Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2019, 8(3), 400-406**
Published Online March 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.83045

Necessary Optimality Conditions of Strict Solutions for Quasiconvex Optimization Problems

Linting Li, Ming Yang, Ying Gao

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing
Email: lilinting102@163.com, yming72@163.com, gaoying@cqnu.edu.cn

Received: Feb. 11th, 2019; accepted: Feb. 27th, 2019; published: Mar. 6th, 2019

Abstract

In this paper, we study the necessary conditions of strict solutions for quasiconvex optimization problems by using the subdifferential of quasiconvex function. Firstly, we introduce the basic concepts of quasiconvex optimization problem. Then, we derive the necessary conditions of the strict solutions for quasiconvex optimization problems.

Keywords

Quasiconvex Optimization Problems, Strict Solution, Optimality Condition

拟凸优化问题严格解的最优性必要条件

李林廷，杨　铭，高　英

重庆师范大学数学科学学院，重庆
Email: lilinting102@163.com, yming72@163.com, gaoying@cqnu.edu.cn

收稿日期：2019年2月11日；录用日期：2019年2月27日；发布日期：2019年3月6日

摘　要

本文对拟凸多目标优化问题的严格解进行研究。利用拟凸次微分给出拟凸优化问题严格解的最优性必要条件。首先，引进拟凸函数次微分的基本概念和严格解的概念。然后，将拟凸函数次微分的概念应用到拟凸优化问题中，给出拟凸优化问题严格解的最优性必要条件。

文章引用: 李林廷, 杨铭, 高英. 拟凸优化问题严格解的最优性必要条件[J]. 应用数学进展, 2019, 8(3): 400-406.
DOI: 10.12677/aam.2019.83045

关键词

拟凸优化，严格解，最优性条件

1. 引言

凸性在最优化理论中被广泛使用。然而，在很多实际问题的研究中，我们所研究的函数或集合大都是非凸的。所以研究各类广义凸函数及其应用具有很重要的现实意义。近年来，凸性的概念已被推广到不同类型的广义凸函数。特别，1965 年，Mangassrian [1]首次引进拟凸和伪凸的概念并给出若干性质。1970 年，Cottle 和 Ferland [2] [3]进一步对拟凸优化问题进行了研究，并给出了拟凸函数的一些性质。

另一方面，次微分是研究凸优化问题最优性条件的基本工具。因此，对于广义凸函数类，如何引进对应的次微分并研究其最优性条件是很重要的研究方向。1973 年，Greenberg 和 Pierskalla [4]定义了拟凸函数的 Greenberg-Pierskalla 次微分。1985 年，Plastria [5]定义了 Plastria 次微分。随后，Penot [6] [7]利用拟凸函数几种次微分给出了最优性条件。目前，对拟凸数值优化问题最优性条件的研究已取得一定的进展[8] [9] [10] [11]，而对于拟凸多目标优化问题解的最优性条件研究较少[12]。特别地，文献[13]研究了凸性条件下严格解的最优性条件，在此基础上我们进一步研究拟凸多目标优化问题严格解的最优性必要条件。

本文主要研究了拟凸多目标优化问题严格解的最优性必要条件。具体内容安排如下：第 2 节给出拟凸优化的概念和结果；第 3 节考虑带有抽象集约束的拟凸优化问题，给出多目标拟凸优化问题的最优性必要条件；第 4 节考虑带有不等式约束的优化问题，给出第 3 节中拟凸优化多目标问题的最优性必要条件的具体形式。

2. 预备知识

设 R^n 是 n 维欧几里得空间，R_+^n 为非负象限，$\Omega \in R^n$ 是非空集合。$cl\Omega$，$cone\Omega$ 分别表示 Ω 的闭包和锥包。对 $x \in R^n$，$d(x,\Omega)$ 表示 x 到 Ω 的距离。

对 $\bar{x} \in cl\Omega$，Ω 在 $\bar{x}$ 的切锥和法锥分别定义为

$$T(\Omega,\bar{x}) = \left\{ d \in R^n : \exists \{x_i\} \subseteq \Omega, t_i \downarrow 0, s.t. \lim_{i\to\infty} \frac{x_i - \bar{x}}{t_i} = d \right\}$$

$$N(\Omega,\bar{x}) = \left\{ d \in R^n : d^{\mathrm{T}} \bar{x} \le 0, \forall \bar{x} \in T(\Omega,\bar{x}) \right\}$$

特别的当 Ω 是凸集时，法锥退化为

$$N(\Omega,\bar{x}) = \left\{ x^* \in R^n : \left\langle x^*, x - \bar{x} \right\rangle \le 0, \forall x \in \Omega \right\}$$

对 $x, y \in R^p$

$$x < y \Leftrightarrow x_i < y_i \quad \forall i = 1,\cdots,n$$

$$x \leqq y \Leftrightarrow x_i \leqq y_i \quad \forall i = 1,\cdots,n$$

$$x \le y \Leftrightarrow x_i \leqq y_i \quad \forall i = 1,\cdots,n,\ x \ne y$$

定义 2.1 [14]：设 $\varphi:\Omega \to R$。若对 $\forall x_1, x_2 \in \Omega, \forall \lambda \in [0,1]$ 有

$$\varphi(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \max\{\varphi(x_1), \varphi(x_2)\}$$

则称 $\varphi(x)$ 是 Ω 上的拟凸函数。

本文考虑下面的多目标优化问题

$$(MOP) \qquad \min f(x) \quad s.t.\ x \in \Omega$$

其中，$\Omega \in R^n$ 为凸集，$f(x) = (f_1(x), f(x), \cdots, f_p(x))^{\mathrm{T}}, f_i:\Omega \to R, i = 1,2,\cdots,p$ 为拟凸函数。

定义 2.2 [13]：i) 当 $p=1$ 时，(MOP)为单目标问题。若存在 $\mu > 0$，对任意 $x \in \Omega$ 满足

$$f(x) - f(\overline{x}) \ge \mu\|x - \overline{x}\|,$$

则 $\overline{x} \in \Omega$ 称为单目标优化问题的严格解。

ii) 当 $p \ge 2$ 时，(MOP)为多目标问题。若存在 $\mu > 0$，对任意 $x \in \Omega$ 满足

$$d(f(x) - f(\overline{x}), -R_+^p) \ge \mu\|x - \overline{x}\|,$$

则 $\overline{x} \in \Omega$ 称为多目标优化问题的严格解。

定义 2.3 [15]：函数 $\varphi:\Omega \to \overline{R} = R \bigcup \{+\infty\}$ 在 $\overline{x} \in dom\varphi$ 处的 Plastria 次微分和 Gutierrez 次微分定义如下

$$\partial^{<}\varphi(\overline{x}) = \{x^* \in \Omega^* : \langle x^*, x - \overline{x}\rangle \le \varphi(x) - \varphi(\overline{x}), \forall x \in S_\varphi^{<}(\overline{x})\},$$

$$\partial^{\le}\varphi(\overline{x}) = \{x^* \in \Omega^* : \langle x^*, x - \overline{x}\rangle \le \varphi(x) - \varphi(\overline{x}), \forall x \in S_\varphi(\overline{x})\}.$$

其中，$dom\varphi = \{x \in R^p : \varphi(x) < +\infty\}$，$S_\varphi^{<}(\overline{x}) = \{x \in \Omega : \varphi(x) < \varphi(\overline{x})\}$，$S_\varphi(\overline{x}) = \{x \in \Omega : \varphi(x) \le \varphi(\overline{x})\}$。

定义 2.4 [15]：称 $\varphi:\Omega \to \overline{R}$ 在 $\overline{x}$ 处为 Plastria 函数，若严格水平集 $S_\varphi^{<}(\overline{x})$ 是凸的，且有

$$N(S_\varphi^{<}(\overline{x}), \overline{x}) = R_+ \partial^{<}\varphi(x)$$

称 $\varphi:\Omega \to \overline{R}$ 在 $\overline{x}$ 处为 Gutierrez 函数，若水平集 $S_\varphi^{\le}(\overline{x})$ 是凸的，且有

$$N(S_\varphi(\overline{x}), \overline{x}) = R_+ \partial^{\le}\varphi(x)$$

3. 拟凸条件下严格解的最优性必要条件

本节内容主要利用拟凸的次微分给出拟凸单目标和多目标优化问题的最优性必要条件。

首先，考虑单目标优化问题严格解的最优性必要条件。

定理 3.1：$\overline{x} \in \Omega$ 为单目标优化问题的严格解，f 在 $\overline{x}$ 处为 Gutierrez 函数，且 $\overline{x}$ 不是 f 在 Ω 上的局部弱有效解，则

$$0 \in \partial^{\le} f(\overline{x}) + N(\Omega, \overline{x})$$

证明：因为 $\overline{x}$ 为严格解，从而有 $\Omega \cap S_f(\overline{x}) = \{\overline{x}\}$，所以 $\Omega \cap \inf S_f(\overline{x}) = \varnothing$. 故由凸集分离定理可知，存在 u^* 使得

$$\langle u^*, x - \overline{x}\rangle \ge c \ge \langle u^*, \omega - \overline{x}\rangle, \forall x \in \Omega, \forall \omega \in S_f(\overline{x}).$$

令 $x=\bar{x}$，则由上式左边可知 $c\le 0$，令 $\omega=\bar{x}$，则由上式右边可知 $c\ge 0$，因此 $c=0$。故有 $-u^*\in N(\Omega,\bar{x})$ 且 $u^*\in N\left(S_f(\bar{x}),\bar{x}\right)=R_+\partial^{\le} f(\bar{x})$。由 $\bar{x}$ 不是 f 在 Ω 上的局部弱有效解且 $\Omega\in R_+$ 可知 $\inf S_f(\bar{x})\ne\varnothing$。因为 $u^*\ne 0$，所以存在 $\xi\in\partial^{\le} f(\bar{x}), r\in R_+$，使得 $\xi\in ru^*$，所以 $0\in\partial^{\le} f(\bar{x})+N(\Omega,\bar{x})$。

注 3.1： 定理 3.1 的逆命题不一定成立，参见例 3.1。

例 3.1： 考虑拟凸函数

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x & x>0\end{cases}$$

令 $\Omega=(-\infty,+\infty)$，取 $\bar{x}=0$，则 $\partial^{\le} f(\bar{x})=[0,+\infty), N(\Omega,\bar{x})=\{0\}$。因此 $0\in\partial^{\le} f(\bar{x})+N(\Omega,\bar{x})$，但 $\bar{x}$ 不是严格解。

若将 $0\in\partial^{\le} f(\bar{x})+N(\Omega,\bar{x})$ 更改为 $\mu U\in\partial^{\le} f(\bar{x})+N(\Omega,\bar{x})$，其中 U 为 R^n 中的闭单位球，则有如下结论。

定理 3.2： 对单目标问题，若存在 $\mu>0$ 使得

$$\mu U\in\partial^{\le} f(\bar{x})+N(\Omega,\bar{x}),$$

则称 $\bar{x}\in\Omega$ 为单目标优化问题的严格解。

证明： 令 $x\in\Omega$ 则 $x-\bar{x}\in T(\Omega,\bar{x})$。存在 $x^*\in U$ 使得

$$x^*(x-\bar{x})=\|x-\bar{x}\|,$$

由 $\mu U\in\partial^{\le} f(\bar{x})+N(\Omega,\bar{x})$ 可知，存在 $\xi^*\in\partial^{\le} f(\bar{x})$ 使得 $\mu x^*-\xi^*\in N(\Omega,\bar{x})$，即

$$\left(\mu x^*-\xi^*\right)(x-\bar{x})\le 0,$$

故有

$$\mu x^*(x-\bar{x})\le\xi^*(x-\bar{x})\le f(x)-f(\bar{x}),$$

所以

$$\mu\|x-\bar{x}\|\le f(x)-f(\bar{x}).$$

即 $\bar{x}$ 为单目标优化问题的严格解。

下面，我们针对多目标优化问题给出严格解的最优性必要条件。

定理 3.3： $\bar{x}\in\Omega$ 为多目标优化问题的严格解，f_i 在 $\bar{x}$ 处为 Gutierrez 函数，且 $\bar{x}$ 不是 f 在 Ω 上的局部弱有效解，则存在不全为零的 $\lambda_i\ge 0, i=1,2,\cdots,p$，使得

$$0\in\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\partial^{\le} f_i(\bar{x})+N(\Omega,\bar{x}).$$

证明： 设 $\bar{x}$ 为严格解，即存在 $\mu>0$，对任意 $x\in\Omega\setminus\{\bar{x}\}$ 满足

$$d\left(f(x)-f(\bar{x}),-R_+^p\right)\ge\mu\|x-\bar{x}\|.$$

即 $f(x)-f(\bar{x})\notin -R_+^p$，又因为 $S_f(\bar{x})=\{x\in\Omega: f(x)\le f(\bar{x})\}$，从而有 $\Omega\cap S_f(\bar{x})=\{\bar{x}\}$。故由凸集分离定理可知，存在 u^* 使得

$$\left\langle u^*, x-\bar{x}\right\rangle\ge c\ge\left\langle u^*,\omega-\bar{x}\right\rangle, \forall x\in\Omega, \forall\omega\in S_f(\bar{x}).$$

令 $x=\bar{x}$，则由上式左边可知 $c\le 0$，令 $\omega=\bar{x}$，则由上式右边可知 $c\ge 0$，因此 $c=0$。故有

$u^* \in N\left(S_f(\bar{x}),\bar{x}\right)$ 且 $-u^* \in N(\Omega,\bar{x})$。由 $\bar{x}$ 不是 f 在 Ω 上的局部弱有效解且 $\Omega \in R_+^p$ 可知 $\bigcap_{i=1}^{p}\left(\inf S_f(\bar{x})\right) \neq \varnothing$，从而由法锥的运算法则有 $N\left(S_f(\bar{x}),\bar{x}\right)=\sum_{i=1}^{p} N\left(S_{f_i}(\bar{x}),\bar{x}\right)$。又因为 f_i 在 $\bar{x}$ 处为 Gutierrez 函数，所以 $N\left(S_{f_i}(\bar{x})\right)=R_+\partial^{\le} f_i(\bar{x}), i=1,2,\cdots,p$。因为 $u^* \neq \{0\}$，所以存在 $u_i^* \in \partial^{\le} f(\bar{x})$ 和不全为零的 $\lambda_i \geq 0, i=1,2,\cdots,p$，使得 $u^*=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i u_i^*$。故有 $0 \in \sum_{i=1}^{p}\lambda_i\partial^{\le} f_i(\bar{x})+N(\Omega,\bar{x})$。

注 3.2：定理 3.3 的逆命题不一定成立，参见例 3.2。

例 3.2：考虑多目标优化问题

$$\min\left(f_1(x), f_2(x)\right)^{\mathrm{T}}$$
$$s.t. \qquad x \in R$$

其中 $f_1(x)=x$， $f_2(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ -2 & x \geq 0\end{cases}$

令 $\Omega=(-\infty,+\infty)$。取 $\bar{x}=0$，这时有

$$\partial^{\le} f_1(\bar{x})=[1,+\infty), \partial^{\le} f_2(\bar{x})=(-\infty,0], N(\Omega,\bar{x})=\{0\}.$$

取 $\lambda_1=\frac{1}{2}, \lambda_2=\frac{1}{2}$，有 $0 \in \sum_{i=1}^{p}\lambda_i\partial^{\le} f_i(\bar{x})+N(\Omega,\bar{x})$。但 $\bar{x}$ 不是严格解。

4. 带有不等式约束的拟凸条件下严格解的最优性必要条件

本节我们考虑带有不等式约束的拟凸多目标问题，给出第 3 节中拟凸优化多目标问题的最优性必要条件的具体形式。将(MOP)问题中的抽象集 Ω 退化为一般的不等式约束的情况，即

$$\Omega=\left\{x \in R^p : g_1(x) \leq 0,\cdots, g_m(x) \leq 0\right\}$$

其中 $g_j(x), j=1,2,\cdots,m$ 为拟凸函数。

引理 4.1 [7]：设 $(g_i)_{i\in I}$ 在 $\bar{x}$ 处为 Gutierrez 函数， $\Omega_i=g_i^{-1}\left((-\infty,0]\right), \forall i \in I$ 在 $\bar{x}$ 处是上半连续的， $g_i=0, \forall i \in I$。若下列条件(i)或(ii)成立，则 $h=\max_{j\in I} g_j$ 在 $\bar{x}$ 处为 Gutierrez 函数， $R_+\partial^{\le} h(\bar{x})=\sum_{i\in I} R_+\partial^{\le} g_i(\bar{x})$。

i) 存在 $k \in I, z \in \Omega_k$ 使得 $g_i(z)<0, \forall i \in I \in \{k\}$。

ii) 对 $\forall i \in I, \Omega_i$ 是闭的， $R_+\left(\Delta-\prod_{i\in I}\Omega_i\right)=X^I$， $\Delta=\left\{(x_i)_{i\in I} : \forall j,k \in I, x_j=x_k\right\}$ 为 X^I 的对角线。

首选考虑单个约束的情况。

定理 4.1：设 $\bar{x} \in \Omega$ 为多目标优化问题的严格解， $g_1=\cdots=g_m=g$， f_i 在 $\bar{x}$ 处为 Gutierrez 函数，且 $\bar{x}$ 不是 f 在 Ω 上的局部弱有效解。g 在 $\bar{x}$ 处是上半连续且在 $\bar{x}$ 处为 Gutierrez 函数，则 $g(\bar{x})=0$ 且存在 $\mu>0$ 和不全为零的 $\lambda_i \geq 0, i=1,2,\cdots,p$ 使得

$$0 \in \sum_{i=1}^{p}\lambda_i\partial^{\le} f_i(\bar{x})+\mu\partial^{\le} g(\bar{x}).$$

证明：首先，证明 $g(\bar{x})=0$。反证，假设 $g(\bar{x})<0$。因为 g 在 $\bar{x}$ 处是上半连续的，所以 $\bar{x} \in \operatorname{int}\Omega=0$，则 $\bar{x}$ 为局部弱有效解，这与题意矛盾，故 $g(\bar{x})=0$。由定理 3.3 可得，存在不全为零的 $\lambda_i \geq 0, i=1,2,\cdots,p$，使得

$$0 \in \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \partial^{\le} f_i(\bar{x}) + N(\Omega, \bar{x}).$$

因为 g 在 $\bar{x}$ 处是 Gutierrez 函数，所以 $N(S_g(\bar{x}), \bar{x}) = R_+ \partial^{\le} g(\bar{x})$。又由 $g(\bar{x}) = 0$ 知 $\Omega = S_g(\bar{x})$，故 $N(S_g(\bar{x}), \bar{x}) = N(\Omega, \bar{x})$，从而 $N(\Omega, \bar{x}) = R_+ \partial^{\le} g(\bar{x})$，因此存在 $\mu > 0$ 和不全为零的 $\lambda_i \ge 0, i = 1, 2, \cdots, p$ 使得 $0 \in \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \partial^{\le} f_i(\bar{x}) + \mu \partial^{\le} g(\bar{x})$。

将上述定理推广到更一般的情况，我们可以得到以下结论。

定理 4.2：设 $\bar{x} \in \Omega$ 为多目标优化问题的严格解，f_i 在 $\bar{x}$ 处为 Gutierrez 函数，且 $\bar{x}$ 不是 f 在 Ω 上的局部弱有效解。$I = \{ j \in 1, 2, \cdots, m : g_j(\bar{x}) = 0 \}$。假设引理中(i)或(ii)成立，$g_1, g_2, \cdots, g_m$ 均在 $\bar{x}$ 处是上半连续，对 $\forall j \in I$，g_j 在 $\bar{x}$ 处为 Gutierrez 函数，则存在 $\mu_j > 0$ 和不全为零的 $\lambda_i \ge 0, i = 1, 2, \cdots, p; j = 1, 2, \cdots, m$ 使得

$$0 \in \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \partial^{\le} f_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{m} \mu \partial^{\le} g_j(\bar{x}),\ \mu_j g_j(\bar{x}) = 0.$$

证明：令 $g = \max_{1<j<m} g_j, h = \max_{j \in I} g_j, D = h^{-1}((-\infty, 0])$，对 $j \in \{1, 2, \cdots, m\} \setminus I$，$\bar{x}$ 属于 $\Omega_j = g_j^{-1}((-\infty, 0])$ 的内部。所以对 $x \in \Omega = g^{-1}((-\infty, 0])$，$t > 0$ 有 $\bar{x} + t(x - \bar{x}) \in D$。所以 $N(D, \bar{x}) = N(\Omega, \bar{x})$。由定理 3.3 有，存在不全为零的 $\lambda_i \ge 0, i = 1, 2, \cdots, p$ 使得 $\bar{x}^* \in \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \partial^{\le} f_i(\bar{x})$ 且 $-\bar{x}^* \in N(\Omega, \bar{x}) = N(D, \bar{x})$。又由定理 3.3，有 h 在 $\bar{x}$ 处是上半连续且在 $\bar{x}$ 处为 Gutierrez 函数，所以 $N(D, \bar{x}) = R_+ \partial^{\le} h(\bar{x}) = \sum_{j \in I} \partial^{\le} g_j(\bar{x})$。则存在 $\mu_j \ge 0, \bar{y}_j^* \in \partial^{\le} g_j(\bar{x}), j \in I$。使得 $-\bar{x}^* = \sum_{j \in I} \mu_j \bar{y}_j^*$。所以存在 $\mu_j > 0$ 和不全为零的 $\lambda_i \ge 0, i = 1, 2, \cdots, p$ 使得 $0 \in \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \partial^{\le} f_i(\bar{x}) + \mu \partial^{\le} g(\bar{x}), \mu_j g_j(\bar{x}) = 0$。

基金项目

国家自然科学基金(11771064)。

参考文献

[1] Mangasarian, O.L. (1965) Pseudo Functions. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, **3**, 23-32.

[2] Cottle, R.W. and Ferland, J.A. (1972) Matrix-Theoretic Criteria for the Quasi-Convexity and Pseudo-Convexity of Quadratic Functions. *Linear Algebra and Its Applications*, **5**, 123-136. https://doi.org/10.1016/0024-3795(72)90022-5

[3] Ferland, J.A. (1972) Mathematical Programming Problems with Quasi-Convex Objective Functions. *Mathematical Programming*, **3**, 296-301. https://doi.org/10.1007/BF01585002

[4] Greenberg, H.J. and Pierskalla, W.P. (1973) Quasi-Conjugate Functions and Surrogate Duality. *Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Operationelle*, **15**, 437-448.

[5] Plastria, F. (1985) Lower Subdifferentiable Functions and Their Minization by Cutting Planes. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **46**, 37-53. https://doi.org/10.1007/BF00938758

[6] Penot, J.P. (1998) Are Generalized Derivatives Useful for Generalized Convex Functions Generalized Convexity, Generalized Monotonicity: Recent Results. Springer, 3-59. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-3341-8_1

[7] Penot, J.P. (2000) What Is Quasiconvex Analysis. *Optimization*, **47**, 35-110. https://doi.org/10.1080/02331930008844469

[8] Nguyen, T.H.L and Penot, J.P. (2006) Optimality Conditions for Quasiconvex Programs. *SIAM Journal on Optimization*, **17**, 500-510. https://doi.org/10.1137/040621843

[9] Gao, Y., Yang, X.M. and Lee, H.W.J. (2010) Optimality Conditions for Approximate Solutions in Multiobjective Optimization Problems. *Journal of Inequalities and Applications*, **2010**, 620-928. https://doi.org/10.1155/2010/620928

[10] Suzuki, S. and Kuroiwa, D. (2011) Optimality Conditions and the Basic Constraint Qualification for Quasiconvex Programming. *Nonlinear Analysis*, **74**, 1279-1285. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.09.066

[11] Khanh, P.Q., Quyen, H.T. and Yao, J.C. (2011) Optimality Conditions under Relaxed Quasiconvexity Assumptions Using Star and Adjusted Subdifferentials. *European Journal of Operational Research*, **212**, 235-241. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2011.01.024

[12] 陈瑞婷, 徐智会, 高英. 拟凸多目标优化问题近似解的最优性条件[J]. 运筹学学报(已接收).

[13] Durea, M. (2010) Remark on Strict Efficiency in Scalar and Vector Optimization. *Journal of Global Optimization*, **47**, 13-27. https://doi.org/10.1007/s10898-009-9453-8

[14] 林锉云, 董家礼. 多目标最优化的方法和理论[M]. 长春: 吉林教育出版社, 1992..

[15] 谢静. 向量优化问题的最优性条件研究[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 重庆师范大学, 2018.