

Bezier Curve with Two Shape Parameters and Its Application in the Splicing of Different Axis Pipelines

Fang Wang¹, Genzhu Bai^{1,2}

¹Zhejiang Changzheng Vocational and Technical College, Hangzhou Zhejiang

²School of Mathematics, Inner Mongolia University for Nationalities, Tongliao Inner Mongolia

Email: 449079153@qq.com

Received: Apr. 2nd, 2019; accepted: Apr. 17th, 2019; published: Apr. 24th, 2019

Abstract

The two shape parameters α, β of cubic Bezier curves can adjust the shape of the curves near their specific control points. Using this property, we can smoothly blend two tubes with different radiuses and non-coplanar axes by first blending their axes and thus obtain the blending surface. This new method has both theoretical significance and application values.

Keywords

Shape Parameters, Bezier Curves, Axes, Tubes, Blending

带有两个形状参数的Bezier曲线及其在粗细不同轴线异面管道拼接中的应用

王芳¹, 白根柱^{1,2}

¹浙江长征职业技术学院, 浙江 杭州

²内蒙古民族大学数学学院, 内蒙古 通辽

Email: 449079153@qq.com

收稿日期: 2019年4月2日; 录用日期: 2019年4月17日; 发布日期: 2019年4月24日

摘要

本文借助于带有两个形状参数 α, β 的三次Bézier曲线能够调控特定控制顶点周围曲线的形状这一特性,

文章引用: 王芳, 白根柱. 带有两个形状参数的 Bezier 曲线及其在粗细不同轴线异面管道拼接中的应用[J]. 应用数学进展, 2019, 8(4): 697-702. DOI: 10.12677/aam.2019.84079

先构造光滑拼接两个半径不同的轴线异面圆管道的轴线, 再构造光滑拼接两个半径不同的圆管道的某两个母线, 得到了光滑拼接两个轴线异面粗细不同的两个圆管道, 得到了新的轴线异面粗细不同圆管道的拼接管道, 具有理论意义和应用价值。

关键词

形状参数, Bézier曲线, 轴线, 管道, 光滑拼接

Copyright © 2019 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

很多前人对电脑涉及几何造型方面或者几何设计方面的两类问题进行了广泛的研究, 发现曲面拼接问题在其当中的运用是非常的普遍。如 Warren 提出基于理想生成元的方法[1], Wallner 和 Hottmann [2]得到了二次曲面之间的有理拼接曲面, Groebner 基方法[3]和吴文俊提出的特征列方法[4]使得交换代数及代数几何中的许多结果变成可计算的。Hartmann [5]在构造了一个函数光滑拼接管道轴线的基础上, 光滑拼接了两个圆管道, 而在拼接粗细不同的管道拼接时, 对于轴线光滑度有更高的要求。在计算几何领域针对怎样光滑拼接轴线异面的管道这一基础难点问题, 到目前为止成功的研究成果相对来说甚少。雷娜 [6]把两个已知的圆管道(其轴线为彼此异面)分成两段式成功地完成了光滑的三次拼接, 其应用的方法是圆柱的辅助, 并且借助了吴文俊公式。白根柱利用伍铁如[7]提出的曲面通过截平面展开的标准表达式的方法研究了两个轴线异面柱面沿着垂直截面光滑拼接问题[8], 得到了三次拼接曲面存在的充分必要条件, 而且给出了三次曲面的光滑拼接存在时两个轴线异面的隐式代数曲面的系数所满足的条件。之后, 我们提出了基于轴线光滑拼接的轴线异面管道光滑拼接方法, 在文[9]中构造了以空间 Bézier 曲线为轴线的管道光滑拼接了两个轴线异面的管道, 称之为广义 Bézier 管道, 我们还可以构造以空间 Bézier 曲线为轴线的圆管道光滑拼接两个轴线异面的圆管道, 在文[10]中构造了以带有形状参数 α, β 的 Bézier 曲线为轴线的圆管道光滑拼接两个轴线异面的粗细相同的圆管道。本文进一步研究以带有形状参数 α, β 的 Bézier 曲线为轴线的圆管道光滑拼接两个轴线异面的粗细不相同的圆管道。

定义 1 [11]给定四个控制顶点 $V_i (i = 0, 1, 2, 3)$, 对任意 $s \in [0, 1]$, $\alpha, \beta \in [-2, 1]$, 构造一支三次 Bézier 曲线

$$r(s) = \sum_{i=0}^3 B_{3,i}(s) V_i$$

其中的基函数为如下一个三次多项式

$$\begin{cases} B_{3,0}(s) = (1 - \alpha s)(1 - s)^2, \\ B_{3,1}(s) = (2 + \alpha s)(1 - s)^2, \\ B_{3,2}(s) = (2 + \beta)s^2(1 - s), \\ B_{3,3}(s) = (1 - \beta + \beta s)s^2. \end{cases}$$

而 α, β 分别为形状参数。

由于(附加有 2 个形状参数的) Bézier 曲线可以调控少数控制点旁边的曲线的形状, 为了两个轴线异面且粗细不同的圆管道完成很好的光滑拼接, 来构造了此曲线为轴线的圆管道。

2. 构造基于轴线光滑拼接的轴线异面管道的光滑拼接管道

设

$$\Phi_1 : \begin{cases} x = x_1 + a_1 N_{11} \cos \varphi + a_1 B_{11} \sin \varphi, \\ y = y_1 + b_1 s + a_1 N_{12} \cos \varphi + a_1 B_{12} \sin \varphi, \\ z = a_1 N_{13} \cos \varphi + a_1 B_{13} \sin \varphi. \end{cases} \text{ 和 } \Phi_2 : \begin{cases} x = a_2 N_{21} \cos \varphi + a_2 B_{21} \sin \varphi, \\ y = y_2 + a_2 N_{22} \cos \varphi + a_2 B_{22} \sin \varphi, \\ z = z_2 + c_2 s + a_2 N_{23} \cos \varphi + a_2 B_{23} \sin \varphi. \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

是两个轴线异面的圆管道的参数表示, 其中 $a_i (i=1,2)$ 是两个轴线异面的粗细不同的圆管道的半径, $N_i = (N_{i1}, N_{i2}, N_{i3})$, $B_i = (B_{i1}, B_{i2}, B_{i3})$, $i=1,2$ 分别是 $s=1$ 和 $s=0$ 时的法矢和副法矢。

$$L_1 : \begin{cases} x = x_1 + 0 \cdot s, \\ y = y_1 + b_1 s, \\ z = 0 + 0 \cdot s, \end{cases} \text{ 和 } L_2 : \begin{cases} x = 0 + 0 \cdot s, \\ y = y_2 + b_2 \cdot s, \\ z = z_2 + c_2 s. \end{cases}$$

是两个圆管道的轴线, 分别位于 OXY 平面上和位于 OYZ 平面上与 Y 轴相交。

设 $V_0(x_0, y_0, 0), V_1(x_1, y_1, 0)$ 是 L_1 上不同的两个点, $V_2(0, y_2, 0), V_3(0, y_2, z_2)$ 是 L_2 上不同的两个点, 把 V_0, V_1, V_2, V_3 当作控制顶点可以构造由带有形状参数 α, β 的三次 Bézier 曲线与之对应的一个特征多边形。那么根据相应的定义, 得到一种三次空间 Bézier 曲线, 两个轴线异面的粗细不同的圆管道可以借助于此曲线来完成轴线的光滑拼接。其参数表示为

$$\begin{cases} x(s, \alpha, \beta) = \sum_{i=0}^3 B_{3,i}(s) x_i, \\ y(s, \alpha, \beta) = \sum_{i=0}^3 B_{3,i}(s) y_i, \\ z(s, \alpha, \beta) = \sum_{i=0}^3 B_{3,i}(s) z_i. \end{cases}$$

我们再构造光滑拼接两个轴线异面的粗细不同的圆管道的某一母线的带有形状参数 α, β 的如下一支三次空间 Bézier 曲线

$$\begin{cases} x'(s, \alpha, \beta) = \sum_{i=0}^3 B_{3,i}(s) x'_i, \\ y'(s, \alpha, \beta) = \sum_{i=0}^3 B_{3,i}(s) y'_i, \\ z'(s, \alpha, \beta) = \sum_{i=0}^3 B_{3,i}(s) z'_i. \end{cases}$$

其中 $V'_i(x'_i, y'_i, z'_i) (i=0,1,2,3)$ 是四个光滑拼接彼此轴线异面并且粗细不同圆管道母线的控制多边形的顶点。

于是, 我们得以构造一拼接管道, 使得有着异面轴线和不同半径的圆管道在里面完成拼接光滑。其参数表示为

$$p(s, \varphi) = \begin{cases} x(s, \alpha, \beta) + d(s) N_1(s) \cos \varphi + d(s) B_1(s) \sin \varphi, \\ y(s, \alpha, \beta) + d(s) N_2(s) \cos \varphi + d(s) B_2(s) \sin \varphi, \\ z(s, \alpha, \beta) + d(s) N_3(s) \cos \varphi + d(s) B_3(s) \sin \varphi. \end{cases} \quad s \in [0, 1], \varphi \in (0, \pi).$$

其中 $r(s) = r(s, \alpha, \beta)$ 是一支三次 Bézier 曲线, 其能光滑拼接两个轴线异面粗细不同的管道的轴线, 并且

带有 α, β 形状参数。而 $r'(s) = r'(s, \alpha, \beta, \gamma)$ 是另一支光滑拼接两个轴线异面而且不同粗细的圆管道的某一母线的带有形状参数 α, β 的三次 Bézier 曲线 $d(s) = \|r'(s) - r(s)\|$, $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ 表示欧几里得范数。

3. 拼接实例

例 1: 两个管道, 设轴线异面, 其参数表示为

$$\Phi_1 : \begin{cases} x = 5 + a_1 N_{11} \cos \varphi + a_1 B_{11} \sin \varphi, \\ y = -4s, \\ z = a_1 N_{13} \cos \varphi + a_1 B_{13} \sin \varphi. \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi] \text{ 和 } \Phi_2 : \begin{cases} x = a N_{21} \cos \varphi + a B_{21} \sin \varphi, \\ y = 6 + a N_{22} \cos \varphi + a B_{22} \sin \varphi, \varphi \in [0, 2\pi] \\ z = 5 + 5s \end{cases}$$

其中 $a_1 = 1, a_2 = 2$ 分别为两个轴线异面的粗细不同圆管道的半径, 在 $s = 1$ 和 $s = 0$ 时其法矢为 $N_i = (N_{i1}, N_{i2}, N_{i3}), i = 1, 2$, 其副法矢为 $B_i = (B_{i1}, B_{i2}, B_{i3}), i = 1, 2$ 。取 $V_2(0, 6, 0), V_3(0, 6, 5), V_0(5, -4, 0), V_1(5, 0, 0)$, 分别为带有两个形状参数 α, β 的 Bézier 曲线的四个控制顶点, 当 $\alpha = 1, \beta = 1$ 时, 两个异面轴线拼接光滑的参数表示为

$$\begin{cases} x(s, 1, 1) = 10s^3 - 15s^2 + 5, \\ y(s, 1, 1) = -8s^3 + 6s^2 + 12s - 4, \\ z(s, 1, 1) = 5s^3. \end{cases}$$

构造一支光滑拼接两个轴线相互异面、粗细不同的圆管道的某一母线的带形状参数 α, β 的三次空间 Bézier 曲线

$$\begin{cases} x'(s, 1, 1) = 8s^3 - 12s^2 + 4, \\ y'(s, 1, 1) = -4s^3 + 12s^2 - 4, \\ z'(s, 1, 1) = 5s^3. \end{cases}$$

其中 $V'_0(4, -4, 0), V'_1(4, 0, 0), V'_2(0, 4, 0), V'_3(0, 4, 5)$ 分别为带有形状参数 α 和 β 的粗细不同的管道光滑拼接某两个母线的三次 Bézier 曲线的四个控制顶点。则两个管道(轴线异面并且粗细不同)进行光滑拼接的拼接管道的参数表示为

$$\begin{cases} x(s, 1, 1, \varphi) = 10s^3 - 15s^2 + 5 + d(s)N_1 \cos \varphi + d(s)B_1 \sin \varphi, \\ y(s, 1, 1, \varphi) = -8s^3 + 6s^2 + 12s - 4 + d(s)N_2 \cos \varphi + d(s)B_2 \sin \varphi, \\ z(s, 1, 1, \varphi) = 5s^3 + d(s)N_3 \cos \varphi + d(s)B_3 \sin \varphi. \end{cases}$$

其中 $N(s) = (N_1(s), N_2(s), N_3(s))$ 和 $B(s) = (B_1(s), B_2(s), B_3(s))$ 分别为拼接管道在点 $s \in [0, 1]$ 处的法矢和副法矢, $d(s) = \|r'(s) - r(s)\|$, $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ 表示欧几里得范数。

其拼接效果图, 如图 1。

例 2: 有两个管道, 设轴线异面, 其参数表示为

$$\Phi_1 : \begin{cases} x = 5 + a_1 N_{11} \cos \varphi + a_1 B_{11} \sin \varphi, \\ y = -4s, \\ z = a_1 N_{13} \cos \varphi + a_1 B_{13} \sin \varphi. \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi] \text{ 和 } \Phi_2 : \begin{cases} x = a_2 N_{21} \cos \varphi + a_2 B_{21} \sin \varphi, \\ y = 4 - 2s + a_2 N_{22} \cos \varphi + a_2 B_{22} \sin \varphi, \varphi \in [0, 2\pi] \\ z = 5 + 5s + a_2 N_{23} \cos \varphi + a_2 B_{23} \sin \varphi. \end{cases}$$

其中 $a_1 = 1, a_2 = 2$ 轴线异面粗细不同圆管道的半径, 在 $s = 1$ 和 $s = 0$ 时, $N_i = (N_{i1}, N_{i2}, N_{i3}), i = 1, 2$ 是法矢, $B_i = (B_{i1}, B_{i2}, B_{i3}), i = 1, 2$ 是副法矢。而 Bézier 曲线(带有两个 α 和 β 形状参数)的四个控制顶点分别为

$V_0(5, -4, 0)$, $V_1(5, 0, 0)$, $V_2(0, 6, 0)$, $V_3(0, 4, 5)$, 当 $\alpha = 1, \beta = 1$ 时, 两个异面的轴线拼接光滑的参数表示为

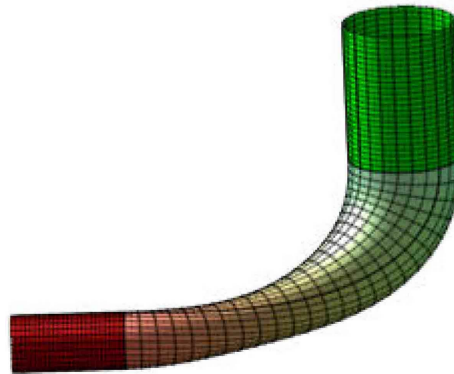


Figure 1. The blending of tubes with non-coplanar axes when the axes are vertical
图 1. 轴线异面管道的轴线异面角为垂直的情形

$$\begin{cases} x(s, 1, 1, \varphi) = 10s^3 - 15s^2 + 5, \\ y(s, 1, 1, \varphi) = -10s^3 + 6s^2 + 12s - 4, \\ z(s, 1, 1, \varphi) = 5s^3. \end{cases}$$

构造一支三次空间 Bézier 曲线(带形状参数 α 和 β 、能光滑拼接两个轴线相互异面、粗细不同的圆管道的某一母线)

$$\begin{cases} x'(s, 1, 1) = 8s^3 - 12s^2 + 4, \\ y'(s, 1, 1) = \left(-10 + \frac{12}{29}\sqrt{29} + \frac{2}{29}\sqrt{58}\right)s^3 + \left(6 - \frac{12}{29}\sqrt{29}\right)s^2 + 12s - 4, \\ z'(s, 1, 1) = \left(5 - \frac{20}{29}\sqrt{29}\right)s^3 + \frac{30}{29}\sqrt{29}s^2. \end{cases}$$

其中 $V_0(4, -4, 0), V_1(4, 0, 0)$, $V_2\left(0, 6 - \frac{4}{29}\sqrt{29}, \frac{10}{29}\sqrt{29}\right), V_3\left(0, 4 - \frac{2}{29}\sqrt{58}, 5 + \frac{10}{29}\right)$ 分别是光滑拼接轴线相互异面、粗细不同管道的某个母线的(带有两个形状参数 α, β 的) Bézier 曲线的四个控制顶点, 则两个(粗细不相同而且轴线相互异面)管道达到光滑地拼接, 其拼接管道的参数表示为

$$\begin{cases} x(s, 1, 1, \varphi) = 10s^3 - 15s^2 + 5 + d(s)N_1 \cos \varphi + d(s)B_1 \sin \varphi, \\ y(s, 1, 1, \varphi) = -10s^3 + 6s^2 + 12s - 4 + d(s)N_2 \cos \varphi + d(s)B_2 \sin \varphi, \\ z(s, 1, 1, \varphi) = 5s^3 + d(s)N_3 \cos \varphi + d(s)B_3 \sin \varphi. \end{cases}$$

则在点 $s \in [0, 1]$ 处 $N(s) = (N_1(s), N_2(s), N_3(s))$ 是拼接管道的法矢, 而 $B(s) = (B_1(s), B_2(s), B_3(s))$ 是拼接管道的副法矢, $d(s) = \|r'(s) - r(s)\|$, $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ 表示欧几里得范数。

其拼接效果图, 如图 2。

4. 结束语

本文借助于一种带有形状参数 α, β 的三次 Bézier 曲线, 利用它能够调控其控制顶点周围的曲线形

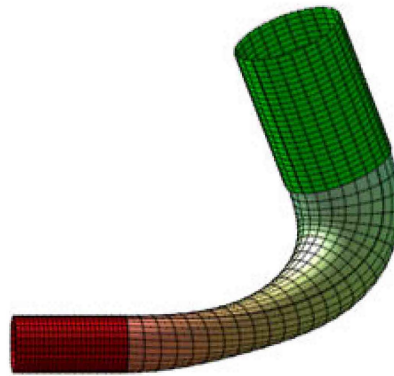


Figure 2. The blending of tubes with non-coplanar axes when the axes are non-vertical
图 2. 轴线异面管道的轴线异面角不垂直的情形

状的这一特性, 在轴线异面的两个管道的轴线能够光滑地拼接的基础上, 轴线异面半径不同的两个管道的拼接光滑得以实现, 进而得到了一个拼接管道使得轴线异面粗细不同的管道在其中能够光滑地拼接。在构造这个拼接管道实现光滑拼接过程中, 只是利用把带有形状参数 α 和 β 的三次 Bézier 曲线来当作轴线的这一种媒介管道, 进而构造出了一种光滑拼接两个轴线异面的管道。不同的管道完成光滑拼接可以借助于各种不同的媒介来构造出不同的光滑拼接管道。因此, 两个轴线异面的管道完成拼接光滑可以借助于更多的媒介(即空间曲线)来构造得以实现, 从而满足不同的用途。

基金项目

国家自然科学基金项目资助(11561052)。

参考文献

- [1] Warren, J. (1989) Blending Algebraic Surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, **8**, 263-278. <https://doi.org/10.1145/77269.77270>
- [2] Wallner, J. and Hottmann, H. (1997) Rational Blending Surfaces between Quadrics. *Computer Aided Geometric Design*, **14**, 407-419. [https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(96\)00037-4](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(96)00037-4)
- [3] Buchberger, B. (1985) An Algorithmic Method in Polynomial Ideal Theory. *Multidimensional Systems Theory*, 184-232.
- [4] 吴文俊, 王定康. CAGD 中的代数曲面拟合问题[J]. 数学的实践与认识, 1994(3): 26-31.
- [5] Hartmann, E. (2001) G^n -Continuous Connections between Normal Ringed Surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, **18**, 751-770. [https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(01\)00065-6](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(01)00065-6)
- [6] 雷娜, 崔丽, 伍铁如. 两个轴异面的管道拼接[J]. 吉林大学学报(理学版), 2002, 40(2): 138-140.
- [7] Wu, T.R. and Zhou, Y.S. (2000) On Blending of Several Quadratic Algebraic Surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, **17**, 759-766. [https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(00\)00023-6](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(00)00023-6)
- [8] 白根柱, 展丙军, 雷娜. 两个轴异面圆柱面的光滑拼接问题[J]. 吉林大学学报(理学版), 2007, 45(2): 216-218.
- [9] Bai, G.-Z., Wang, H. and Yin, Z.-J. (2014) Employing Generalized Bezier Tube to Smoothly Blending Tubes Whose Axes Are Non-Coplanar. *Applied Mechanics and Materials*, **513-517**, 23-1-2306. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.513-517.2301>
- [10] 乌仁高娃, 等. 带有形状参数的 Bézier 曲线及其在管道拼接中的应用[J]. 湖北民族学院学报(自然科学版), 2018, 4(12): 429-432.
- [11] 秦新强, 胡钢, 张素霞. 三次 Bézier 曲线的新扩张及其应用[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(2): 112-115.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：aam@hanspub.org