

Analysis of Opioid Transmission Based on SIR Model

Yi Liu, Dan Li*, Hongfeng Hu, Yongjian Xu, Zan Yang

Tongji Zhejiang College, Jiaxing Zhejiang
Email: lidan6745@163.com

Received: Feb. 14th, 2019; accepted: Feb. 27th, 2019; published: Mar. 6th, 2019

Abstract

In recent years, opium drug crisis arises in the worldwide frequently. As the superpower, the United States suffered great impact of the opium drug crisis. Among these impacts, not only do they bring a series of trouble for the healthy development of American society but also bring a series of threats for the existing legal system and fundamental economic departments of the US. The degree of the impact of opium drug crisis of one region varies from that of another. Hence, this passage makes judgement of the unknown by fitting time series scatter plot and 3D surface map, setting up contagious SIR model, showing and forecasting the time and placement of opium drug crisis in the next few years. And it sets up multiple infection stage SIRS model on the basis of SI_nR model, showing this from the aspects of complex network structure, network scale and the relative infectivity of drugs, making thorough analysis of the sensing principle and internal regulation of drug delivery system, thus specifying drug trend and concentrate factors in question, developing effective strategies to perfect the weak link of the circulation of the opium drug crisis and affirm the key parameters of the evolution model.

Keywords

SIR Model, SI_nR Model of Multi-Infection Stage, Evolutionary Simulation

基于SIR模型的阿片类药物传输分析

刘毅, 李丹*, 胡洪峰, 徐永健, 杨赞

同济大学浙江学院, 浙江 嘉兴
Email: lidan6745@163.com

*通讯作者。

摘要

近些年，阿片药物危机在世界范围均频繁发生，美国作为世界上唯一的超级大国，阿片药物都给美国带来了剧烈的影响。其中不仅给美国的社会健康问题带来一系列困扰，还给美国现有的法律体系问题与美国经济重要部门带来一系列威胁。阿片药物危机影响程度是因地而异的，因此本文通过拟合时序散点图与三维曲面图对未知进行判断，建立SIR传染模型，演化预测未来几年阿片药物危机的时间地点，并基于SIRS模型建立具有多感染阶段的 SI_nR 模型，从复杂网路结构、网络规模以及药物相对感染力方面进行仿真演化，深入解析药物传播系统的感染机理与内在规律，进而明确题中药物趋势与集中因素，制定有效策略，来完善阿片药物传播中的薄弱环节，确定影响演化模型的重要参数。

关键词

SIR模型，多感染阶段 SI_nR 模型，演化模拟

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

众所周知，世界正在经历一场阿片类药物危机，美国作为超级大国影响尤为严重，此次危机不仅仅对美国社会健康问题带来巨大的负面影响，同时还会对美国现有的法律体系问题和美国经济的重要部门带来不可磨灭的影响和复杂深刻的挑战。根据美国毒品管制署所提供的数据报告，美国联邦、州地方毒品犯罪的主要是受麻醉止痛药(合成阿片)和吗啡的影响，而美国各州之间受到这两类阿片药物的影响程度是因地而异的。

更详细地说，如果阿片类药物的危机蔓延到美国的所有横截面，将会对美国政治、经济局势带来十分恶劣的影响。基于上诉阿片药物危机的问题，本文立足美国的肯塔基州、弗吉尼亚州、西弗吉尼亚州、宾夕法尼亚州、俄亥俄州五个州的各个县阿片类药物影响，根据美国毒品管制署与美国人口普查所知的社会经济数据，综合得出五个州的阿片药物在未来的影响情况，并对美国阿片药物的控制提供控制性的积极建议。

因此，我们用五大州的 Drug Report 数据占五个州总 Drug Reports 数据的比例建立时序散点图，对筛选后剩下州的时序散点图进行四次拟合得到拟合曲线，再通过截距判断最早发生的州位置；然后用该州的各县 Drug Report 数据占总县 Drug Report 的比例，用制图软件建立三维曲面图，通过峰值的高低判断县位置。研究阿片药物的传播和扩散，确定阿片药物的最开始的传染源以及阈值水平，利用传染并传播模型 SIR 对问题进行分析。本文将对整个阿片药物的传播系统抽象成为复杂网络，在该网络上，节点表示美国五个州各个县的个体，边表示美国五个州各个县之间的相互联系，表示节点之间的相互关系，由于阿片药物使用的传播方式与传染病传播及其相似，因此建立 SIR 模型针对复杂网络上阿片药物的进行科学的演化，从而预测未来阿片药物发展的具体位置与时间。考虑不同阶段网络上阿片药物的传播及传播阈值的影响，引进相对感染力和传统时间尺度的概念，分析无标度网络的相对传染里的阈值小于小世

界的网络阈值，从而设置合适的阈值来控制传播向着有利于降低阿片药物传播的方向发展。

根据美国人口普查所提供的社会经济数据，分析数据对阿片药物使用和上瘾的趋势是否存在影响，综合考虑社会与个体的关系以及个体处在不同阶段的差异。受到文献[1] [2] [3] [4] [5]启发，我们基于 SIRS 提出的阿片药物多感染传播阶段的 SI_nR 模型。感染阿片药物的个体在不同的阶段具有非均匀的感染力，同时引进感染尺度与恢复尺度的概率，从复杂网络结构、网络规格和相对的感染力方面进行仿真研究。得出个体有着不同传播的影响因素，并研究多因素在阿片药物传播网络行为规律，确定有效性和参数，最后得出控制合适的阈值可以有效的控制阿片药物传播的最终影响力，进而得到相应控制策略。

2. 假设和名词符号说明

2.1. 基本假设

均匀性假设，美国各大州各个县的个体自身不存在差异，个体对于阿片类药品的接触、使用和上瘾的概率是等效的，阿片药物的传播是等概率接触、传播。假设本文中阿片药物的传播方式对一些实际的传播特性和网络结构的影响是可以忽略不计的。假设美国总人数是不变的，并且感染病毒的时间尺度远小于个体的生命周期，从而不考虑个体的出生与自然死亡。假设美国国家毒品管制署提供的犯罪实验室向缉毒局提供的报告和美国人口普查局提供的数据是正确无误的，与实践情况没有任何的偏差，并且数据和报告具有权威性和说服力。国各个州及各个县之间合成阿片中药物报告数较小的合成药物对推测五个州及各个县最早出现阿片类药物的影响是可以忽略不计的，最早出现阿片类药物的州及其具体位置可根据阿片药物报告数中数目在百以上来推测。

2.2. 基本假设

阿片类药物：缓解疼痛的一种药物，容易上瘾。

吗啡：一系列吗啡类毒品的总称，同时也是一种非法生产、容易高度上瘾的一种镇痛药物吗啡。

合成类阿片：由人工合成的阿片。

2.3. 符号说明

β 为阿片药物在基本复杂网络中的感染率； λ 为阿片药物在基本复杂网络中的恢复率； $\eta(\eta_c)$ 为阿片药物在基本复杂网络的传播效率(传播临界值即阈值)； δ 为阿片药物的易感者与免疫者的转化率； β_n 为阿片药物在第 n 阶段时传播感染的感染率； λ_n 为阿片药物在第 n 阶段时传播感染的恢复率； w_{ij} 为阿片药物在 S 状态的易染者个体和处于 I 状态的邻居的 j 权重。

3. 模型建立及求解

3.1. 时序散点模型与三维曲面模型

用 2010~2017 年美国 Drug Reports 数据的比例建立时序散点图，然后对筛选后剩下州的时序散点图进行四次拟合得到拟合曲线，再通过截距判断最早发生的州位置；然后用 2010~2017 年该州的各县 Drug Report 数据占总县 Drug Report 的比例，用制图软件建立位置、时间、比例三维曲面图，通过峰值的高低判断县位置。并通过图形分析随着时间的推移，报告的五个州及其县之间的合成阿片和吗啡事件(病例)的特点。

首先，分析吗啡时序散点图 1 与图 2，可以看出 KENTUCKY、VIRGINIA、WEST VIRGINIA 三个州 Drug Report 数据占五个州总 Drug Reports 数据的比例每年都相对较低，大多数仅占 10%以内，而 PENNSYLVANIA 和 OHIO 两州 Drug Report 数据占五个州总 Drug Reports 数据的比例高达 35%以上。因

此, 从概率上来讲 KENTUCKY、VIRGINIA、WEST VIRGINIA 三个州不太可能为最早发生吗啡使用的具体位置。由拟合曲线图可以清晰的看到 PENNSYLVANIA 的截距在 0.5 左右, 而 OHIO 的截距在 0.35 左右, 两者相差 0.15, 从而可以确定 PENNSYLVANIA 州为最早发生吗啡使用的位置。

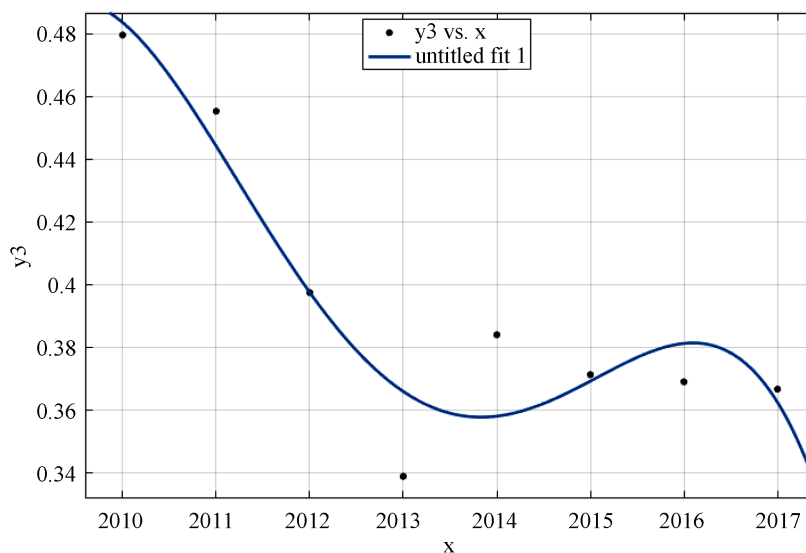


Figure 1. PENNSYLVANIA morphine time series discrete fitting map

图 1. PENNSYLVANIA 吗啡时序离散拟合图

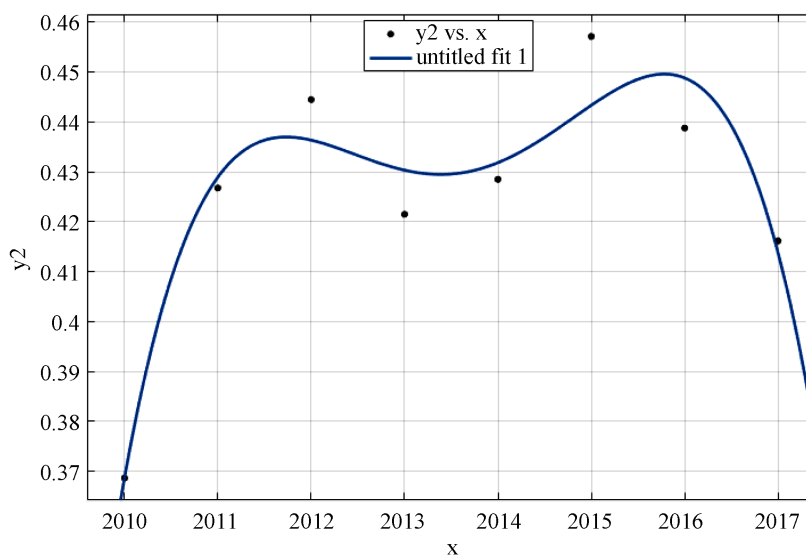


Figure 2. OHIO morphine time series discrete fitting map

图 2. OHIO 吗啡时序离散拟合图

然后运用相同的方法, 由于 VIRGINIA 和 WEST VIRGINIA 两个州 Drug Report 数据占五个州总 Drug Reports 数据的比例与 PENNSYLVANIA、OHIO、KENTUCKY 三个州相比要低的多, 所以仅对 PENNSYLVANIA、OHIO、KENTUCKY 三个州所对应的散点图进行四次拟合, 如图 3, 图 4, 图 5 所示。

因此可以确定五大州中最早发生的为 PENNSYLVANIA。再将 PENNSYLVANIA 州的各个县建立位置、时间、比例三维立体曲面模型, 如图 6 所示, 判断 PENNSYLVANIA 的具体位置。

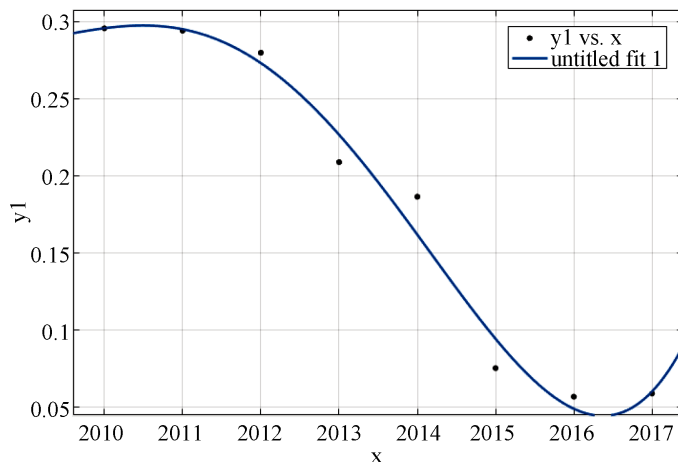


Figure 3. KY discrete fitting diagram of synthetic opioid time series
图 3. KY 合成阿片时序离散拟合图

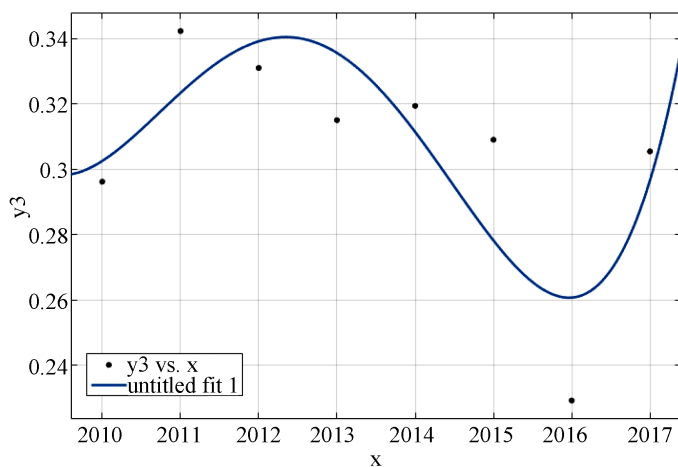


Figure 4. PENNSYLVANIA discrete fitting diagram of synthetic opioid time series
图 4. PENNSYLVANIA 合成阿片时序离散拟合图

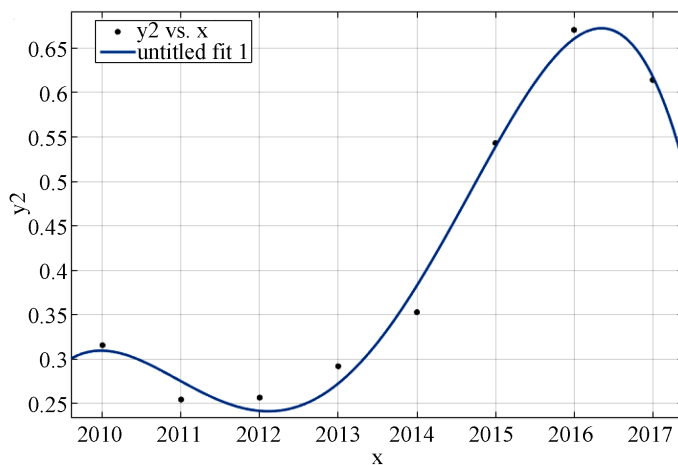


Figure 5. OHIO discrete fitting diagram of synthetic opioid time series
图 5. OHIO 合成阿片时间序列离散拟合图

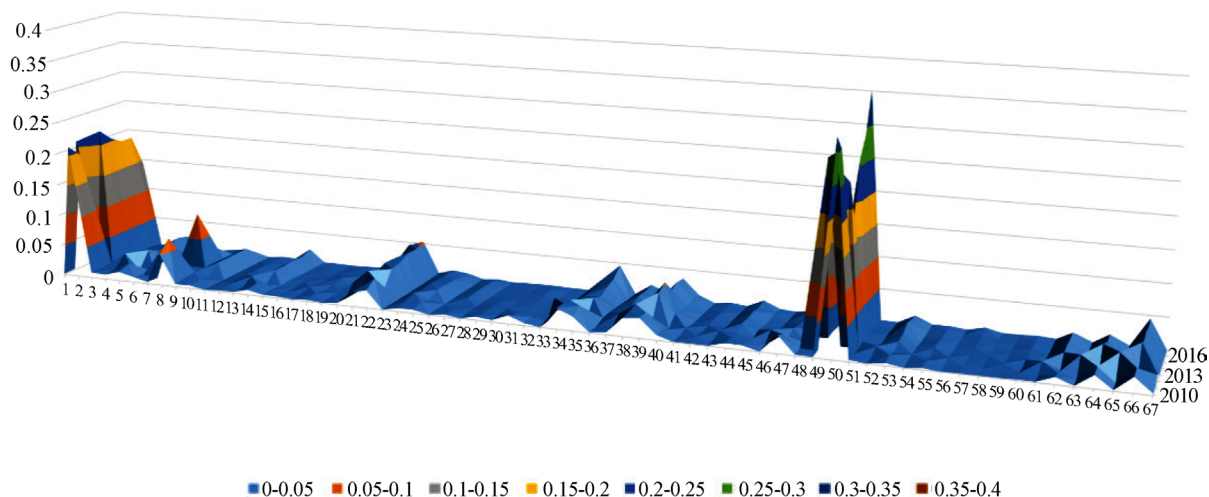


Figure 6. PENNSYLVANIA three-dimensional surface model

图 6. PENNSYLVANIA 三维立体曲面模型

3.2. 小世界网络模型与无标度网络模型

基于上诉分析，将阿片药物传播系统抽象成基本复杂网络。对于基本的复杂网络，小世界性和无标度性，其中小世界网络具有较短的平均距离和较大的聚集系数；同时在基恩复杂网络中大部分的节点只有少数点链路，同时某些节点却拥有着与其他节点大量的链接，表现在无标度性上的就是幂律分布，综合考虑阿片药物传播系统类似网络的增长特性、同时系统中新节点更倾向与那些具有高度的“大”节点相连接的优先连接特性。因此，阿片药物传播系统类似的基本复杂网络主要包括小世界网络与无标度网络两种网络模型。

复杂网络中的多种形式的传播现象都可以看作是服从某一规律的传播行为。实际的复杂网络系统的构成元素众多、组织因素庞大、这导致信息在网络上的传播规律过程是十分复杂的，因此还需构建小世界网络模型和无标度网络模型来解释传播行为规律并且解决文中的相关问题，并将本部分中阿片药物的扩散传播抽象为感染传播模型。

3.3. SIR 模型

SIR 模型是用来描述疾病传播过程中被感染个体在治愈后具有免疫力，因而成为健康个体并且不会被传染，或者难以治愈而死亡，从而移除传播系统不再感染其他个体。

SIR 模型中，文中所要研究的美国五大州各个县的个体主要被分为三类：易染者 S (易染个体)、感染者 I (染病个体)、恢复者 R (免疫个体)。在初始条件下，通常认为系统中一个或者少数几个处于感染状态，其余个体处于易感染的状态。一般情况下，SIR 模型传播规则如图 7 所示。

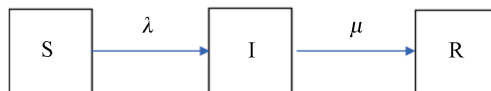


Figure 7. SIR model schematic diagram

图 7. SIR 模型示意图

记 $S(t), I(t), R(t)$ 分别表示易感者、感染者、免疫者在美国五大州各个县总个体所占的比例， S_0, I_0, R_0 表示各初始状态下人数的初值，且均为负数，因此得到了 SIR 模型的微分方程如下：

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= -\lambda S(t)I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \lambda S(t)I(t) - \mu I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \mu R(t), \\ S(t) + I(t) + R(t) &= 1, \\ S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) &= R_0.\end{aligned}$$

因此, 在基本复杂网络中的 k 节点条件下, 设 $S_k(t), I_k(t), R_k(t)$ 分别表示在 k 节点时的易感者、感染者、免疫者在感染点与恢复点在 t 时刻所占的各个比例:

$$S_k(t) + I_k(t) + R_k(t) = 1.$$

此时我们取用 k 节点的传统时间尺度关系式:

$$\theta(t) = \sum_{k'} P(k'|k) i_k(t).$$

因此 SIR 模型的微分方程可变化可得:

$$\begin{aligned}\frac{dS_k(t)}{dt} &= -\lambda S_k(t)\theta(t), \\ \frac{dI_k(t)}{dt} &= \lambda k S_k(t)\theta(t) - I_k(t), \\ \frac{dR_k(t)}{dt} &= I_k(t).\end{aligned}$$

初始情况下, 当 $I^0 \rightarrow 0$ 时, 可取用 $I_k(0) = 0, S_k(0) = 1$, 可得 $S_k(t) = e^{-\lambda k \varphi(t)}$, 并构建 $S_k(t)$ 辅助函数:

$$\varphi(t) = \int_0^t \theta(t') dt' = \frac{1}{\eta} \sum_k k P(k) r_k(t),$$

进而可以推导:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{1}{\eta} \sum_k k P(k) i_k(t),$$

即:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = 1 - \varphi(t) - \frac{1}{\eta} \sum_k k P(k) e^{-\lambda k \varphi(t)}.$$

因此本文令 $\varphi_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)$, 则可以求出:

$$\begin{aligned}r_k(\infty) &= 1 - S_k(\infty), \\ \varphi_\infty &= \sum_k k P(k) (1 - e^{-\lambda k \varphi_\infty}).\end{aligned}$$

因此在本题中只需满足 $i_k(\infty) = 0$, 即可知道:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\varphi(t)}{dt} = 0,$$

$$\varphi_\infty = 1 - \frac{1}{\eta} \sum_k k P(k) e^{-\lambda k \varphi_\infty}.$$

而根据题目中的已知条件，我们必须满足：

$$\left. \frac{d}{d\varphi_\infty} \left(1 - \frac{1}{\eta} \sum_k P(k) e^{-\lambda k \varphi_\infty} \right) \right|_{\varphi_\infty=0} \geq 1.$$

因此可知：

$$\frac{1}{\eta} \sum_k P(k) (\lambda k) = \lambda \frac{\eta}{\eta^2} \geq 1.$$

从而可知，在问题一条件下的阈值是：

$$\eta_c = \frac{\eta}{\eta^2} = 0.24.$$

综上所述，在基本复杂网络中，阿片药物的传播存在一个有限的正的传播临界值 η_c ，如果在阿片药物传播过程中，阿片药物的有效传播率大于这个临界值，传播感染将会持续稳定的进行下去，最终情况下，阿片药物的传播将处于一个稳定的平衡状态，即称该基本复杂网路处于激活相态；如果阿片药物的有效传播率小于这个临界值，那么感染源的个数将会受到限制，阿片药物的传播无法大范围的进行传播，此时的基本复杂网络处于吸收相态。因此在阿片药物传播的小世界网络与无标度网络中，存在阈值 $\eta_c = 0.24$ ，将阿片药物传播网络的激活相态和吸收相态分开。

基于上诉对阈值 η_c 的确定，选择合适阈值，针对阿片药物传播系统利用 SIR 模型演化 5 年，本文发现，在将来的阿片药物传播感染在美国 PENNSYLVANIA 州持续传播，最后并趋近平稳状态。如图 8，图 9 所示。

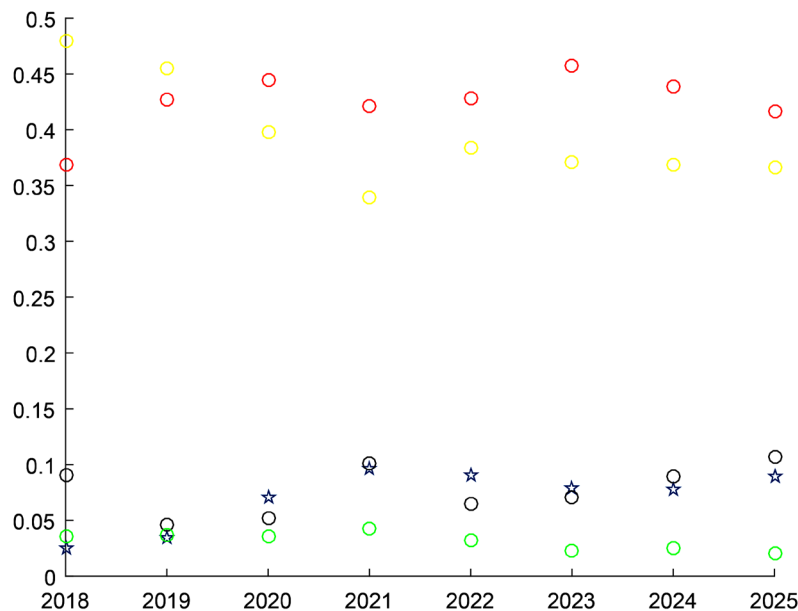


Figure 8. SIR morphine evolution
图 8. SIR 演化吗啡



Figure 9. SIR evolutionary synthetic drugs

图 9. SIR 演化合成药物

3.4. SIR 模型

基于第二部分中美国人口普查所提供的社会经济数据，本文在第一部分 SIR 模型的基础上，考虑在阿片药物传播过程中，免疫者可能会丧失免疫能力转化成为易感者，因此本文对模型进行优化，引入 SIRS 模型，考虑转化概率 δ 的影响。

此时，阿片药物传播系统的传播机理如图 10 所示：

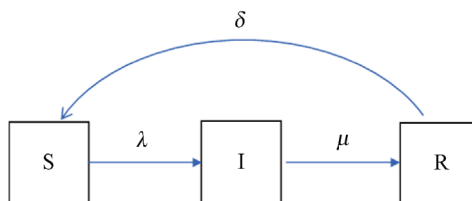


Figure 10. Dissemination mechanism of opiate drug delivery system

图 10. 阿片药物传播系统的传播机理

其微分方程表达式：

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\lambda S(t)I(t) + \delta R(t),$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \lambda S(t)I(t) - \mu I(t),$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \mu I(t) - \delta R(t),$$

$$S(t) + I(t) + R(t) = N(t),$$

$$S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0.$$

由于在阿片药物传播系统中，个体与个体之间的联系并不是单一的相互联系，同时对于个体所在的状态阶段的不同也会有着不同的感染力。

3.5. SInR 模型

由于在阿片药物传播系统中未考虑个体之间的差异，而根据美国人口普查所提供的社会经济数据，因此美国五个州各个县中个体及其周围的邻居接触的概率不同从而导致阿片药物传播的概率也不同，同时由于社会经济因素的影响导致美国五个州各个县的个体自身的免疫能力的不同从而导致阿片药物传播概率的不同。

在阿片药物传播系统中，个体在每一个阶段都具有不同的感染传播概率，基于此，本文建立具有多感染传播阶段的 SI_nR 模型进行求解， SI_nR 模型的工作机理如图 11：

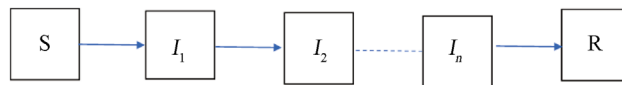


Figure 11. Working mechanism of model SInR
图 11. SInR 模型的工作机理

其微分方程表达式为：

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= -S(t) \sum_{n=1}^L \beta_n I_n(t), \\ \frac{dI_1(t)}{dt} &= S(t) \sum_{n=1}^L \beta_n I_n - \lambda_1 I_1(t), \\ \frac{dI_n(t)}{dt} &= \lambda_{n-1} I_{n-1}(t) - \lambda_n I_n(t), \\ \frac{dR_1(t)}{dt} &= \lambda_n I_n(t).\end{aligned}$$

在上列公式中， $I_n(t)$ 表示阿片药物在第 n 阶段时产波感染个体的比例，且满足下列条件：

$$S(t) + \sum_{n=1}^L I_n(t) + R(t) = 1.$$

若此时在 S 状况下，阿片药物传播系统复杂网络中，易染者个体 i 将以概率为 $\varphi(i)$ 被阿片药物感染成 I 状况(即由 S 变成 I_1)，而满足权重关系式：

$$\varphi(i) = k \sum_j w_{ij} \beta_{s(j)}.$$

根据上述权重关系，可以确定阿片药物的状态阶段，利用 SI_nR 模型不断进行演化，最终发现直到 $n = L$ ，阿片药物的传播系统保持稳定状态，即假设具有免疫系统的美国五大州各个县的个体也不会被感染。

综上所述，根据 SI_nR 模型的演化，本文发现阿片合成物易于获得和使用广泛是滥用现象出现的主要因素，过去的数据中可以明显的发现 18~40 岁的年龄段的人群占有阿片上瘾的数量不断增加。现有大量的含有阿片的药物流通在市场上，现行的制度没有明确上瘾的发生条件，处方阿片类药物使用的广泛增加和随之而来的误用造成的最紧迫问题。现在市场上有大量且容易获得的吗啡加剧了对于阿片的上瘾。由于合成阿片的易获得使阿片上瘾有着低龄化的趋势。

因此，综合上述的分析，我们制定以下策略：

- 1) 首先加强对含有阿片药物的管制, 控制每个患者定期的用量避免上瘾。
- 2) 严厉打击市场上所有的毒品, 防止人们受到毒品的影响。

而根据上诉所建立的模型, 计算确定在该策略下阿片药物的有效传播效率, 将该效率与第一部分与第二部分时阿片药物感染传播的临界阈值进行对比, 可发现, 我们制定策略后的传播效率低于临界阈值, 即阿片药物传播抽象的基本复杂网络呈现吸收相态, 则说明我们策略有效。若要使制定策略成功, 必须使制定策略后阿片药物的有效传播效率低于临界阈值 η_c 即可, 即 $0 \leq \sum \beta \leq 0.24$ 即可。

4. 结论

本文中所建立的模型充分利用了阿片药物在传播过程中与传染病传染相类似的特点以及阿片药物的传播规律, 抽象基本复杂网络, 充分结合 SIR 模型与 SIRS 模型的传染模型特性, 并在多感染源阶段的条件下, 建立与之对应的 SI_nR 模型。文中所建立的模型将阿片药物传播时所经受的多种具有不同阶段性和不同传播效率的产波感染力的影响, 同时利用阿片药物传播阈值的影响, 引入阿片药物的相对感染传播能力与传播时间尺度的概念, 对整个阿片药物传播系统进行对比仿真分析, 实验数据与实际中阿片药物传播与传染的影响相一致。

同时, 文中所建立的模型并未确定阿片药物传播系统抽象处的复杂网络的最大适用范围, 以及确定实际运用的网络模型, 可能与实际阿片药物传播系统网络存在一定差距。因此, 基于本文模型, 构建具有多边权重的复杂网络, 充分考虑在阿片药物传播过程中个体与周围环境、个体与个体之间的影响关系。

基金项目

同济大学浙江学院第七届教改项目(项目编号: 0118037)。

参考文献

- [1] Jiang, Q.Y., Xie, J.X. and Ye, J. (2011) *Mathematical Modeling*. 4th Edition, Higher Education Press, Beijing.
- [2] Meerschaert, M.M. (2009) *Mathematical Modeling Methods and Analysis*. Machinery Industry Press, Beijing.
- [3] 李航. 统计学习方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2012.
- [4] 周志华. 机器学习[M]. 北京: 清华大学出版社, 2016.
- [5] DuPont, R.L. (1974) The Rise and Fall of Heroin Addiction. *Natural History*, **83**, No. 6.

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2324-7991, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>
期刊邮箱: aam@hanspub.org