Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(3), 424-429
Published Online March 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.83048

Application Examples of Linear Algebra Based on MATLAB

Wei Yang[1], Shuping Gao[2], Bing Han[3], Huaichen Chen[3]

[1]School of Physics and Optoelectronic Engineering, Xidian University, Xi'an Shaanxi
[2]School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an Shaanxi
[3]School of Electornoc Engineering, Xidian University, Xi'an Shaanxi
Email: weiyang@mail.xidian.edu.cn, gaoshp@mail.xidian.edu.cn, bhan@xidian.edu.cn, hchchen1934@163.com

Received: Feb. 14th, 2019; accepted: Feb. 27th, 2019; published: Mar. 6th, 2019

Abstract

This paper gives three examples of the application of linear algebra. It includes rigid body plane motion, information retrieval and bacteria conversion. MATLAB software is used for numerical calculation and drawing.

Keywords

Linear Algebra, Application of Linear Algebra, MATLAB

基于MATLAB的线性代数应用案例

杨　威[1]，高淑萍[2]，韩　冰[3]，陈怀琛[3]

[1]西安电子科技大学物理与光电工程学院，陕西　西安
[2]西安电子科技大学数学与统计学院，陕西　西安
[3]西安电子科技大学电子工程学院，陕西　西安
Email: weiyang@mail.xidian.edu.cn, gaoshp@mail.xidian.edu.cn, bhan@xidian.edu.cn, hchchen1934@163.com

收稿日期：2019年2月14日；录用日期：2019年2月27日；发布日期：2019年3月6日

摘　要

本文给出了线性代数三个精彩应用案例，包括刚体平面运动、情报检索及细菌转换，并利用MATLAB软件进行数值计算和绘图分析。

文章引用：杨威，高淑萍，韩冰，陈怀琛．基于 MATLAB 的线性代数应用案例[J]．应用数学进展, 2019, 8(3): 424-429.
DOI: 10.12677/aam.2019.83048

关键词

线性代数，线性代数应用，MATLAB

1. 引言

线性代数是一门实用性很强的基础课程，航空、建筑、计算机、经济、金融等等相关学科都需要大量的线性代数知识。但是，在目前国内教材里，关于线性代数的应用内容涉及很少，甚至没有涉及。

随着矩阵阶数的增加，线性代数中各种运算的运算量将会剧增，所以利用计算机软件实现线性代数运算是当今线性代数教学改革的必要内容。国内大多教材缺少了这方面内容，虽然个别新教材加入了 MATLAB 软件内容，但其与线性代数知识分离，并没有很好地把线性代数理论与 MATLAB 软件深度融合。

本文分别介绍了三个精彩的线性代数应用案例，并用 MATLAB 软件进行计算和绘图，并对结果进行了分析讨论。

2. 刚体的平面运动

用矩阵 X 来描述平面坐标系中的一个闭合图形(即“刚体”)，X 的列向量表示图形 n 个顶点的坐标。为了实现刚体的平移及旋转运算，给矩阵 X 添加元素值都为 1 的一行，使矩阵 X 的形状为 $3\times n$。

若有矩阵：$M=\begin{bmatrix}1&0&c_1\\0&1&c_2\\0&0&1\end{bmatrix}$，$R=\begin{bmatrix}\cos t&-\sin t&0\\\sin t&\cos t&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，且：$Y_1=MX$，$Y_2=RX$

可以证明，矩阵 Y_1 是刚体 X 沿 x 轴正方向平移 c_1，沿 y 轴正方向平移 c_2 后的结果；矩阵 Y_2 是刚体 X 以坐标原点为中心逆时针旋转 t 弧度的结果[1]。

例 1. 表 1 给出大写字母 A 的 11 个顶点坐标值，其中最后一列与第一列相同，表示一个完整的闭合图形。对图形 A 先逆时针旋转 $\frac{3}{4}\pi$，然后向上移动 30，再向右移动 20，并绘制移动前后的图形。

Table 1. Vertex coordinates of letter A
表 1. 字母 A 的顶点坐标

x	0	4	6	10	8	5	3.5	6.1	6.5	3.2	2	0
y	0	14	14	0	0	11	6	6	4.5	4.5	0	0

解：构造刚体矩阵 $X=\begin{bmatrix}0&4&6&10&8&5&3.5&6.1&6.5&3.2&2&0\\0&14&14&0&0&11&6&6&4.5&4.5&0&0\\1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\end{bmatrix}$，

旋转矩阵 $R=\begin{bmatrix}\cos\frac{3\pi}{4}&-\sin\frac{3\pi}{4}&0\\\sin\frac{3\pi}{4}&\cos\frac{3\pi}{4}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 及平移矩阵 $M=\begin{bmatrix}1&0&20\\0&1&30\\0&0&1\end{bmatrix}$。

在 MATLAB 的 M 文件编辑器中编写程序 l1.m

```
% 刚体的平面运动
close all
X=[0,4,6,10,8,5,3.5,6.1,6.5,3.2,2,0;0,14,14,0,0,11,6,6,4.5,4.5,0,0;ones(1,12)];
                                                        % 构造原刚体矩阵
M=[1,0,20;0,1,30;0,0,1];                                %构造平移转矩阵
R=[cos(3*pi/4),-sin(3*pi/4),0;sin(3*pi/4),cos(3*pi/4),0;0,0,1];
                                                        %构造旋转矩阵
Y3=M*R*X;                                               %通过线性变换计算移动后的刚体矩阵
plot(X(1,:),X(2,:));                                    % 绘制原来刚体
hold on
axis equal
fill(Y3(1,:),Y3(2,:),'black');                          % 绘制旋转及平移后刚体
grid on
hold off
```

在 MATLAB 命令窗口中输入：l1

绘制图形如图 1 所示。

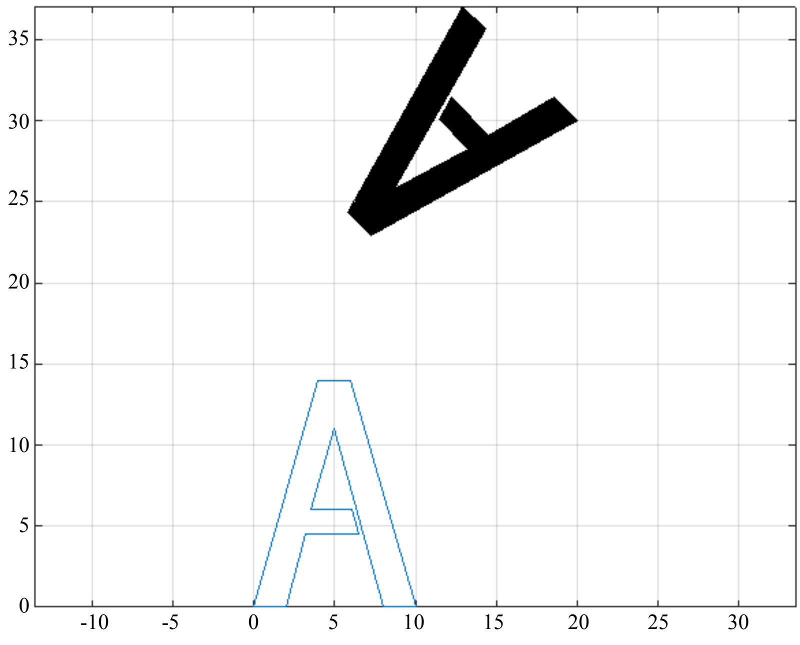

Figure 1. Letter A before and after moving

图 1. 字母 A 移动前后图形

3. 情报检索

现代情报检索技术是在矩阵理论的基础上发展起来的。情报中心的数据库中存放着大量文件，我们希望从中搜索到与自己特定关键词相匹配的文件。假设数据库中包含了 n 个文件，而搜索所用的关键词有 m 个，把关键词排序，我们就可以把数据库表示为 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为搜索矩阵。若第 i 个关

键词出现在第 j 个文件中，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素为 1，否则为 0。用于搜索的关键词清单可用 m 维列向量 $\boldsymbol{x}$ 表示，称为关键词搜索向量。如果关键词清单中第 i 个关键词在搜索列中出现，则 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个元素就为 1，否则就为 0。当确定了搜索矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和搜索向量 $\boldsymbol{x}$ 后，进行线性变换运算：$y = A^{\mathrm{T}}x$，其中向量 y 即为检索结果[1]。

例 2. 若数据库包含以下四个书名：线性代数，线性代数及其应用，线性代数与解析几何，矩阵代数及其应用。而有五个搜索关键词：几何，代数，线性，矩阵，应用。请写出搜索矩阵 $\boldsymbol{A}$。如果某读者输入的关键词为“代数，矩阵”，请写出关键词搜索向量 $\boldsymbol{x}$，并计算搜索结果向量 $\boldsymbol{y}$，最后说明搜索结果向量的含义。

解：当第 i 个关键词出现在第 j 本书名上时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 就等于 1，否则就等于 0。表 2 给出了搜索矩阵构造表。

Table 2. Search matrix table of Information retrieval
表 2. 情报检索搜索矩阵表

关键词	书			
	线性代数	线性代数及其应用	线性代数与解析几何	矩阵代数及其应用
几何	0	0	1	0
代数	1	1	1	1
线性	1	1	1	0
矩阵	0	0	0	1
应用	0	1	0	1

根据表 2 得搜索矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，关键词搜索向量为 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，用 MATLAB 计算搜索结果向量 $y = A^{\mathrm{T}}x$。在 MATLAB 命令窗口输入：

```
A=[0,0,1,0;1,1,1,1;1,1,1,0;0,0,0,1;0,1,0,1]
x=[0;1;0;1;0]
y=A'*x
```

计算结果为：

```
y =
      1
      1
      1
      2
```

$\boldsymbol{y}$ 的各个分量表示各书与关键词搜索向量 $\boldsymbol{x}$ 的匹配程度，即 $\boldsymbol{y}$ 的第 k 个分量表示第 k 本书所含关键词的个数，$\boldsymbol{y}$ 的第四个分量是 2，说明第四本书包含了两个关键词，故第四本数匹配程度最高。

4. 细菌转换

人口迁移问题、基因突变问题、细菌转换问题等都属于线性代数的同一类应用实例，此类问题的解

决方法是先构造转换矩阵，然后根据相似对角化来求矩阵的高次幂，最后利用 MATLAB 软件计算和分析结果[1]。

例 3. 李博士培养了一罐细菌，在这个罐子里存放着 A、B、C 三类不同种类的细菌，最开始 A、B、C 三种细菌分别有 10^8、2×10^8、3×10^8 个。它们每天都要发生类型转化，转化情况如下：A 类细菌一天后有 5%的变为 B 类细菌、15%的变为 C 细菌；B 类细菌一天后有 30%的变为 A 类细菌、10%的变为 C 类细菌；C 类细菌一天后有 30%的变为 A 类细菌、20%的变为 B 类细菌。请问一周后李博士的 A、B、C 类细菌各有多少个？随着时间的增加，细菌数量会不会保持一个稳定状态？

解：表 3 给出了第 n 天与第 $n+1$ 天三种细菌相互变换情况。

Table 3. Table of conversion of three bacteria
表 3. 三种细菌相互变换情况表

	A_n	B_n	C_n
A_{n+1}	$0.8A_n$	$0.3B_n$	$0.3C_n$
B_{n+1}	$0.05A_n$	$0.6B_n$	$0.2C_n$
C_{n+1}	$0.15A_n$	$0.1B_n$	$0.5C_n$

用向量 x_n 来表示第 n 天三种细菌的个数，即 $x_n=\begin{bmatrix}A_n\\B_n\\C_n\end{bmatrix}$；用向量 x_{n+1} 来表示第 n+1 天三种细菌的个数，即 $x_{n+1}=\begin{bmatrix}A_{n+1}\\B_{n+1}\\C_{n+1}\end{bmatrix}$，那么根据表 3 有矩阵关系：$\begin{bmatrix}A_{n+1}\\B_{n+1}\\C_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8&0.3&0.3\\0.05&0.6&0.2\\0.15&0.1&0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_n\\B_n\\C_n\end{bmatrix}$，设 $P=\begin{bmatrix}0.8&0.3&0.3\\0.05&0.6&0.2\\0.15&0.1&0.5\end{bmatrix}$，则有：$x_7=Px_6=P^2x_5=\cdots=P^7x_0$，其中 $x_0=10^8\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$。在 MATLAB 命令窗口输入：

```
p=[0.8,0.3,0.3;0.05,0.6,0.2;0.15,0.1,0.5]
x0=10^8*[1;2;3]
x7=p^7*x0
```

计算结果为

```
x7 =

357968750
112555355
129475895
```

x_7 的三个元素分别为一周后李博士 A、B、C 三种细菌数量。

为了进一步分析细菌数量与天数 n 的函数关系，可以利用矩阵相似对角化理论来计算 P^n。因为矩阵 P 有互不相同的三个特征值：1，0.5 和 0.4，则一定存在可逆矩阵 Q，使得：$P=Q\Lambda Q^{-1}$，其中 Λ 为对角阵，对角线元素即为 1，0.5，0.4。则有 $P^n=Q\Lambda^nQ^{-1}$，其中 Q 为 P 的线性无关特征列向量所构成的矩阵。于是有：$x_n=P^nx_0=Q\Lambda^nQ^{-1}x_0$。在 MATLAB 的 M 文件编辑器中编写程序 l2.m：

% 分析 n 天后三种细菌数量

```
P=[0.8,0.3,0.3;0.05,0.6,0.2;0.15,0.1,0.5];% 构造细菌转换矩阵
x0=10^8*[1;2;3];                         % 构造细菌初始值向量
[Q,lamda]=eig(P);                      % 计算 P 的特征值和特征向量
syms n                               % 定义符号变量 n
xn=Q*lamda^n*inv(Q)*x0      % 计算 n 天后细菌值向量
```

在 MATLAB 命令窗口输入：l2

计算结果为：

```
xn =

360000000 − 260000000*(1/2)^n
390000000*(1/2)^n − 300000000*(2/5)^n + 110000000
300000000*(2/5)^n − 130000000*(1/2)^n + 130000000
```

从计算结果可以看出：当 n 越大，$(1/2)^n$ 和 $(2/5)^n$ 就越趋近于零，通过试算得，当 $n \geq 30$ 时，李博士的细菌分布就保持恒定不变了，结果为：$10^8\begin{bmatrix}3.6\\1.1\\1.3\end{bmatrix}$。

5. 结论

线性代数的应用是线性代数教学中的一个重要环节，西安电子科技大学从 2005 年起对线性代数教学进行了持续性的改革探索，改革的重点就是把线性代数应用融入线性代数的理论教学中，并利用 MATLAB 软件来完成矩阵模型的数值计算和绘图分析。

“实用大众线性代数(MATLAB 版)”慕课就是我们长期改革探索所取得成果的一部分[2]。该课程于 2016 年 10 月 10 日在中国大学 MOOC 平台上线，至今已经连续播放 5 期，学员总数近六万人，获得了广大学员的高度好评，并于 2017 年 12 月获国家首批精品在线开放课程。该课程特点就是把线性代数理论知识、线性代数的应用实例及 MATLAB 软件深度融合，把学生带进了一个“学以致用”的创新境界。

参考文献

[1] 杨威, 高淑萍. 线性代数机算与应用指导(MATLAB 版) [M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2009: 71-97.

[2] 陈怀琛, 杨威. 工科线性代数必需的三项改革[J]. 应用数学进展, 2018, 7(9): 1159-1165.