Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(2), 219-226
Published Online February 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.82025

Hans汉斯

The Exact Solutions of the Sharma-Tasso-Olver Equation Using exp(-$G(\xi)$) Method and Ansatz Method

Fengyan Zhang[1,2], Dongxue Li[3], Junmei Wang[1]

[1]School of Mathematics and Statistics, Shandong Normal University, Jinan Shandong
[2]School of Mathematics and Statistics, Shandong Linyi University, Linyi Shandong
[3]Dezhou No. 10 Middle School, Dezhou Shandong
Email: 541958096@qq.com, 2697208685@qq.com, wfwjmyx@163.com

Received: Jan. 22nd, 2019; accepted: Feb. 6th, 2019; published: Feb. 13th, 2019

Abstract

Using the traveling wave transformation and homogeneous balance simplified the Sharma-Tasso-Olver equation to obtain the reduced ordinary differential equations, using the $\exp(-G(\xi))$-method to get the trigonometric function solution, hyperbolic function solution and the rational function solution. In addition, an exact soliton solution is provided by using the Ansatz method.

Keywords

Sharma-Tasso-Olver Equation, $\exp(-G(\xi))$-Method, Soliton Solution, Ansatz Method

利用exp(-$G(\xi)$)方法和拟设函数法求Sharma-Tasso-Olver方程精确解

张逢燕[1,2]，李冬雪[3]，王俊梅[1]

[1]山东师范大学，数学与统计学院，山东 济南
[2]临沂大学，数学与统计学院，山东 临沂
[3]德州市第十中学，山东 德州
Email: 541958096@qq.com, 2697208685@qq.com, wfwjmyx@163.com

收稿日期：2019年1月22日；录用日期：2019年2月6日；发布日期：2019年2月13日

文章引用: 张逢燕, 李冬雪, 王俊梅. 利用 exp(-$G(\xi)$)方法和拟设函数法求 Sharma-Tasso-Olver 方程精确解[J]. 应用数学进展, 2019, 8(2): 219-226. DOI: 10.12677/aam.2019.82025

摘 要

本文运用行波变换和齐次平衡原理对Sharma-Tasso-Olver方程进行化简，得到约化的常微分方程。利用$\exp(-G(\xi))$方法和拟设双曲函数法求得方程的三角函数解、双曲函数解、有理函数解和孤子解。

关键词

Sharma-Tasso-Olver方程，$\exp(-G(\xi))$方法，孤子解，拟设双曲函数法

1. 引言

非线性发展方程是国内外研究的热点问题，Sharma-Tasso-Olver (STO)方程在数学和物理领域有着重要的作用，很多专家对其有深入研究。例如，文献[1] [2]运用 Bäcklund 变换求精确解。在[3]中介绍扩展双曲函数方法的 STO 方程的显式行波解。楼森岳等人[4]通过使用标准的截断 Painlevé 分析，Hirota 双线性方法和 Bäcklund 变换方法彻底检查了孤子裂变和聚变。在[5]中，Yan 通过使用两种类型的 Cole-Hopf 变换，研究了两类(2 + 1)维广义 Sharma-Tasso-Olver 积分-微分方程的可积性。他证明了这两个 GSTO 方程都拥有 Painlevé 属性和双哈密顿结构。另外，利用耦合 Riccati 方程方法[6]，修正最简单方程方法[7]，Exp 函数方法[8] [9]和李对称分析求出 STO 方程精确解等[10] [11] [12]。

我们研究以下 STO 方程

$$u_t + 3\varepsilon u^2 u_x + 3\varepsilon u_x^2 + 3\varepsilon u u_{xx} + \varepsilon u_{xxx} = 0 \tag{1}$$

其中$u = u(x,t)$，ε是任意常数。

本文首先对 Sharma-Tasso-Olver 方程进行了综述。第二部分运用行波变换，利用$\exp(-G(\xi))$方法[13] [14] [15]和齐次平衡原理[16] [17]将原方程约化成常微分方程，求出方程的三角函数解，双曲函数解和有理函数解。第三部分利用拟设双曲函数的行波变换得到方程的孤子解[18] [19]。

2. $\exp(-G(\xi))$方法

对于方程(1)，我们进行行波变换：

$$u(x,t) = u(\xi),\ \ \xi = kx - wt,$$

得到约化的常微分方程：

$$-wu' + 3\varepsilon k u^2 u' + 3\varepsilon k^2 (u')^2 + 3\varepsilon k^2 u u'' + \varepsilon k^3 u''' = 0,$$

积分一次为：

$$-wu + \varepsilon k u^3 + 3\varepsilon k^2 u u' + \varepsilon k^3 u'' = 0. \tag{2}$$

我们假设方程(2)有以下形式的精确解[14] [15] [16]：

$$u(\xi)=\sum_{n=0}^{m}a_n\left(\exp\left(-G(\xi)\right)\right)^n, \tag{3}$$

其中 a_n 为任意常数，m 为正整数，$G(\xi)$ 满足以下辅助常微分方程：

$$G'(\xi)=\exp\left(-G(\xi)\right)+\mu\exp\left(G(\xi)\right)+\lambda, \tag{4}$$

从辅助方程(4)中我们可以得到不同的精确解。

把(3)和(4)带入(2)，利用齐次平衡原理可以得到 $m=1$，则方程(1)的解可以表示为：

$$u(\xi)=a_0+a_1\exp\left(-G(\xi)\right). \tag{5}$$

把(4)和(5)带入(2)，收集 $\exp\left(-G(\xi)\right)^n$，$n=0,1,2,3$ 的系数，令其系数方程等于 0，可以得到关于 $a_0,a_1,\mu,\lambda,w,k,\varepsilon$ 的超定方程组：

$$\exp\left(-G(\xi)\right)^3:2k^3\varepsilon a_1-3\varepsilon k^2a_1^2+k\varepsilon a_1^3=0, \tag{6}$$

$$\exp\left(-G(\xi)\right)^2:k^3\varepsilon a_1-k^2\varepsilon\lambda a_1^2+k^2\varepsilon a_1^2a_0=0, \tag{7}$$

$$\exp\left(-G(\xi)\right):k^3\varepsilon\lambda^2a_1+2k^3\varepsilon\mu a_1-3k^2\varepsilon\mu a_1^2-3k^2\varepsilon\lambda a_1a_0+3k\varepsilon a_1a_0^2-wa_1=0, \tag{8}$$

$$\exp\left(-G(\xi)\right)^0:k^3\varepsilon\lambda\mu a_1+3k^2\varepsilon\mu a_0+k\varepsilon a_0^3-wa_0=0. \tag{9}$$

求解(6)~(9)，得到两组解分别为：

情况 1：$k=k,\ w=\dfrac{k^3\varepsilon\lambda^2-4k^3\varepsilon\mu}{4},\ a_0=\dfrac{\lambda k}{2},\ a_1=k$，带入方程(5)，得到五种不同的解为：

① 当 $\lambda^2-4\mu>0$，且 $\mu\neq0$ 时，

$$u_{1.1}=\frac{2k\mu}{-\sqrt{\lambda^2-4\mu}\tanh\left(\sqrt{\lambda^2-4\mu}/2(\xi+C)\right)-\lambda}+\frac{\lambda k}{2}；\text{(如图 1)}$$

② 当 $\lambda^2-4\mu<0$，且 $\mu\neq0$ 时，

$$u_{1.2}=\frac{2k\mu}{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\tan\left(\sqrt{4\mu-\lambda^2}/2(\xi+C)\right)-\lambda}+\frac{\lambda k}{2}；\text{(如图 2)}$$

③ 当 $\lambda^2-4\mu>0$，且 $\mu=0,\lambda\neq0$ 时，

$$u_{1.3}=\frac{\lambda k}{\cosh\left(\lambda(\xi+C)\right)+\sinh\left(\lambda(\xi+C)\right)-1}+\frac{\lambda k}{2}；\text{(如图 3)}$$

④ 当 $\lambda^2-4\mu=0$，且 $\mu\neq0,\lambda\neq0$ 时，

$$u_{1.4}=-\frac{\lambda^2k(\xi+C)}{2\lambda(\xi+C)+4}+\frac{\lambda k}{2}；\text{(如图 4)}$$

⑤ 当 $\lambda^2-4\mu=0$，且 $\mu=0,\lambda=0$ 时，

$$u_{1.5}=\frac{k}{\xi+C}+\frac{\lambda k}{2}，\text{(如图 5)}$$

其中 $\xi=kx\dfrac{k^3\varepsilon\lambda^2-4k^3\varepsilon\mu}{4}t$，$k,C$ 为任意常数。

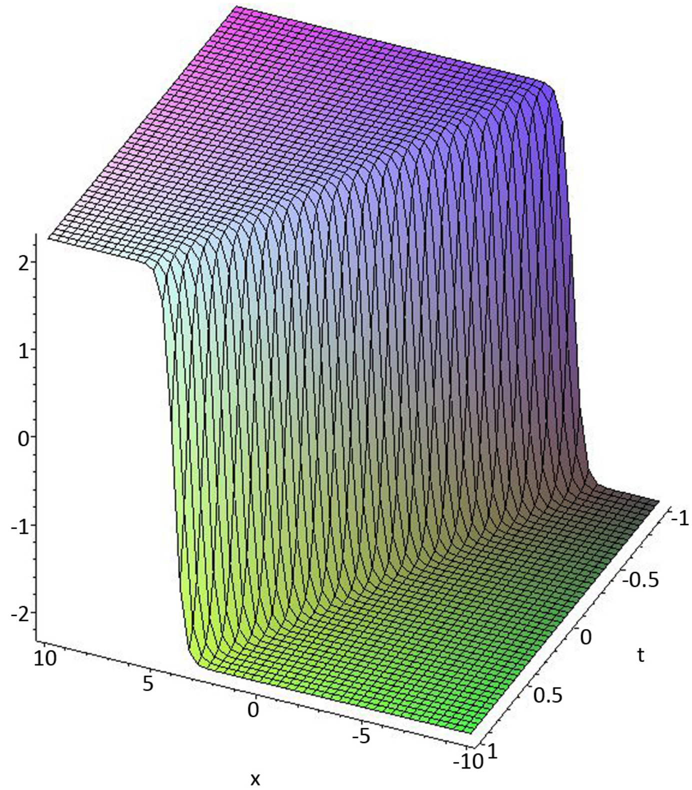

Figure 1. Hyperbolic function solution $u_{1.1}$

图 1. 双曲函数解 $u_{1.1}$

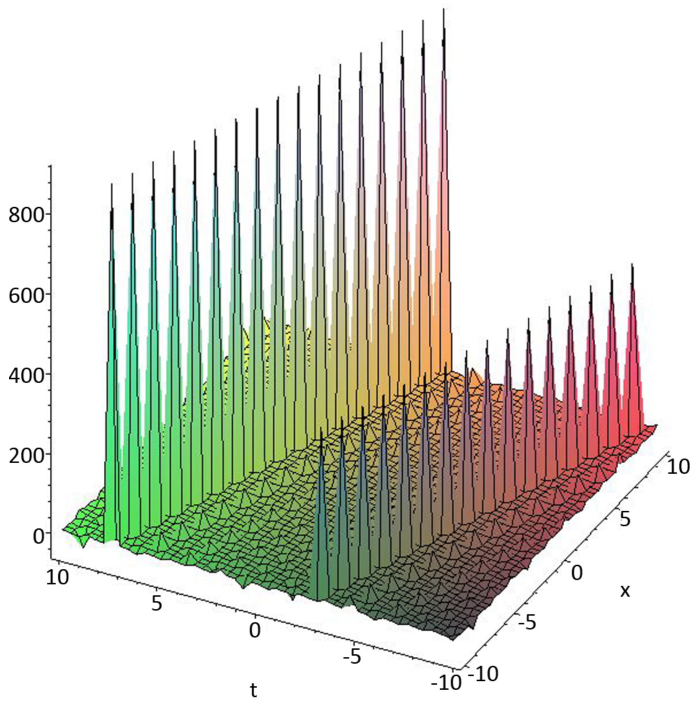

Figure 2. Trigonometric function solution $u_{1.2}$

图 2. 三角函数解 $u_{1.2}$

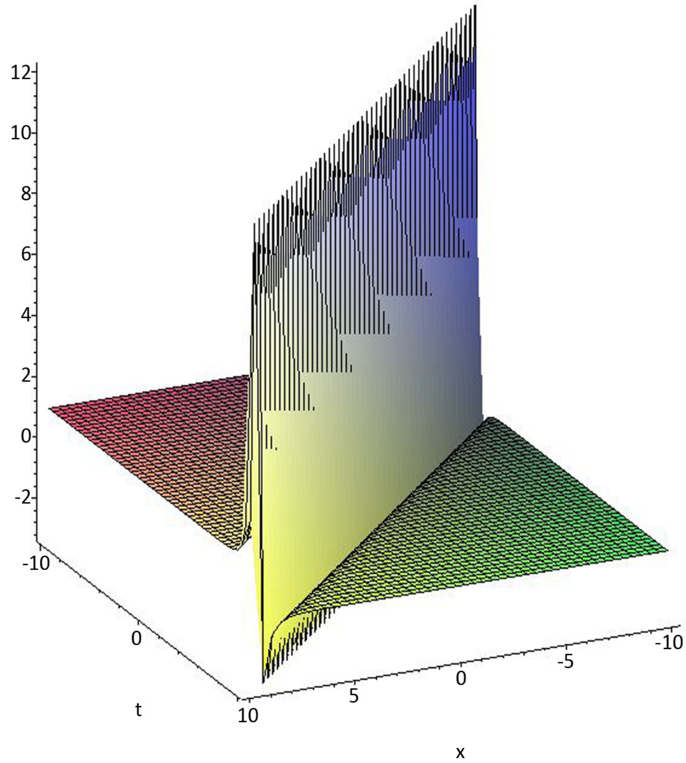

Figure 3. Hyperbolic function solution $u_{1.3}$

图 3. 双曲函数解 $u_{1.3}$

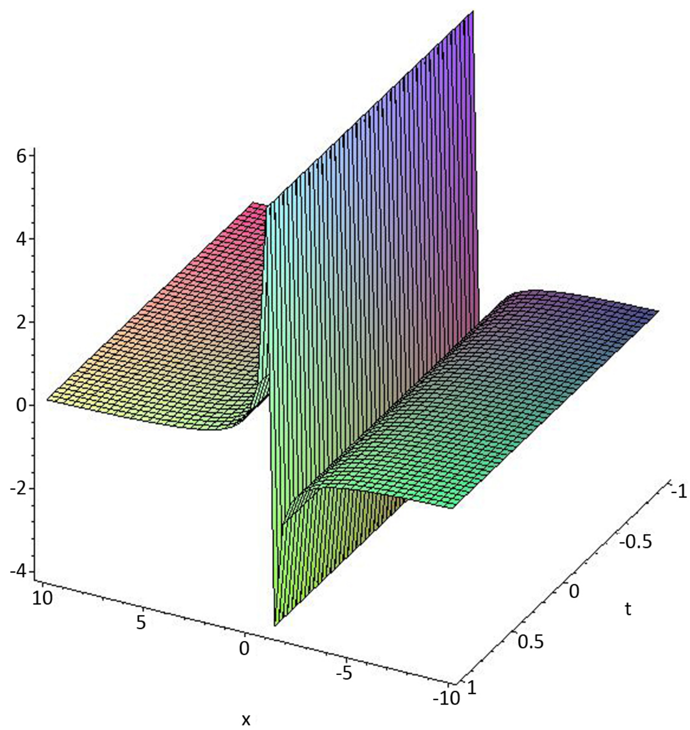

Figure 4. Rational function solution $u_{1.4}$

图 4. 有理函数解 $u_{1.4}$

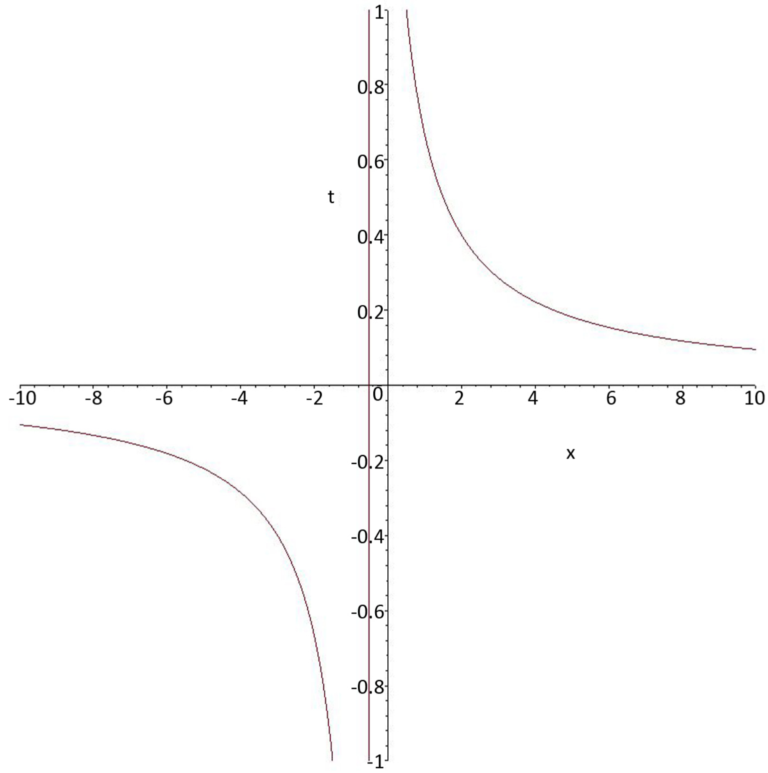

Figure 5. Rational function solution $u_{1.5}$

图 5. 有理函数解 $u_{1.5}$

情况 2：$k=k, w=k^3\varepsilon\lambda^2-4k^3\varepsilon\mu, a_0=\lambda k, a_1=2k$，带入方程(7)，得到五种不同的解为：

① 当 $\lambda^2-4\mu>0$，且 $\mu\neq 0$ 时，

$$u_{2.1}=\frac{4k\mu}{-\sqrt{\lambda^2-4\mu}\tanh\left(\sqrt{\lambda^2-4\mu}/2(\xi+C)\right)-\lambda}+\lambda k\text{；}$$

② 当 $\lambda^2-4\mu<0$，且 $\mu\neq 0$ 时，

$$u_{2.2}=\frac{4k\mu}{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\tan\left(\sqrt{4\mu-\lambda^2}/2(\xi+C)\right)-\lambda}+\lambda k\text{；}$$

③ 当 $\lambda^2-4\mu>0$，且 $\mu=0,\lambda\neq 0$ 时，

$$u_{2.3}=\frac{2\lambda k}{\cosh\left(\lambda(\xi+C)\right)+\sinh\left(\lambda(\xi+C)\right)-1}+\lambda k\text{；}$$

④ 当 $\lambda^2-4\mu=0$，且 $\mu\neq 0,\lambda\neq 0$ 时，

$$u_{2.4}=-\frac{\lambda^2k(\xi+C)}{\lambda(\xi+C)+2}+\lambda k\text{；}$$

⑤ 当 $\lambda^2-4\mu=0$，且 $\mu=0,\lambda=0$ 时，

$$u_{2.5}=\frac{2k}{\xi+C}+\lambda k\text{，}$$

其中 $\xi = kx-\left(k^3\varepsilon\lambda^2-4k^3\varepsilon\mu\right)t$， k,C 为任意常数。

3. 拟设双曲函数法

假设方程有以下形式的解[18] [19]：

$$u(x,t)=A\tanh^n\tau，\quad \tau=B(x-vt)，\tag{10}$$

其中 A 和 B 是自由参数，p 是固定参数，v 是孤子速度。

由(10)可以得到：

$$u_t=-nvAB\left(\tanh^{n-1}\tau-\tanh^{n+1}\tau\right),\tag{11}$$

$$u_x=nvAB\left(\tanh^{n-1}\tau-\tanh^{n+1}\tau\right),,\tag{12}$$

$$u_{xx}=n(n-1)AB^2\tanh^{n-2}\tau-2n^2AB^2\tanh^n\tau+n(n+1)AB^2\tanh^{n+2}\tau,\tag{13}$$

$$\begin{aligned}u_{xxx}&=n(n-1)(n-2)AB^3\tanh^{n-3}\tau-\left[n(n-1)(n-2)+2n^3\right]AB^3\tanh^{n-1}\tau\\&+\left[n(n+1)(n+2)+2n^3\right]AB^3\tanh^{n+1}\tau-n(n+1)(n+2)AB^3\tanh^{n+3}\tau,\end{aligned}\tag{14}$$

把(11)~(14)带入方程(1)，得到：

$$\begin{aligned}&-nvAB\left(\tanh^{n-1}\tau-\tanh^{n+1}\tau\right)+3\varepsilon nvA^2B\left(\tanh^{2n-1}\tau-\tanh^{2n+1}\tau\right)\\&+3\varepsilon\left[nvAB\left(\tanh^{n-1}\tau-\tanh^{n+1}\tau\right)\right]^2+3\varepsilon A^2B^2\left[n(n-1)\tanh^{2n-2}\tau\right.\\&\left.-2n^2\tanh^{2n}\tau n(n+1)\tanh^{2n+2}\tau\right]+\varepsilon\left[n(n-1)(n-2)AB^3\tanh^{n-3}\tau\right.\\&-\left(n(n-1)(n-2)+2n^3\right)AB^3\tanh^{n-1}\tau+\left(n(n+1)(n+2)+2n^3\right)AB^3\tanh^{n+1}\tau\\&-n(n+1)(n+2)AB^3\tanh^{n+3}\tau.\end{aligned}\tag{15}$$

从(15)的指数可以得到 $2n+2$ 和 $n+3$ 相等，得到 $n=1$。代入(29)收集 $\tanh^n\tau$ 的系数，令其系数方程等于 0，可以得到：

$$B=A\text{ 或者 }B=\frac{A}{2}，\quad v=\varepsilon A^2$$

上式给出了自由参数 A 和 B 的关系，扰动孤子的速度 v。我们就得到了方程(1)的 1-孤子解：

$$u(x,t)=A\tanh\left(B(x-vt)\right)。$$

4. 结论

本文运用行波变换、齐次平衡原理，利用 $\exp(-G(\xi))$ 方法求出 Sharma-Tasso-Olver 方程的新显式行波解。这些解包括双曲函数解，三角函数解和有理数解。利用拟设双曲函数得到了方程的 1-孤子解。

参考文献

[1] Shang, Y.D., Huang, Y. and Yuan, W.J. (2011) Bäcklund Transformations and Abundant Exact Explicit Solutions of the Sharma-Tasso-Olver Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 7172-7183. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.01.115

[2] Fan, E.G. and Zhang, H.Q. (1998) A New Approach to Bäcklund Transformations of Nonlinear Evolution Equations. *Applied Mathematics and Mechanics*, **19**, 645-650.

[3] Shang, Y. (2008) The Extended Hyperbolic Functions Method and Exact Solutions to the Long-Short Wave Resonance Equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, **36**, 762-771. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.07.007

[4] Wang, S., Tang, X.Y. and Lou, S.Y. (2004) Soliton Fission and Fusion: Burgers Equation and Sharma-Tasso-Olver Equation. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, **21**, 231-239. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2003.10.014

[5] Yan, Z.Y. (2003) Integrability of Two Types of the (2 + 1)-Dimensional Generalized Sharma-Tasso-Olver Integro-Differential Equations. *Acta Mathematica Scientia*, **22**, 302-324.

[6] Shang, Y.D., Qin, J.H. and Huang, Y. (2008) Abundant Exact and Explicit Solitary Wave and Periodic Wave Solutions to the Sharma-Tasso-Olver Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **202**, 532-538. https://doi.org/10.1016/j.amc.2008.02.034

[7] Kudryashov, N.A. and Loguinova, N.B. (2008) Extended Simplest Equation Method for Nonlinear Differential Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **205**, 396-402.

[8] Bekir, A. and Boz, A. (2008) Exact Solutions for Nonlinear Evolution Equations Using Exp-Function Method. *Physics Letters A*, **372**, 1619-1625. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.10.018

[9] Erbas, B. and Yusufoglu, E. (2009) Exp-Function Method for Constructing Exact Solutions of Sharma-Tasso-Olver Equation. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, **41**, 2326-2330. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2008.09.003

[10] Lian, Z.J. and Lou, S.Y. (2005) Symmetries and Exact Solutions of the Sharma-Tasso-Olver Equation. *Nonlinear Anal*, **63**, e1167-e1177.

[11] Inan, I.E. and Kaya, D. (2007) Exact Solutions of Some Nonlinear Partial Differential Equations. *Physica A*, **381**, 104-115. https://doi.org/10.1016/j.physa.2007.04.011

[12] Wazwaz, A.M. (2007) New Solitons and Kinks Solutions to the Sharma-Tasso-Olver Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **188**, 1205-1213. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.10.075

[13] Akbulut, A., Kaplan, M. and Tascan, F. (2017) The Investigation of Exact Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations by Using $e^{-\phi(x)}$ Method. *Optik*, **132**, 382-387. https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2016.12.050

[14] Roshid, H.O., Alam, M.N. and Akbar, M.A. (2015) Exact Traveling Wave Solutions to the (3+1)-Dimensional mKdV –ZK and the (2+1)-Dimensional Burgers Equations via $e^{-\phi(x)}$ -Expansion Method. *Alexandria Engineering Journal*, **54**, 635-644. https://doi.org/10.1016/j.aej.2015.05.005

[15] Bhrawy, A.H. and Obaid, M. (2012) New Exact Solutions for the Zhiber-Shabat Equation Using the Extended F-Expansion Method. *Life Sciences*, **9**, 1154-1162.

[16] Fan, E.G. (2000) Two New Applications of the Homogeneous Balance Method. *Physics Letters A*, **265**, 353-357. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(00)00010-4

[17] Zhang, H.Q. (2001) Extension and Application of Homogenous Balance Method. *Applied Mathematics and Mechanics*, **21**, 321-325.

[18] Jawad, A.J.M., Petkovic, M.D. and Biswas, A. (2010) Soliton Solutions of Burgers Equations and Perturbed Burgers Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **216**, 3370-3377. https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.04.066

[19] Wang, G.W. and Kara, A.H. (2018) Group Analysis, Fractional Explicit Solutions and Conservation Laws of Time Fractional Generalized Burgers Equation. *Communications in Theoretical Physics*, **69**, 5-8.