Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(3), 381-388
Published Online March 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.83043

Sufficient Conditions for Graphs to Be Maximally 3-Restricted Edge-Connected

Lei Zhang

School of Mathematics, Jinzhong University, Jinzhong Shanxi
Email: zhanglei84052501@163.com

Received: Feb. 8^{th}, 2019; accepted: Feb. 21^{st}, 2019; published: Feb. 28^{th}, 2019

Abstract

The k-restricted edge connectivity is an important index to measure the reliability of networks. For a connected network $G=(V,E)$, an edge set $S\subseteq E$ is a k-restricted edge cut if $G-S$ is disconnected and every component of $G-S$ has at least k vertices. The k-restricted edge connectivity of G, denoted by $\lambda_k(G)$, is defined as the cardinality of a minimum k-restricted edge cut. Let $\xi_k(G)=\min\{|[X,Y]|:|X|=k,\ G[X]\text{ is connected}\}$, where $Y=V\backslash X$. A connected network G is maximally k-restricted edge connected if $\lambda_k(G)=\xi_k(G)$. In this paper, some sufficient conditions are presented for networks to be maximally 3-restricted edge connected.

Keywords

Interconnection Networks, Maximally 3 Restricted Edge Connected Graphs, 3 Restricted Edge Connectivity, Girth

极大3限制边连通图的充分条件

张 磊

晋中学院数学学院，山西 晋中

文章引用: 张磊. 极大3限制边连通图的充分条件[J]. 应用数学进展, 2019, 8(3): 381-388.
DOI: 10.12677/aam.2019.83043

Email: zhanglei84052501@163.com

收稿日期：2019年2月8日；录用日期：2019年2月21日；发布日期：2019年2月28日

摘　要

k限制边连通度是度量网络可靠性的重要参数。设$G = (V, E)$是一个连通网络。称一个边集合$S \subseteq E$ 是一个k限制边割，如果$G - S$的每个连通分支至少有k个顶点。称G的所有k限制边割中所含边数最少的边割的基数为G的k限制边连通度，记为$\lambda_k(G)$。定义$\xi_k(G) = \min\{[X, Y]: |X| = k$，$G[X]$连通，$Y = V(G)\backslash X\}$。称网络$G$是极大$k$限制边连通的，如果$\lambda_k(G) = \xi_k(G)$。给出了网络是极大3限制边连通的一些充分条件。

关键词

互连网络，极大3限制边连通图，3限制边连通度，围长

1. 引言

本文所考虑的图都是无向简单图。本文中出现而未定义的概念和记号参见文 [1]。设$G = (V(G), E(G))$是一个连通图。若$e = uv$是G一条边，则称u与v相邻。设S为G中的一个边集，对于G中任意一点u，用$N(u)$表示在G中与u相邻的点的集合，用$d(u)$表示在G中与u 相邻的点的数目。假设U是$V(G)$的一个非空子集。以U为顶点集，以G中两个端点均在U中的所有的边的集合为边集所组成的子图称为G的由U导出的子图，记为$G[U]$；这时，也称$G[U]$为G的导出子图。导出子图$G[V(G)\backslash U]$记为$G - U$；它是从G中删去U 中的顶点以及与U中的顶点相关联的边所得到的子图。图G中的一条路是指一个有限非空序列$W = v_0e_1v_1e_2v_2 \cdots e_kv_k$，它的项交替地为顶点和边，使得对$1 \leq i \leq k$, $e_i = v_{i-1}v_i$，其中$v_0, v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}, v_k$互不相同。称$W$是从$v_0$ 到v_k的一条路，此时，若$v_0 = v_k$，则称W为G中的圈。W中边的数目称为W的长。长为k的路(或圈)称为k-路(或k-圈)。G的围长$g(G)$是指G中最短圈的长。若在G中顶点u和v是连通的，则u和v之间的距离$d(u, v)$是G中最短(u, v)-路的长。V_1, V_2是$V(G)$的非空子集，V_1, V_2之间的距离定义为$d(V_1, V_2) = \min\{d(u, v) : u \in V_1,\ v \in V_2\}$。称满足$d(V_1, V_2) = k$的点集对$V_1, V_2$是$k$-距离极大的，如果不存

在顶点子集V_1', V_2'满足$V_1 \subset V_1'$, $V_2 \subset V_2'$，使得$d(V_1', V_2') = k$。对G的两个非空顶点子集X与Y，用$[X, Y]$表示G中一端点在X中另一端点在Y中的所有边组成的集合，X是$V(G)$的非空子集，G的边割是指形为$[X, Y]$的$E(G)$的子集，其中$Y = V(G)\backslash X$。

多处理机的互连网络拓扑常以图为数学模型，用图的顶点(即节点) 代表处理机，用边来代表处理机之间的直接通信联系，因此网络拓扑的性能可以通过图的性能和参数来衡量。为系统设计或者选择网络拓扑时，一个基本的考虑是系统的可靠性，它对应图的连通性。但是用边连通度来研究系统的可靠性不够精确。在此背景下，1996年Fàbrega和Foil在文 [2] 中提出了k限制边连通度的概念。

定义1.1 设G是一个连通图，$S \subseteq E(G)$是G的一个边割. 如果$G - S$ 的每个连通分支至少有k个顶点，那么称S是G的一个k限制边割。

称G的所有k限制边割中所含边数最少的边割为G的λ_k-割，λ_k-割所含的边数称为G的k限制边连通度，记为$\lambda_k(G)$。当$k = 2$时，通常称k限制边连通度为限制边连通度，记为$\lambda'(G)$. 应该指出，不是所有图都存在k限制边割。若G存在k限制边割，则称G为λ_k-连通图。近年来，对于一般的正整数k, k 限制边连通度得到了广泛的研究，见文 [3–8]。从目前的研究结果来看，对于连通图G，人们相信$\lambda_k(G)$越大，G所对应的网络的可靠性就越好 [9–15]，因此人们希望图G的k限制边连通度尽可能地大。显然这需要$\lambda_k(G)$的一个上界。对正整数k，定义$\xi_k(G) = \min\{[X, \overline{X}]: |X| = k, G[X]$连通，$\overline{X} = V(G)\backslash X\}$。若$\lambda_k(G) = \xi_k(G)$，则称$G$是极大$k$限制边连通的。

2017年，张国珍 [16]给出了围长$g > 3$的极大限制边连通图的充分条件。

引理2.1 [16]设G是一个围长$g > 3$的连通图。则$\lambda_3(G) \le \xi_3(G)$。若对于$G$中任意的3-距离极大点集对$X, Y$, 在$G[X \cup Y]$中都有一条孤立边, 则$G$是极大限制边连通的。

本文将给出极大3限制边连通图与围长和4-距离极大点集对的关系。

2. 主要结论

在证明本文的主要结论之前，首先给出一些将要用到的结论。

引理2.1 [17]设G是λ_3-连通图。则$\lambda_3(G) \le \xi_3(G)$。

引理2.2 [18]令G是一个满足$\lambda_k(G) \le \xi_k(G)$ 的λ_k-连通图且$[X, Y]$是G的一个λ_k-割。若$G[X]$中存在一个k阶连通子图H满足

$$\sum_{v \in X\backslash V(H)} |N(v) \cap V(H)| \le \sum_{v \in X\backslash V(H)} |N(v) \cap Y|,$$

则G是极大k限制边连通的。

下面我们给出围长$g > 5$的极大3限制边连通图的充分条件。

定理2.1 设G是一个围长$g>5$的λ_3-连通图。若对于G中任意的3-距离极大点集对S,T，在$G[S\cup T]$中都有阶为3的连通分支，则G是极大3限制边连通的。

证明 用反证法。由引理2.1知，$\lambda_3(G)\le\xi_3(G)$。假设G不是极大3限制边连通的.则$\lambda_3(G)<\xi_3(G)$。设$[X,Y]$是G的λ_3-割。若$|X|=3$或$|Y|=3$, 则有$\xi_3(G)\le|[X,Y]|=\lambda_3(G)$，矛盾。故$|X|\ge 4$且$|Y|\ge 4$。设$X_1\subseteq X,Y_1\subseteq Y$是与$[X,Y]$中至少一条边相关联的点集。令$X_0=X\backslash X_1,Y_0=Y\backslash Y_1$。

断言 $X_0\neq\emptyset$且$Y_0\neq\emptyset$。

假设$X_0=\emptyset$, 则$X_1=X$, 即对任意的$u\in X$有$|N(u)\cap Y|\ge 1$。由于$|X|\ge 4$和$g>5$, 因此在$G[X]$中存在一个3阶连通子图H满足

$$\sum_{u\in X\backslash V(H)}|N(u)\cap V(H)|\le|X\backslash V(H)|\le\sum_{u\in X\backslash V(H)}|N(u)\cap Y|.$$

由引理2.2知，G是极大3限制边连通的，矛盾。

同理可得$Y_0\neq\emptyset$。断言证明完成。

由于$d(X_0,Y_0)\ge 3$，因此G中存在一个3-距离极大点集对S,T，使得$X_0\subseteq S$且$Y_0\subseteq T$。由题设知，在$G[S\cup T]$中存在阶为3的连通分支P。由于G的围长$g>5$，则P为一条2-路，记为$P=uvw$，且对于任意的$u\in V(G)\backslash V(P)$有

$$|N(u)\cap V(P)|\le 1. \tag{1}$$

由X,Y的对称性，下面考虑$|V(P)\cap X|\ge|V(P)\cap Y|$的情形。

情形1 $|V(P)\cap X|=3$。

注意到$X_0\subseteq S$。因为$P=uvw$是$G[S\cup T]$中的连通分支，所以对于$X_0\backslash V(P)$中任意一点x，都有

$$|N(x)\cap V(P)|=0=|N(x)\cap Y|”$$

结合(1)式，我们有

$$\sum_{x\in X\backslash V(P)}|N(x)\cap V(P)|\le|X\backslash V(P)|\le\sum_{x\in X\backslash V(P)}|N(x)\cap Y|.$$

由引理2.2知，G是极大3限制边连通的，矛盾。

情形2 $|V(P)\cap X|=2$。

因为$P=uvw$是$G[S\cup T]$中的连通分支，所以对于$(X_0\cup Y_0)\backslash V(P)$中任意一点$x$，都有$|N(x)\cap V(P)|=0$。此时，对于任意的$u'\in V(P)$，有$N(u')\backslash V(P)\subseteq X_1\cup Y_1$。

情形2.1 $|\{u,w\}\cap X|=1$。

不妨设$u\in X$, $w\in Y$。因为$|V(P)\cap X|=2$，所以$v\in X$。容易得知，$v\in X_1$。由于G的

围长$g > 5$，因此$(N(u) \cup N(v)) \cap X_1$中的点与$N(w) \cap Y_1$中的点不相邻，且有$N(u) \cap N(v) = \emptyset$, $N(u) \cap N(w) = \emptyset$, $N(v) \cap N(w) = \emptyset$。故

$$\begin{aligned}
\xi_3(G) &\le d(u) + d(v) + d(w) - 4 \\
&= |N(u) \cap (X_1 \cup Y_1) \backslash \{v\}| + |N(v) \cap (X_1 \cup Y_1) \backslash \{u, w\}| + |N(w) \cap (X_1 \cup Y_1) \backslash \{v\}| \\
&\le \sum_{x \in (N(u) \cap X_1) \backslash \{v\}} |N(x) \cap Y_1| + |N(u) \cap Y_1| + \sum_{x \in (N(v) \cap X_1) \backslash \{u\}} |N(x) \cap Y_1| + |(N(v) \cap Y_1) \backslash \{w\}| \\
&\quad + \sum_{x \in N(w) \cap Y_1} |N(x) \cap X_1| + |(N(w) \cap X_1) \backslash \{v\}| \\
&< \lambda_3(G) < \xi_3(G),
\end{aligned}$$

矛盾。

情形2.2 $|\{u, w\} \cap X| = 2$。

因为$|V(P) \cap X| = 2$，所以$v \in Y$。此时，$u, w \in X_1$。因为G的围长$g > 5$，所以$N(u) \cap N(w) \cap X_1 = \emptyset$ 且$(N(u) \cup N(w)) \cap X_1$中的点与$N(v) \cap Y_1$中的点不相邻。因此，

$$\begin{aligned}
\xi_3(G) &\le d(u) + d(v) + d(w) - 4 \\
&= |N(u) \cap (X_1 \cup Y_1) \backslash \{v\}| + |N(v) \cap (X_1 \cup Y_1) \backslash \{u, w\}| + |N(w) \cap (X_1 \cup Y_1) \backslash \{v\}| \\
&\le \sum_{x \in N(u) \cap X_1} |N(x) \cap Y_1| + |(N(u) \cap Y_1) \backslash \{v\}| + \sum_{x \in N(v) \cap Y_1} |N(x) \cap X_1| + |(N(v) \cap X_1) \backslash \{u, w\}| \\
&\quad + \sum_{x \in N(w) \cap X_1} |N(x) \cap Y_1| + |(N(w) \cap Y_1) \backslash \{v\}| \\
&< \lambda_3(G) < \xi_3(G),
\end{aligned}$$

矛盾。 □

设G是一个λ_3-连通图，$S = [X, Y]$是G的一个λ_3-割。设$X_1 \subseteq X, Y_1 \subseteq Y$是与$[X, Y]$中至少一条边相关联的点集。令$X_0 = X \backslash X_1, Y_0 = Y \backslash Y_1$。如果$G$中存在一个4-距离极大点集对$S, T$，使得$X_0 \subseteq S$且$Y_0 \subseteq T$，我们得到下面结论。

定理2.2 设G是一个围长$g > 4$的λ_3-连通图，$S = [X, Y]$是G的一个λ_3-割。若G中存在一个4-距离极大点集对S, T，使得$X_0 \subseteq S$且$Y_0 \subseteq T$，且在$G[S \cup T]$中存在阶为3的连通分支，则G是极大3限制边连通的。

证明 用反证法。由引理2.1知，$\lambda_3(G) \le \xi_3(G)$。假设$G$不是极大3限制边连通的.则$\lambda_3(G) < \xi_3(G)$。若$|X| = 3$或$|Y| = 3$, 则有$\xi_k(G) \le |[X, Y]| = \lambda_3(G)$，矛盾。故$|X| \ge 4$且$|Y| \ge 4$。设$P$为$G[S \cup T]$中阶为3的连通分支。由于围长$g > 4$，因此$P$为一条2路，记为$P = uvw$。

注意到$X_0 \subseteq S$且$Y_0 \subseteq T$。因为P为$G[S \cup T]$中的连通分支，所以对于任意的$x \in (X_0 \cup Y_0) \backslash V(P)$都有$|N(x) \cap V(P)| = 0$。此时，对于任意的$u' \in V(P)$，有$N(u') \backslash V(P) \subseteq X_1 \cup Y_1$。根据$X, Y$的对称性，下面考虑$|V(P) \cap X| \ge |V(P) \cap Y|$的情形。

情形1 $|V(P) \cap X| = 3$。

因为G的围长$g > 4$，所以对于任意$x \in (X_1 \cup Y_1) \backslash V(P)$有$|N(x) \cap V(P)| \leq 1$。注意到对于任意的$u' \in V(P)$，有$N(u') \backslash V(P) \subseteq X_1 \cup Y_1$。因此我们有

$$\sum_{x \in X \backslash V(P)} |N(x) \cap V(P)| = \sum_{x \in X_1 \backslash V(P)} |N(x) \cap V(P)| \leq |X_1 \backslash V(P)| \leq \sum_{x \in X \backslash V(P)} |N(x) \cap Y|.$$

由引理2.2知，G是极大3限制边连通的，矛盾。

情形2 $|V(P) \cap X| = 2$。

容易得知，$|\{u, w\} \cap X| = 1$或$|\{u, w\} \cap X| = 2$。

情形2.1 $|\{u, w\} \cap X| = 1$。

此时，$v \in X$。不妨设$u \in X$, $w \in Y$。因为S, T为4-距离极大点集对，所以$V(P) \subseteq S$或$V(P) \subseteq T$。如果$V(P) \subseteq S$, 那么$d(V(P), T) \geq 4$。故$d(\{w\}, Y_0) \geq 4$。又因为$G[Y]$连通和围长$g > 4$，所以在$G[Y]$中存在一条2-路$P_1 = ww_1w_2$使得$V(P_1) \subseteq Y_1$。由于$d(\{w\}, Y_0) \geq 4$，因此对于任意的$x \in Y_0$都有$|N(x) \cap V(P_1)| = 0$。因为$g > 4$，所以对任意的$u \in Y_1 \backslash V(P_1)$有$|N(u) \cap V(P_1)| \leq 1$。因此

$$\sum_{u \in Y \backslash V(P_1)} |N(u) \cap V(P_1)| \leq \sum_{u \in Y \backslash V(P_1)} |N(u) \cap X|.$$

由引理2.2知，G是极大3限制边连通的，矛盾。

如果$V(P) \subseteq T$, 那么$d(V(P), S) \geq 4$。故$d(\{u\}, X_0) \geq 4$。因为$G[X]$连通和围长$g > 4$，所以在$G[X]$中存在一条2-路$P_2 = zuv$使得$V(P_2) \subseteq X_1$。容易得知，对于任意的$x \in X_0$都有$|N(x) \cap V(P_2)| = 0$。因为$g > 4$，所以对任意的$u \in X_1 \backslash V(P_2)$有$|N(u) \cap V(P_2)| \leq 1$。因此

$$\sum_{u \in X \backslash V(P_2)} |N(u) \cap V(P_2)| \leq \sum_{u \in X \backslash V(P_2)} |N(u) \cap Y|.$$

由引理2.2知，G是极大3限制边连通的，矛盾。

情形2.2 $|\{u, w\} \cap X| = 2$。

此时，$v \in Y$。因为G的围长$g > 4$，所以$N(u) \cap N(w) = \emptyset$ 且$(N(u) \cup N(w)) \cap X_1$中的点与$N(v) \cap Y_1$中的点不相邻。注意到对于任意的$x \in (X_0 \cup Y_0) \backslash V(P)$都有$|N(x) \cap V(P)| = 0$。因此，

$$\begin{aligned}
\xi_3(G) &\leq d(u) + d(v) + d(w) - 4 \\
&= |N(u) \cap (X_1 \cup Y_1) \backslash \{v\}| + |N(v) \cap (X_1 \cup Y_1) \backslash \{u, w\}| + |N(w) \cap (X_1 \cup Y_1) \backslash \{v\}| \\
&\leq \sum_{x \in N(u) \cap X_1} |N(x) \cap Y_1| + |(N(u) \cap Y_1) \backslash \{v\}| + \sum_{x \in N(v) \cap Y_1} |N(x) \cap X_1| + |(N(v) \cap X_1) \backslash \{u, w\}| \\
&\quad + \sum_{x \in N(w) \cap X_1} |N(x) \cap Y_1| + |(N(w) \cap Y_1) \backslash \{v\}| \\
&< \lambda_3(G) < \xi_3(G),
\end{aligned}$$

矛盾。 □

基金项目

国家自然科学基金资助项目(61370001)，晋中学院博士基金资助项目(bsjj2016202)。

参考文献

[1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (2008) Graph Theory. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-84628-970-5

[2] Fàbrega, J. and Foil, M.A. (1996) On the Extraconnectivity of Graphs. *Discrete Mathematics*, **155**, 49-57.

[3] Wang, S.Y., Zhang, L. and Lin, S.W. (2012) A Neighborhood Condition for Graphs to Be Maximally k-Restricted Edge Connected. *Information Processing Letters*, **112**, 95-97. https://doi.org/10.1016/j.ipl.2011.10.012

[4] Guo, L.T., Yang, W.H. and Guo, X.F. (2011) On a Kind of Reliability Analysis of Networks. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 2711-2715. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.08.010

[5] Yuan, J. and Liu, A.X. (2016) Sufficient Conditions for Triangle-Free Graphs to Be Super k-Restricted Edge-Connected. *Information Processing Letters*, **116**, 163-167. https://doi.org/10.1016/j.ipl.2015.09.005

[6] Hong, W.-S. and Hsieh, S.-Y. (2013) Extra Edge Connectivity of Hypercube-Like Networks. *International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems*, **28**, 123-133. https://doi.org/10.1080/17445760.2011.650696

[7] Chang, N.-W., Tsai, C.-Y. and Hsieh, S.-Y. (2014) On 3-Extra Connectivity and 3-Extra Edge Connectivity of Folded Hypercubes. *IEEE Transactions on Computers*, **63**, 1594-1600. https://doi.org/10.1109/TC.2013.10

[8] Wang, S.Y. and Zhang, L. (2014) Sufficient Conditions for k-Restricted Edge Connected Graphs. *Theoretical Computer Science*, **577**, 66-75. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2014.08.018

[9] Abdol-Hossein, E. and Louis, H.S. (1988) On Computing a Conditional Edge-Connectivity of a Graph. *Information Processing Letters*, **27**, 195-199. https://doi.org/10.1016/0020-0190(88)90025-7

[10] Boesch, F.T. (1986) On Unreliability Polynomials and Graph Connectivity in Reliable Network Synthesis. *Journal of Graph Theory*, **10**, 339-352. https://doi.org/10.1002/jgt.3190100311

[11] Deng, H.Y., Chen, J., Li, Q.L., Li, R.H. and Gao, Q.J. (2004) On the Construction of Most Reliable Networks. *Discrete Applied Mathematics*, **140**, 19-33. https://doi.org/10.1016/j.dam.2003.06.003

[12] Balbuena, C., Marcote, X. and García-Vázquez, P. (2005) On Restricted Connectivities of Permutation Graphs. *Networks*, **45**, 113-118.
https://doi.org/10.1002/net.20056

[13] Meng, J.X. (2003) Optimally Super-Edge-Connected Transitive Graphs. *Discrete Mathematics*, **260**, 239-248.
https://doi.org/10.1016/S0012-365X(02)00675-1

[14] Fàbrega, J. and Foil, M.A. (1994) Extraconnectivity of Graphs with Large Girth. *Discrete Mathematics*, **127**, 163-170.
https://doi.org/10.1016/0012-365X(92)00475-7

[15] Zhang, Z. and Yuan, J.J. (2007) Degree Conditions for Restricted-Edge-Connectivity and Isoperimetric-Edge-Connectivity to Be Optimal. *Discrete Mathematics*, **307**, 293-298.
https://doi.org/10.1016/j.disc.2006.06.028

[16] 张国珍. 极大限制边连通网络的充分条件[J]. 计算机工程与应用, 2017, 53(8): 19-22.

[17] Li, Q.L. and Li, Q. (1998) Reliability Analysis of Circulant Graphs. *Networks*, **31**, 61-65.
https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0037(199803)31:2⟨61::AID-NET1⟩3.0.CO;2-H

[18] Wang, S.Y., Lin, S.W. and Li, C.F. (2009) Sufficient Conditions for Super k-Restricted Edge Connectivity in Graphs of Diameter 2. *Discrete Mathematics*, **309**, 908-919.
https://doi.org/10.1016/j.disc.2008.01.037