检验，发现其 p 值为 $2.2e-16$ ，其结果证明与之前分析结果一致。

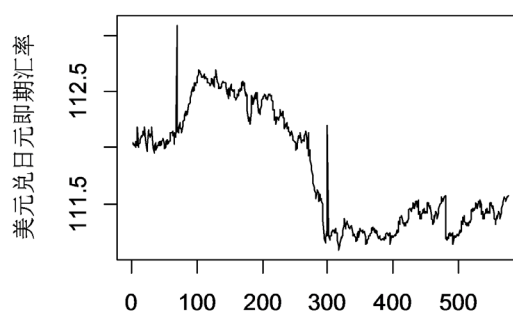


Figure 1. Timing chart of USD/JPY spot exchange rate sequence

图 1. 美元兑日元即期汇率序列时序图

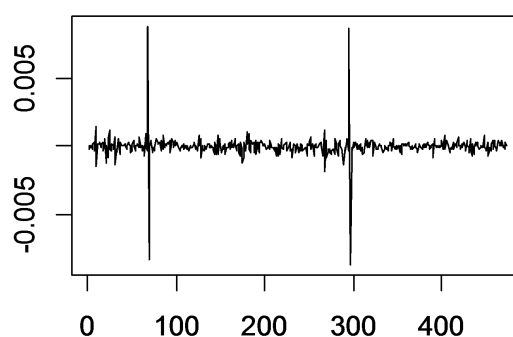


Figure 2. Sequence timing diagram after exchange rate data logarithmic difference

图 2. 汇率数据对数差分之后序列时序图

其次对数据进行平稳化处理。由于原始时间序列数据是非平稳化，此时需要对原始数据进行对数差分处理，进一步对处理后的数据进行 BOX 检验，可以看出结果 p 值接近于 0，这说明序列之间存在相关性。进一步进行单位根检验。可以看出 ADF 检验结果 p 值为 0.01，说明在显著性水平 0.05 的情况下，此时原始序列经处理之后已是平稳序列。将差分之后的数据画出时序图(见图 2)，由图也可以看出序列没有不平稳的迹象。

再次对平稳序列进行模型选取和定阶。将美元兑日元差分之后的数据建立时间序列模型。首先对模型进行定阶，画出自相关图与偏自相关图(如图 3)，由图可知自相关系数截尾，偏自相关系数拖尾，因此可判断是 MA 模型。

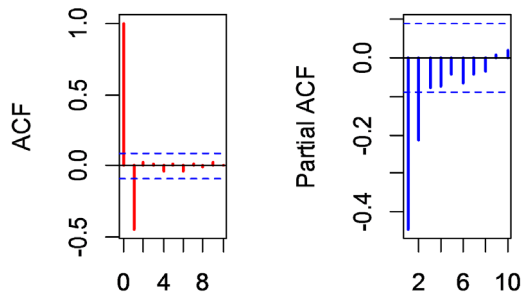


Figure 3. Autocorrelation plot and partial autocorrelation plot

图 3. 自相关图与偏自相关图

进一步使用 EACF 函数进行定阶(如图 4)，可设模型为：

$$X_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \tag{1.1}$$

分别建立 MA(1)模型和 MA(7)模型。

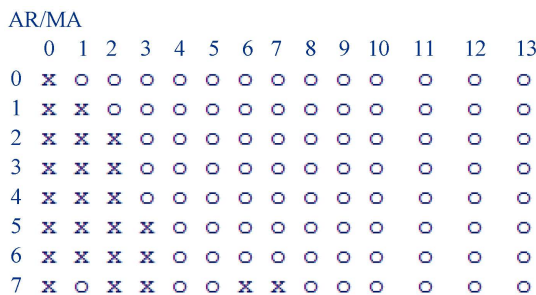


Figure 4. EACF fixed result graph

图 4. EACF 定阶结果图

将用 R 语言代码获取模型的参数与模型指标，不同模型的极大似然函数估计值、AIC 指标如下表 2。

Table 2. MA(1), MA(7) Comparison of model fixed index

表 2. MA(1), MA(7)模型定阶指标比较

模型	模型参数	对数极大似然	AIC 统计量
MA(1)	$\theta_1 = -0.5588$	2731.91	-5461.83
MA(7)	$\theta_1 = -0.5723, \theta_2 = 0.0357,$ $\theta_3 = -0.0025, \theta_4 = -0.0466,$ $\theta_5 = -0.0052, \theta_6 = -0.0311,$ $\theta_7 = -0.0417$	2733	-5452.44

由以上表 2 定阶指数的比较可知差分之后的序列服从 MA(1)模型，其模型为：

$$X_t = \varepsilon_t + 0.5588\varepsilon_{t-1} \tag{1.2}$$

最后对残差序列进行分析。先用 R 语言代码编程获取残差序列，再检验残差序列的相关性，由结果可知残差序列与平方残差序列都是非独立，也进一步的说明残差不存在 ARCH 效应。进一步对残差序列进行正态性检验，其结果 p 值趋于 0，说明残差序列不服从正态分布。

3. 基于拟合残差分布的逆变换方法

由于残差序列分布未知，此时为了对序列进行预测，为了方便论述令残差数据序列表示为：

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

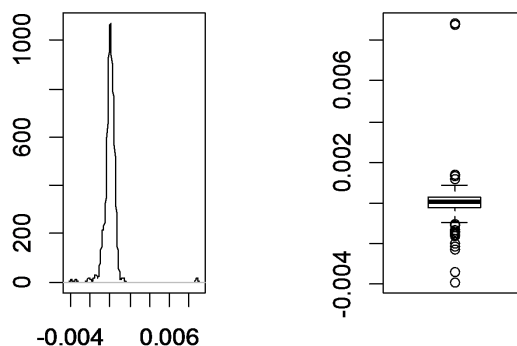


Figure 5. Residual data density fitting and box plot

图 5. 残差数据密度拟合及箱形图

此时画出残差序列的密度函数图(如图 5 左)与箱形图(如图 5 右)，通过图形可以看出此残差序列存在异常值。为了消除异常值的影响，我们将其剔除。剔除异常值后画出密度函数图(如图 6 左)，由图可以看出此时已无异常值存在，说明已达到目的。

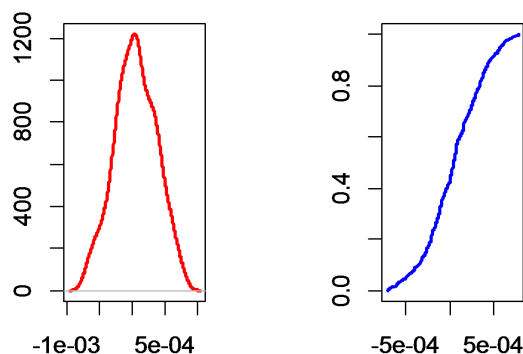


Figure 6. Corrected residual density fitting and empirical distribution function graph

图 6. 修正后的残差密度拟合及经验分布函数图

为了对残差分布进行分析，此时需用经验分布代替分布函数进行编程实现，那么经验分布函数可以定义为：

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ \frac{i}{n}, & x_{(i)} \leq x < x_{(i+1)}, i = 1, 2, 3, \dots, n-1 \\ 1, & x \geq x_{(n)} \end{cases} \quad (2.1)$$

由于经验分布无反函数，此时需在经验分布函数上选取有限点进行插值拟合，采用经验分布函数中的每条直线段的最左端进行插值，得到的经验分布函数为：

$$F_n(x) = \begin{cases} \frac{i}{n}, & x = x_{(i)} \\ \frac{i}{n}(i+1-x) + \frac{i+1}{n}(x-i), & i < x < i+1 \end{cases} \quad (2.2)$$

(2.2)式为插值后的经验分布函数，采用此逼近的反函数，用修正后的经验分布代替分布函数，并用逆变换的方法产生随机数进行拟合(如图 6 右)，进而对相应的理财产品进行分析。

4. 理财产品价格的 Monte-Carlo 模拟

根据表 1 的触发式理财产品相关信息，可设当前时刻为 t 时刻，理财产品在 $(0, T)$ 时间段内的 t 时刻，汇率达到合同规定的触发点就会获得相应的收益[4]，则根据表 3 理财产品收益说明书可得到到期日的理财产品的收益模型为：

$$F_{\text{pay-off}} = (1+r_1T)I_{\left\{\max_{\tau \in [t, T]} S(\tau) > p_1\right\}} + (1+r_2T)I_{\left\{p_2 \leq \max_{\tau \in [t, T]} S(\tau) < p_1\right\}} + (1+r_3T)I_{\left\{\max_{\tau \in [t, T]} S(\tau) < p_2\right\}} \quad (3.1)$$

其中 $p_1 = S_0 + 2.5$ ， $p_2 = S_0 + 0.01$ ， r_1, r_2, r_3 分别为各观察期内的投资收益率，分别为 0.049，0.03，0.029。根据理财产品定价的计算步骤，结合 Monte-Carlo 模拟方法，并按照无风险利率为 r 进行贴现[5]，则到期日该触发式理财产品的总收益为：

$$v = \exp\{-rT\} E[F_{\text{pay-off}}] \quad (3.2)$$

Table 3. Financial products revenue statement

表 3. 理财产品收益说明书

行权价 1: 起息日上午美元兑日元汇率加上约 2.50 (根据实际市场情况调整, 具体行权价以起息日中国农业银行相关通告为准)。
行权价 2: 起息日上午美元兑日元汇率加上约 0.01 (根据实际市场情况调整, 具体行权价以起息日中国农业银行相关通告为准)。
(1) 如在观察期内, 美元/日元汇率曾经触及过行权价 1 和行权价 2, 则到期时投资者收取 4.90%的年化收益。
(2) 如在观察期内, 美元/日元汇率曾经触及过行权价 2, 但未触及过行权价 1, 则到期时投资者收取 3.00%的年化收益。
(3) 如在观察期内, 美元/日元汇率未触及过行权价 1 或行权价 2, 则到期时投资者收取 2.90%的年化收益。

依据风险资产模型(1.2)，并结合逆变换方法和 Monte-Carlo 模拟的基本思想，拟出触发式理财产品的模拟步骤如下：

1) 汇率数据的模拟

美元兑日元的即期历史汇率是已知的，根据时间间隔为 Δt 提取历史数据为 $s(t_0), s(t_1), s(t_2), \dots$ ，根据提取的历史汇率数据用 ARIMA(0,1,1)序列预测未来瞬时汇率值 $s(t_1), s(t_2), s(t_3), \dots$ ，并假设第 j 次预测的汇率为

$$s_j(t_1), s_j(t_2), s_j(t_3), \dots, s_j(t_n)$$

2) 计算路径 $S_j(t_0), S_j(t_1), S_j(t_2), \dots, S_j(t_n)$ 下的理财产品的收益

$$F_{\text{pay-off}} = (1+r_1T)I_{\left\{\max_{\tau \in [t, T]} S(\tau) > p_1\right\}} + (1+r_2T)I_{\left\{p_2 \leq \max_{\tau \in [t, T]} S(\tau) < p_1\right\}} + (1+r_3T)I_{\left\{\max_{\tau \in [t, T]} S(\tau) < p_2\right\}}$$

- 3) 重复以上步骤(1)和步骤(2), 共 N 次(不少于 10,000 次)
 4) 通过以下公司计算理财产品定价的期望收益率

$$E[F_{\text{pay-off}}] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F_{\text{pay-off}}(j) \quad (3.3)$$

- 5) 按照无风险利率 r 进行贴现, 获得理财产品在到期时刻的价格为

$$v = \exp\{-rT\} E[F_{\text{pay-off}}]$$

5. 理财产品价值分析

根据收益率模型(3.1)式及第二节所述的方法步骤计算理财产品的收益, 并通过多次 Monte-Carlo 模拟计算出期望收益 $E[F_{\text{pay-off}}]$, 最后按照无风险利率 r 进行贴现, 获得理财产品在 t 时刻的价格为 $v = \exp\{-rT\} E[F_{\text{pay-off}}]$ 。

考虑模型的残差不是正态分布的情况, 利用逆变换的方法将残差分布进行拟合, 以汇率初始值为 $S_0 = 111.596$, 无风险利率为 $r = 2.75\%$, 并用 Monte-Carlo 模拟的方法计算出该理财产品的价格如下表 4 所示。

Table 4. Price of wealth management products linked to the spot exchange rate value of USD/JPY

表 4. 挂钩于美元兑日元的即期汇率值的理财产品的价格

序号	产品代码	理财期限	起购金额	单位本金	50,000 本金价格	100,000 本金价格
1	ADRY170289A	62	50000	1.003895	50194.75	—
2	ADRY170289A	90	50000	1.004564	50228.2	—
3	ADRY170289A	62	100000	1.003895	—	100389.5
4	ADRY170289A	90	100000	1.004564	—	100456.4

6. 总结

根据美元兑日元的即期汇率数据建模, 考虑模型的残差不是正态分布时的情况, 并用逆变换的方法将残差分布进行拟合, 以此研究挂钩于美元/日元即期汇率值的理财产品价格。由研究结果表明, “金钥匙·如意” 2017 年第 289 期看涨美元兑日元汇率人民币理财产品的收益与理财期限有着密切的关系, 期限越长单位本金越高, 其产生的收益也就越高。通过本文的方法可对各种理财产品的价值进行分析, 其结果对投资者有一定的引导作用。

基金项目

贵州省科学技术基金项目(No.黔科合 J 字[2015]2076), 贵州省教育厅青年科技人才成长项目(No.黔教合 KY 字[2016]168); 贵州民族大学科研基金资助项目。

参考文献

- [1] 王冬爽, 王玉文. 随机利率模型下触发式利率挂钩型理财产品的定价[J]. 数学的实践与认识, 2015, 45(13): 83-89.
- [2] 王黎明, 王连, 杨楠. 应用时间序列分析[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2009.
- [3] 胡炜童, 李振东. 基于不同残差分布假定的 GARCH 类模型预测能力比较[J]. 甘肃科学学报, 2008, 20(1): 36-38.

- [4] 徐承龙, 段为钊, 周羽宇. 一种触发式汇率期权定价的数学模型[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2007, 35(8): 1138-1142.
- [5] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法[M]. 第2版. 北京: 高等教育出版社, 2007.

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2324-7991, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>
期刊邮箱: aam@hanspub.org