Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(4), 780-789
Published Online April 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.84088

Hans汉斯

Global Boundedness of Classical Solutions to a High-Dimensional Chemotaxis Model with Indirect Signal Production

Dongdong Zhang, Qiao Xin*, Jiangang Tang

College of Mathematics and Statistics, Yili University, Yining Xinjiang
Email: 767414852@qq.com, *xinqiaoylsy@163.com

Received: Apr. 6th, 2019; accepted: Apr. 21st, 2019; published: Apr. 28th, 2019

Abstract

This paper deals with the chemotaxis system of diffusion and aggregation of Mountain Pine Beetle with indirect attractant production and generalized logistic source

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u\chi(v)\nabla v) + f(u) & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = \Delta v - v + ug(u), & x \in \Omega, t > 0, \\ \tau w_t + w = u, & x \in \Omega, t > 0, \end{cases}$$

in a smoothly bounded domain with homogeneous Neumann boundary conditions and nonnegative initial values, the chemotactic sensitivity function satisfies $\chi(v) \le \chi_0 / (1+\beta v)^{\delta}$ $(\delta > 1)$, **the consumption function** $g(u) = h_0 / (1+hu)^{\upsilon}$ $(\upsilon \ge 0)$ **and the logistic source satisfies** $f(u) \le au - bu^2$ $(a, b > 0)$. **Moreover,** τ, β, χ_0, h_0 **are given positive parameter. Firstly, the energy estimation method and Gagliardo-Nirenberg inequality are used to establish the local prior estimate of** u **and** w**, and then Moser iteration is used. This problem admits a unique global classical solution that is uniformly in-time bounded.**

Keywords

Chemoaxis, Globl Existence, Boundedness, Indirect Signal Production

高维空间中具有间接信号产出生物趋化模型解的全局有界性

张冬冬，辛　巧*，汤建钢

伊犁师范大学数学与统计分院，新疆 伊宁

*通讯作者。

文章引用: 张冬冬, 辛巧, 汤建钢. 高维空间中具有间接信号产出生物趋化模型解的全局有界性[J]. 应用数学进展, 2019, 8(4): 780-789. DOI: 10.12677/aam.2019.84088

Email: 767414852@qq.com, *xinqiaoylsy@163.com

收稿日期：2019年4月6日；录用日期：2019年4月21日；发布日期：2019年4月28日

摘　要

考虑一个高维空间中描述具有间接信号产出的山地松甲虫扩散和聚集模型

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla\cdot\left(u\chi(v)\nabla v\right) + f(u) & x\in\Omega, t>0, \\ v_t = \Delta v - v + ug(u), & x\in\Omega, t>0, \\ \tau w_t + w = u, & x\in\Omega, t>0, \end{cases}$$

在齐次Neumann初值边界和非负初值条件下经典解的整体性态。假设$\Omega\in R^n\ (n\ge 1)$是一个光滑有界区域，$\chi(v)=\chi_0/(1+\beta v)^2$表示趋化敏感函数且满足$\chi(v)\le\chi_0/(1+\beta v)^\delta$（$\delta>1$），消耗函数为$g(u)=h_0/(1+hu)^\upsilon\ (\upsilon\ge 0)$，Logistic源满足$f(u)\le au-bu^2\ (a,b>0)$，$\tau,\beta,\chi_0,h_0$是正的参数。先利用能量估计方法及Gagliardo-Nirenberg不等式建立u和w的先验估计，再运用Moser迭代证明了此问题存在经典解且一致有界，不存在坍塌现象。

关键词

趋化性，全局存在性，有界性，间接信号产出

1. 引言

生物趋化性为生物种群在某种特定的生物环境中在化学信号物质的影响下做定向运动，关于生物趋化性的研究对生物学领域有很重要的意义。在现实生活中运用也很广泛，如生物除污、伤口的愈合等等。最早的生物趋化模型是由 Patlak 和 Keller-Segel 提出，最简单的 K-S 趋化模型[1]如下

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi\nabla\cdot(u\nabla v), & x\in\Omega, t>0, \\ v_t = \Delta v - v + u, & x\in\Omega, t>0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中$\Omega\in R^n$表示一个光滑有界区域，$u=u(x,t)$表示细胞的种群密度，$v=v(x,t)$表示化学物质的浓度，$\chi\in R$表示趋化敏感系数，$-\chi\nabla\cdot(u\nabla v)$表示趋化灵敏度，体现趋化模型最本质的一项。数学家最注重研究趋化模型解的性态是否具有坍塌行为，即模型解在有限时间内或无限时间内是否爆破，此类问题的研究已经有了许多成果。当$n=1$时，Yagi 等人证明了此模型解全局存在，不存在坍塌现象[2]。当$n=2$时，存在临界常数$m_c=4\pi/\chi$，Nagai 和 Senba 证明了如果初值满足$\|u_0\|_{L^1(\Omega)}<m_c$时，则此模型解存在且一致有界[3]，Horstmann 和 Wang 证明了如果初值满足$\|u_0\|_{L^1(\Omega)}>m_c$，则此模型解在有限时间内或无限时间内发生爆破[4]。进一步，Nagai 证明了满足$\|u_0\|_{L^1(\Omega)}=m_c$时，此模型经典解也在有限时间内发生爆破[5]。当$n\ge 3$时，Winkler 在文献[6]中证明了若对于任意的$\delta>0$，存在$\varepsilon>0$使得$\|u_0\|_{L^{n/2+\delta}(\Omega)}<\varepsilon$和$\|\nabla v_0\|_{L^{n+\delta}(\Omega)}<\varepsilon$成立，此模型解存在且一致有界，而当初值满足$\|u_0\|_{L^1(\Omega)}>0$时，文献[7]利用 Lyapunov 泛函证明了此模

型解会在有限时间内存在坍塌现象。

受文献[8] [9]工作的启发，本文研究具有间接信号产出的带有一般的趋化敏感函数的趋化模型，具体模型如下：

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla\cdot\left(u\chi(v)\nabla v\right) + f(u) & x\in\Omega, t>0, \\ v_t = \Delta v - v + ug(u), & x\in\Omega, t>0, \\ \tau w_t + w = u, & x\in\Omega, t>0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = 0, & x\in\partial\Omega, t>0, \\ u(x,0)=u_0(x), v(x,0)=v_0(x), w(x,0)=w_0(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $\Omega\in R^n$ 是一个光滑有界区域，$u=u(x,t)$ 表示飞行的山地松甲虫的种群密度，$w=w(x,t)$ 表示做窝的山地松甲虫的种群密度，$v=v(x,t)$ 表示化学信号的浓度。当 $n=2$ 且 $\chi(v)=1$ 时，王笑丹等人在文献[10]中证明了模型解全局存在且一致有界。当 $n\ge 2$ 且 $\chi(v)=1$，logistic 源项为 $u-u^{\alpha}\left(\alpha>n/2\right)$ 时，Li 和 Tao 证明了模型解全局存在且一致有界[11]。但是当 $\chi(v)=1, g(u)=1$，此模型的解的性态不明确。本文，主要考虑一般的趋化敏感函数情况，假设趋化敏感函数 $\chi(v)$ 和函数 $f(u), g(u)$ 满足

$$\chi(v)\le \chi_0/(1+\beta v)^{\delta}, \delta>1, \chi_0>0, \tag{1.3}$$

$$f(u)\le au-bu^2, a,b>0, f(0)=0, \tag{1.4}$$

$$g(u)=h_0/(1+hu)^{\upsilon}, h_0,h,\upsilon\ge 0. \tag{1.5}$$

与高维 K-S 模型解存在有限时间坍塌相比，模型(1.2)的解不会在有限时间内爆破。本文对于具有一般的趋化敏感函数的趋化模型(1.2)经典解的全局有界性结论如下：

定理 1：假设非负初值 (u_0,v_0,w_0) 满足 $u_0\in C^0(\bar\Omega)$、$v_0\in W^{1,q}(\bar\Omega)(q>n)$ 和 $w_0\in C^0(\bar\Omega)$，设 $\chi(v), f(u), g(u)$ 满足条件(1.3)~(1.5)，则生物趋化模型(1.2)有唯一、非负经典解且关于时间一致有界。

2. 预备知识

为了证明定理 1，先给出一些相关的引理。

引理 2.1：假设非负初值 (u_0,v_0,w_0) 满足 $u_0\in C^0(\bar\Omega)$、$v_0\in W^{1,q}(\bar\Omega)(q>n)$ 和 $w_0\in C^0(\bar\Omega)$。则存在 $T_{\max}\in[0,\infty)$ 和非负函数 (u,v,w) 满足

$$u\in C^0\left(\bar\Omega\times[0,T_{\max})\right)\cap C^{2,1}\left(\bar\Omega\times[0,T_{\max})\right),$$
$$v\in C^0\left(\bar\Omega\times[0,T_{\max})\right)\cap L^{\infty}_{loc}\left([0,T_{\max}),W^{1,q}(\Omega)\right)\cap C^{2,1}\left(\bar\Omega\times[0,T_{\max})\right),$$
$$w\in C^0\left(\bar\Omega\times[0,T_{\max})\right)\cap C^{2,1}\left(\bar\Omega\times[0,T_{\max})\right),$$

使得 (u,v,w) 是模型(1.2)在 $\bar\Omega\times[0,T_{\max})$ 上唯一的经典解。而且 $T_{\max}<+\infty$，则

$$\|u(x,t)\|_{L^{\infty}(\Omega)} + \|v(x,t)\|_{W^{1,q}(\Omega)} + \|w(x,t)\|_{L^{\infty}(\Omega)} \to\infty, t\to T_{\max}.$$

证明：模型(1.2)经典解的局部存在性可利用不动点定理得到，详见文献[12] [13] [14]。

引理 2.2：假设条件(1.3)~(1.5)成立，则存在常数 $M_0>0$，使得模型(1.2)的解 (u,v,w) 满足

$$\int_{\Omega} u(\cdot,t)\,\mathrm{d}x \le M_0, t\in(0,T_{\max}), \tag{2.1}$$

$$\int_{\Omega} w(\cdot,t)\,\mathrm{d}x \le M_1, t\in(0,T_{\max}), \tag{2.3}$$

证明：对于模型(1.2)的第一个方程两边在 Ω 上积分，容易得出(2.1)式。对于模型(2.2)的第三个方程

两边在 Ω 上积分，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}\tau w\mathrm{d}x+\int_{\Omega}w\mathrm{d}x=\int_{\Omega}u\mathrm{d}x,$$

那么，存在常数 $M_1>0$，解得

$$\int_{\Omega}w(\cdot,t)\mathrm{d}x\le M_1,t\in(0,T_{\max}).$$

接下来，引进一个有用的不等式，详见证明过程参考文献[3] [14]。

引理 2.3：假设 $\alpha^*=\begin{cases}\frac{2n}{n-2}, & n>2,\\ \infty, & n=1,2,\end{cases}$ 则对所有的 $l^*\in(2,\infty)$ 满足 $l^*\le\alpha^*$，$h\in(0,2)$ 和 $\alpha\in\left[h,l^*\right]$，则存在常数 $C_{GN}>0$ 使得

$$\|\psi\|_{L^{\alpha}(\Omega)}\le C_{GN}\left(\|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)}^{\lambda^*}\|\psi\|_{L^h(\Omega)}^{1-\lambda^*}+\|\psi\|_{L^h(\Omega)}\right),$$

其中 $\psi\in W^{1,2}(\Omega)$ 且

$$\lambda^*=\frac{\frac{n}{h}-\frac{n}{\alpha}}{1-\frac{n}{2}+\frac{n}{h}}.$$

3. 解的全局有界性

为了证明定理 1，需要先建立 $\|u(\cdot,t)\|_{L^k(\Omega)}$ 与 $\|w(\cdot,t)\|_{L^k(\Omega)}$ 的有界性，下面给出一些相关的引理及其证明。

引理 3.1：假设条件(1.3)~(1.5)成立，则存在常数 $M_2,M_3>0$，$k>1$，使得对所有的 $t\in(0,T_{\max})$ 有

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^k(\Omega)}\le M_2,t\in(0,T_{\max}),\tag{3.1}$$

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^k(\Omega)}\le M_3,t\in(0,T_{\max}),\tag{3.2}$$

证明：首先定义函数

$$\phi(s)=\exp\left(\left(1+\beta^*s\right)^{-r}\right),s>0.$$

设 $k>1$，$r>1$ 且

$$r\le\min\{k-1/8k,2\delta-2\},\tag{3.3}$$

和

$$r\le k\left(\frac{k-1}{eC_{GN}^2k^2M^{k(1-\lambda)}}-a\right),\tag{3.4}$$

以及

$$\beta^*>\chi_0\sqrt{2p(p-1)/r(r+1)},\tag{3.5}$$

通过直接计算，容易得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^k\phi(v)\mathrm{d}x \\
&=\int_\Omega u^{k-1}\phi(v)u_t\mathrm{d}x+\frac{1}{k}\int_\Omega u^k\phi'(v)v_t\mathrm{d}x \\
&=\int_\Omega u^{k-1}\phi(v)\Delta u\mathrm{d}x-\int_\Omega u^{k-1}\phi(v)\nabla\cdot(u\chi(v)\nabla v)\mathrm{d}x+\int_\Omega u^{k-1}\phi(v)f(u)\mathrm{d}x \\
&\quad+\frac{1}{k}\int_\Omega u^k\phi'(v)\Delta v\mathrm{d}x-\frac{1}{k}\int_\Omega u^k v\phi'(v)\mathrm{d}x+\frac{1}{k}\int_\Omega u^k\phi'(v)g(u)\mathrm{d}x \\
&=-(k-1)\int_\Omega u^{k-2}\phi(v)|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega u^{k-1}\phi'(v)\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x \\
&\quad+(k-1)\int_\Omega u^{k-1}\phi(v)\chi(v)\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x+\int_\Omega u^p\phi'(v)\chi(v)|\nabla v|^2\mathrm{d}x \\
&\quad+\frac{1}{k}\int_\Omega u^k\phi(v)f(u)\mathrm{d}x-\int_\Omega u^{k-1}\phi'(v)\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x-\frac{1}{k}\int_\Omega u^k\phi''(v)|\nabla v|^2\mathrm{d}x \\
&\quad-\frac{1}{k}\int_\Omega u^k v\phi'(v)\mathrm{d}x+\frac{1}{k}\int_\Omega u^k\phi'(v)g(u)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

因为 $f(s)\le as-bs^2$， $g(s)\ge 0$ 和 $\chi(s)\ge 0$ 以及 $\phi'(s)\le 0, s\ge 0$。那么可以得出

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^k\phi(v)\mathrm{d}x+(k-1)\int_\Omega u^{k-2}\phi(v)|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{k}\int_\Omega u^k\phi''(v)|\nabla v|^2\mathrm{d}x \\
&\le-2\int_\Omega u^{k-1}\phi'(v)\nabla u\cdot\nabla vdx+(k-1)\int_\Omega u^{k-1}\phi(v)\chi(v)\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x \\
&\quad-\frac{1}{k}\int_\Omega u^k v\phi'(v)\mathrm{d}x+a\int_\Omega u^k\phi(v)\mathrm{d}x,
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

其中

$$
-\frac{1}{k}\int_\Omega u^k v\phi'(v)\mathrm{d}x\le\frac{r}{k}\int_\Omega u^k\phi(v)\mathrm{d}x,
$$

此外，利用杨不等式估计和(1.3)式得出

$$
-2\int_\Omega u^{k-1}\phi'(v)\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\le\frac{k-1}{4}\int_\Omega u^{k-2}\phi(v)|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{4}{k-1}\int_\Omega u^k\frac{\phi'^2(v)}{\phi(v)}|\nabla v|^2\mathrm{d}x,
$$

和

$$
\begin{aligned}
&(k-1)\int_\Omega u^{k-1}\phi(v)\chi(v)\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x \\
&\le\frac{k-1}{4}\int_\Omega u^{k-2}\phi(v)|\nabla u|^2\mathrm{d}x+(k-1)\int_\Omega u^k\phi(v)\chi^2(v)|\nabla v|^2\mathrm{d}x \\
&\le\frac{k-1}{4}\int_\Omega u^{k-2}\phi(v)|\nabla u|^2\mathrm{d}x+(k-1)\chi_0^2\int_\Omega u^k(1+\beta v)^{-2\delta}\phi(v)|\nabla v|^2\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

那么，(3.6)式可以写成

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^k\phi(v)\mathrm{d}x+\frac{k-1}{2}\int_\Omega u^{k-2}\phi(v)|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{k}\int_\Omega u^k\phi''(v)|\nabla v|^2\mathrm{d}x \\
&\le\frac{4}{k-1}\int_\Omega u^k\frac{\phi'^2(v)}{\phi(v)}|\nabla v|^2\mathrm{d}x+(k-1)\chi_0^2\int_\Omega u^k(1+\beta v)^{-2\delta}\phi(v)|\nabla v|^2\mathrm{d}x \\
&\quad+\left(\frac{r}{k}+a\right)\int_\Omega u^p\phi(v)\mathrm{d}x,
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

根据题意，接下来处理(3.7)式中不等式右端的前两项，我们计算

$$Z_1(s):=\frac{4}{k-1}\frac{\phi'^2(s)}{\phi(s)}=\frac{4}{k-1}\cdot\left(\beta^*\right)^2 r^2\left(1+\beta^* s\right)^{-2r-2}\mathrm{e}^{\left(1+\beta^* s\right)^{-r}},$$

$$Z_2(s):=(k-1)\chi_0^2(1+\beta s)^{-2\delta}\phi(s)=(k-1)\chi_0^2(1+\beta s)^{-2\delta}\mathrm{e}^{\left(1+\beta^* s\right)^{-r}}$$

和

$$Z_3(s):=\frac{1}{k}\phi''(s)=\frac{1}{k}\cdot\left(\beta^*\right)^2 r(r+1)\left(1+\beta^* s\right)^{-r-2}\mathrm{e}^{\left(1+\beta^* s\right)^{-r}}+\frac{1}{k}\cdot\left(\beta^*\right)^2 r^2\left(1+\beta^* s\right)^{-2r-2}\mathrm{e}^{\left(1+\beta^* s\right)^{-r}},$$

那么有

$$\begin{aligned}\frac{Z_1(s)}{\frac{1}{2}Z_3(s)}&\le\frac{\frac{4}{k-1}\cdot\left(\beta^*\right)^2 r^2\left(1+\beta^* s\right)^{-2r-2}\mathrm{e}^{\left(1+\beta^* s\right)^{-r}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}\cdot\left(\beta^*\right)^2 r(r+1)\left(1+\beta^* s\right)^{-r-2}\mathrm{e}^{\left(1+\beta^* s\right)^{-r}}}\\&=\frac{8kr}{(k-1)(r-1)}\cdot\left(1+\beta^* s\right)^{-r}\le\frac{8kr}{k-1}\le 1,\end{aligned}$$

根据(3.3)式，可知上式显然成立。

$$\begin{aligned}\frac{Z_2(s)}{\frac{1}{2}Z_3(s)}&\le\frac{(k-1)\chi_0^2(1+\beta s)^{-2\delta}\mathrm{e}^{\left(1+\beta^* s\right)^{-r}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}\cdot\left(\beta^*\right)^2 r(r+1)\left(1+\beta^* s\right)^{-r-2}\mathrm{e}^{\left(1+\beta^* s\right)^{-r}}}\\&=\frac{2k(k-1)\chi_0^2}{\left(\beta^*\right)^2 r(r+1)}\cdot(1+\beta s)^{-2\delta}\left(1+\beta^* s\right)^{r+2},\end{aligned}$$

定义函数 $\varphi(s):=(1+\beta s)^{-2\delta}\left(1+\beta^* s\right)^{r+2}, s\ge 0$ 。

$$\begin{aligned}\varphi'(s)&=(1+\beta s)^{-2\delta-1}\cdot\left(1+\beta^* s\right)^{r+1}\cdot\left\{-2k\beta\left(1+\beta^* s\right)+(r+2)(1+\beta s)\right\}\\&\le(1+\beta s)^{-2\delta-1}\cdot\left(1+\beta^* s\right)^{r+1}\cdot\left\{-(2\delta\beta-r-2)-\left[2\delta\beta\beta^*-(r+2)\beta\right]s\right\}\\&\le 0,\ s\ge 0,\end{aligned}$$

所以 $\varphi(s)\le\varphi(0)=1, s\ge 0$ 。

根据(3.5)式，有

$$\frac{Z_2(s)}{\frac{1}{2}Z_3(s)}\le\frac{2k(k-1)\chi_0^2}{\left(\beta^*\right)^2 r(r+1)}\le 1,\ s\ge 0,$$

则(3.7)式可改写为

$$\frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^k\phi(v)\mathrm{d}x+\frac{k-1}{2}\int_\Omega u^{k-2}\phi(v)|\nabla u|^2\mathrm{d}x\le\left(a+\frac{r}{k}\right)\int_\Omega u^k\phi(v)\mathrm{d}x,\ t\in(0,T_{\max}),$$

那么根据引理 2.3 不等式和 $\phi(s)\le e, s\ge 0$ 得

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^k\phi(v)\mathrm{d}x\le e\int_\Omega u^k\mathrm{d}x=e\left\|u^{\frac{k}{2}}\right\|_{L^2(\Omega)}^2&\le e\cdot C_{GN}\left\|u^{\frac{k}{2}}\right\|_{W^{1,2}(\Omega)}^{2h}\cdot\left\|u^{\frac{k}{2}}\right\|_{L^{\frac{2}{k}}(\Omega)}^{2(1-h)}\\&\le e\cdot c_{GN}\cdot\left(c\left(\frac{2}{k}\right)\right)^{2h}\left(\left\|\nabla u^{\frac{k}{2}}\right\|_{L^2(\Omega)}+\left\|u^{\frac{k}{2}}\right\|_{L^{\frac{2}{k}}(\Omega)}\right)^{2h}\cdot\left\|u^{\frac{k}{2}}\right\|_{L^{\frac{2}{k}}(\Omega)}^{2(1-h)},\end{aligned}$$

其中 $C_{GN}>0$ 和

$$h=\frac{\frac{2n}{k}-\frac{n}{2}}{\frac{2n}{k}+1-\frac{n}{2}}\in(0,1),$$

根据引理 2.2 的性质可得

$$\left\|u^{\frac{k}{2}}(\cdot,t)\right\|_{L^{\frac{2}{k}}(\Omega)}^{\frac{2}{k}}=\int_\Omega u(x,t)\,\mathrm{d}x,\ t\in(0,T_{\max}),$$

$$\int_\Omega u^k\phi(v)\,\mathrm{d}x\le c_1\left(\left\|\nabla u^{\frac{k}{2}}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+1\right)^h,\ c_1>0,$$

因为 $\phi(s)\ge 1, s\ge 0$，可知

$$\begin{aligned}\frac{k-1}{2}\int_\Omega u^{k-2}\phi(v)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x&\ge\frac{k-1}{2}\int_\Omega u^{k-2}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x=\frac{2(k-1)}{k^2}\int_\Omega\left|\nabla u^{\frac{k}{2}}\right|^2\mathrm{d}x\\&\ge\frac{2(k-1)}{k^2c_1^{\frac{1}{h}}}\left(\int_\Omega u^k\phi(v)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{h}}-\frac{2(k-1)}{k^2},\end{aligned}$$

那么可以得出

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^k\phi(v)\,\mathrm{d}x\\&\le-\frac{2(k-1)}{k^2c_1^{\frac{1}{h}}}\left(\int_\Omega u^k\phi(v)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{h}}+\frac{2(k-1)}{k^2}+\left(a+\frac{r}{k}\right)\int_\Omega u^k\phi(v)\,\mathrm{d}x,\ t\in(0,T_{\max}),\end{aligned}$$

容易解得这个常微分方程

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^k(\Omega)}\le M_2,\ t\in(0,T_{\max}),$$

下面证明(3.2)式，模型(1.2)中第三个方程同乘 w^{k-1} 再在 Ω 上积分得

$$\frac{\tau}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega w^k\,\mathrm{d}x+\int_\Omega w^k\,\mathrm{d}x=\int_\Omega uw^{k-1}\,\mathrm{d}x,$$

利用杨不等式可得

$$\int_\Omega uw^{k-1}\,\mathrm{d}x\le\frac{1}{4}\int_\Omega w^k\,\mathrm{d}x+C_k\int_\Omega u^k\,\mathrm{d}x,\ C_k>0,$$

那么存在常数 $M_3>0$，使得下式成立

$$\frac{\tau}{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega w^k\,\mathrm{d}x+\frac{3}{4}\int_\Omega w^k\,\mathrm{d}x\le M_3,$$

容易得出

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^k(\Omega)}\le M_3,\ t\in(0,T_{\max}),$$

4. 定理 1 的证明

由引理 2.1 可知，对于 $\tau\in(0,T_{\max})$，存在 $c(\tau)>0$ 可得

$$\|u(x,t)\|_{L^\infty(\Omega)}+\|v(x,t)\|_{L^\infty(\Omega)}+\|w(x,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\le c(\tau),t\in(\tau,T_{\max}),$$

根据热半群理论[14]，设 $\rho\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，$q>1$ 使得 $2\rho-\frac{n}{q}>1-\frac{n}{2p}$，容易得出

$$v(\cdot,t)=\mathrm{e}^{t(\Delta-1)}v_0+\int_0^t\mathrm{e}^{(t-s)(\Delta-1)}g(u(\cdot,t))\mathrm{d}s,t\in(0,T_{\max}),$$

由算子理论和引理 3.1，可以得到

$$\begin{aligned}\|v(\cdot,t)\|_{W^{1,2p}(\Omega)}&\le c\left\|(\Delta+1)^{\rho}v(\cdot,t)\right\|_{L^q(\Omega)}\\&\le ct^{-\rho}\mathrm{e}^{-\upsilon t}\|v_0\|_{L^q(\Omega)}+c\int_0^t(t-s)^{-\rho}\mathrm{e}^{-\upsilon(t-s)}\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\Omega)}\|g(u(\cdot,t))\|_{L^q(\Omega)}\mathrm{d}s\\&\le ct^{-\rho}+c\int_0^t(t-s)^{-\rho}\mathrm{e}^{-\upsilon(t-s)}\mathrm{d}s\le ct^{-\rho}+c\int_0^\infty\sigma^{-\rho}\mathrm{e}^{-\upsilon\sigma}\mathrm{d}\sigma\\&\le c\left(t^{-\rho}+1\right),t\in(0,T_{\max}),\end{aligned}$$

其中 c 为一个正的常数，那么存在常数 $M_4>0$，由嵌入定理可得

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\le M_4,t\in(0,T_{\max}).$$

对于任意的 $m\ge2$，通过模型(1.2)的第一个方程计算，容易得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^m\mathrm{d}x&=m\int_\Omega u^{m-1}u_t\mathrm{d}x\\&=m\int_\Omega u^{m-1}\Delta u\mathrm{d}x-m\int_\Omega u^{m-1}\nabla\cdot(u\chi(v)\nabla v)\mathrm{d}x+m\int_\Omega u^{m-1}f(u)\mathrm{d}x\\&=-m(m-1)\int_\Omega u^{m-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+m\int_\Omega u^{m-1}f(u)\mathrm{d}x+m(m-1)\int_\Omega u^{m-1}\chi(v)\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\\&\le\frac{-4(m-1)}{m}\int_\Omega\left|\nabla u^{\frac{m}{2}}\right|^2\mathrm{d}x+cm(m-1)\int_\Omega u^{m-1}|\nabla u|\mathrm{d}x+am\int_\Omega u^m\mathrm{d}x\\&\le\frac{-2(m-1)}{m}\int_\Omega\left|\nabla u^{\frac{m}{2}}\right|^2\mathrm{d}x+\left(\frac{c^2m(m-1)}{2}+am\right)\int_\Omega u^m\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中 $c>0$，那么有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^m\mathrm{d}x+m(m-1)\int_\Omega u^m\mathrm{d}x\le\frac{-2(m-1)}{m}\int_\Omega\left|\nabla u^{\frac{m}{2}}\right|^2\mathrm{d}x+c_1m(m-1)\int_\Omega u^m\mathrm{d}x,c_1>0,$$

其中

$$c_1m(m-1)\int_\Omega u^m\mathrm{d}x\le\frac{2(m-1)}{m}\int_\Omega\left|\nabla u^{\frac{m}{2}}\right|^2\mathrm{d}x+c_2m(m-1)\left(\int_\Omega u^{\frac{m}{2}}\mathrm{d}x\right)^2,c_2>0,$$

那么，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^m\mathrm{d}x+m(m-1)\int_\Omega u^m dx\le c_2m(m-1)\left(\int_\Omega u^{\frac{m}{2}}\mathrm{d}x\right)^2,c_2>0,$$

解得

$$\int_\Omega u^m \mathrm{d}x \le \int_\Omega u_0^m \mathrm{d}x + c_2 \sup_{0\le t\le T_{\max}} \left(\int_\Omega u^{\frac{m}{2}} \mathrm{d}x\right)^2, c_2 > 0,$$

定义函数

$$G(m) = \max\left\{\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \sup_{0\le t\le T_{\max}} \left(\int_\Omega u^m \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{m}}\right\} \le c_3^{\frac{1}{m}} G(m/2),$$

设 $m = 2^i, i = 1,2,\cdots$，那么可知

$$G(2^i) \le c_3^{2^{-i}} G(2^{i-1}) \le c_3^{2^{-i}+2^{-i+1}} G(2^{i-2}) \le \cdots \le c_3 G(1),$$

令 $i \to \infty$，可以得到

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le M_5, t \in (0, T_{\max}).$$

对于 $w(\cdot,t)$，根据 $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le M_5, t \in (0, T_{\max})$，解得

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \frac{1}{\tau}\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{1}{\tau}(s-t)} u(x,s)\mathrm{d}s + w_0 \mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}t} \\ &\le \frac{1}{\tau}\left\|\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{1}{\tau}(s-t)} u(x,s)\mathrm{d}s\right\|_{L^\infty(\Omega)} + \left\|w_0 \mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}t}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\le C_1 \cdot \tau\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}t}\right) + C_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}t} \\ &\le C_1 \cdot \tau + C_2 := M_6, t \in (0, T_{\max}), \end{aligned}$$

即

$$\|w(x,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le M_6, t \in (0, T_{\max}).$$

那么可以得到

$$\|u(x,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(x,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|w(x,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le C, t \in (\tau, T_{\max}).$$

5. 结论

综上所述，证明了高维空间中具有间接信号产出生物趋化模型解的全局有界性，但模型(1.2)有数值模拟等问题仍可继续研究。

基金项目

伊犁师范学院研究生科研创新项目《一类生物趋化模型解的存在性和渐近性》(YLSF2017031)；自治区青年科技创新人才培养项目“偏微分方程理论及其在图像处理中的应用”(2017Q081)。

参考文献

[1] Keller, E.F. and Sege, L.A. (1970) Initiation of Slime Mold Aggregation Viewed as an Instability. *Journal of Theoretical Biology*, **26**, 399-415. https://doi.org/10.1016/0022-5193(70)90092-5

[2] Osaki, K. and Yagi, A. (2001) Finite Dimensional Attractors for One-Dimensional Keller-Segel Equations. *Funkcialaj Ekvacioj*, **44**, 441-469.

[3] Nagai, T., Senba, T. and Yoshida, K. (1997) Application of the Trudinger-Moser Inequality to a Parabolic System of Chemotaxis. *Funkcialaj Ekvacioj*, **40**, 411-433.

[4] Horstmann, D. and Wang, G. (2001) Blow-Up in a Chemotaxis Model without Symmetry Assumptions. *European Journal of Applied Mathematics*, **12**, 159-177. https://doi.org/10.1017/S0956792501004363

[5] Nagai, T. (2001) Blow up of Nonradial Solutions to Parabolic-Elliptic Systems Modeling Chemotaxis in Two-Dimensional Domains. *Journal of Inequalities and Applications*, **6**, 37-55. https://doi.org/10.1155/S1025583401000042

[6] Tao, Y.S. and Winkler, M. (2012) Boundedness in a Quasilinear Parabolic-Parabolic Keller-Segel System with Subcritical Sensitivity. *Journal of Differential Equations*, **252**, 692-715. https://doi.org/10.1155/S1025583401000042

[7] Winkler, M. (2013) Finite-Time Blow-Up in the Higher-Dimensional Parabolic-Parabolic Keller-Segel System. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **100**, 748-767. https://doi.org/10.1016/j.matpur.2013.01.020

[8] Winkler, M. (2010) Absence of Collapse in a Parabolic Chemotaxis System with Signal-Dependent Sensitivity. *Mathematische Narchrichten*, **283**, 1664-1673.

[9] Hu, B. and Tao, Y.S. (2016) To the Exclusion of Blow-Up in a Three-Dimensional Chemotaxis-Growth Model with Indirect Attractant Production. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **26**, 2111-2128. https://doi.org/10.1142/S0218202516400091

[10] 王笑丹, 陶有山. 具间接信号产出的二维趋向性模型古典解的整体存在性和有界性[J]. 东华大学学报(自然科学版), 2016, 42(6): 922-930.

[11] Li, H.Y. and Tao, Y.S. (2018) Boundedness in a Chemotaxis System with Indirect Signal Production and Generalized Logistic Source. *Applied Mathematics Letters*, **77**, 108-113. https://doi.org/10.1016/j.aml.2017.10.006

[12] Li, Y. (2015) Global Bounded Solutions and Their Asymptotic Properties under Small Initial Data Condition in a Two-Dimensional Chemotax Is System for Two Species. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **429**, 1291-1304. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.04.052

[13] Cho, Y.S. and Wang, Z.A. (2010) Prevention of Blow-Up by Fast Diffusion in Chemotaxis. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **362**, 553-564. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.08.012

[14] Delgado, M., Gayte, I., Morales-rodrigo, C. and Suarez, A. (2010) An Angiogenesis Model with Nonlinear Chemotactic Response and Flux at the Tumor Boundary. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **72**, 330-347. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.06.057