

Generalized Hermite Function Spectral-Collocation Method for KdV Equations

Bingbing Li, Tianjun Wang

College of Mathematics & Statistics, Henan University of Science & Technology, Luoyang Henan
Email: wangtianjun64@163.com

Received: Mar. 31st, 2019; accepted: Apr. 15th, 2019; published: Apr. 22nd, 2019

Abstract

The paper deals with the numerical solutions of initial value problem of KdV equation on unbounded interval that approximates the solution of the Kortewego-de Vries equation, in which Hermite-Gauss nodes are used to collocate nodes of spectral collocation method. Selecting appropriately the relaxation factor σ involved in the generalized Hermite functions approximation enables us to fit the asymptotic behaviors of exact solutions at infinity closely. Numerical results demonstrate its efficiency and high accuracy of this approach. Especially, it is much easier to deal with nonlinear equation.

Keywords

Kortewego-de Vries Equation, Initial Value Problem, Spectral Collocation Method of Hermite Functions, Hermite-Gauss Nodes

Kortewego-de Vries方程的Hermite函数谱配置方法

李冰冰, 王天军

河南科技大学数学与统计学院, 河南 洛阳
Email: wangtianjun64@163.com

收稿日期: 2019年3月31日; 录用日期: 2019年4月15日; 发布日期: 2019年4月22日

摘要

以Hermite-Gauss节点为配置点, 用带松弛因子的Hermite函数谱配置方法求数值解, 逼近无界区域上

的Kortewego-de Vries方程Cauchy问题的理论解, 给出算法格式和相应的数值结果, 表明所提算法格式的有效性和高精度。适当地选择松弛因子, 使得数值解更好地匹配理论解的渐进行为, 所给算法尤其适合于非线性问题。

关键词

Kortewego-de Vries方程, 初值问题, Hermite函数谱配置方法, Hermite-Gauss节点

Copyright © 2019 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

记 $R = \{x | -\infty < x < \infty\}$, $t > 0, u(x, t)$ 是实值函数。为方便, 记 $\frac{\partial}{\partial x}$ 为 ∂_x 。考虑 Kortewego-de Vries 方程初值问题[1] [2] [3]

$$\begin{cases} \partial_t u + \gamma u \partial_x u + \nu \partial_x^3 u - \mu \partial_x^5 u = 0, & x \in R, \quad t > 0, \\ u(x, t) \rightarrow 0, & |x| \rightarrow \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x \in R, \end{cases} \quad (1)$$

其中 γ, ν 和 μ 是常数。文献[4] [5]研究常微分方程的谱配置方法, 文献[6]给出问题(1)的有界区域上混合问题的广义 Jacobi 逼近, 文献[7]考虑了无界区域上三阶 KdV 方程 ($\gamma = 6, \nu = 1, \mu = 0$) 的 Chebyshev-Hermite 多项式时空谱配置方法, 文献[8]提出了半无界区域上 Fisher 方程的 Laguerre 拟谱方法, 文献[9]研究统计物理中无界区域上非线性 Fokker-Planck 方程的 Hermite 函数谱配点方法。考虑到问题(1)解的行波性态, 为更好地吻合理论解在无穷远处的渐进行为, 用含有因子 $e^{-(\sigma x)^2/2}$ 的插值函数逼近问题的理论解, 利用高阶微分矩阵和一阶微分矩阵之间的关系处理高阶微分项, 可以方便地构造非常简单的算法格式。

2. Lagrange 插值函数及其微分矩阵

Hermite 函数 $\hat{H}_n(y)$ 定义为

$$\hat{H}_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-y^2/2} H_n(y), n \geq 0, y \in R.$$

其中 $H_n(y)$ 表示 n 阶 Hermite 多项式。令 $y_j (0 \leq j \leq N)$ 是 $H_{N+1}(y) = 0$ 的根。以 y_j 为节点的 Hermite 函数谱配置方法的 Lagrange 插值基函数为[6] [10]

$$\phi_j(y) = \frac{e^{-y^2/2}}{e^{-y_j^2/2}} \frac{H_{N+1}(y)}{(y - y_j) H'_{N+1}(y_j)}, j = 0, 1, \dots, N,$$

对任意 $u(y) \in C(R)$, 其 Lagrange 插值函数为 $p_N(y) = \sum_{j=0}^N u(y_j) \phi_j(y), y \in R$ 。对 $p_N(y)$ 求 m 阶导数得,

$$p_N^{(m)}(y) = \sum_{j=0}^N u(y_j) \phi_j^{(m)}(y).$$

令

$$D^{(m)} = \left(\phi_j^{(m)}(y_k) \right)_{0 \leq k, j \leq N}, D := D^{(1)},$$

则由文献[6]中(3.68)和(7.93)

$$\phi_j^{(1)}(y_k) = \begin{cases} \frac{\hat{H}_N(y_k)}{(y_k - y_j)\hat{H}'_N(y_j)}, & k \neq j, \\ 0, & k = j. \end{cases} \quad (2)$$

$$D^{(m)} = D^m \quad (3)$$

对那些解随 $|x| \rightarrow \infty$ 快速(或慢速)衰减的问题, 用上述基函数不一定能得到高精度的数值误差结果。为了改进逼近精度, 需要引入带伸缩因子的插值逼近, 为此, 给出下面的 Hermite 函数:

$$H_n^\sigma(x) = \hat{H}_n(\sigma x).$$

相应的 Lagrange 插值基函数为:

$$\phi_j^\sigma(x) = \frac{e^{-(\sigma x)^2/2} H_{N+1}(\sigma x)}{e^{-(\sigma x_j)^2/2} (x - x_j) H'_{N+1}(\sigma x_j)}, j = 0, 1, \dots, N.$$

带松弛因子的微分矩阵记为

$$D_\sigma^{(m)} = \left(\left(\phi_j^\sigma(y_k) \right)^{(m)} \right)_{0 \leq k, j \leq N}, D_\sigma := D_\sigma^{(1)},$$

和(2)式类似有:

$$\left(\phi_j^\sigma(x_k) \right)^{(1)} = \begin{cases} \frac{H_N^\sigma(x_k)}{(x_k - x_j) H_N^\sigma(x_j)}, & k \neq j, \\ 0, & k = j. \end{cases}$$

由 $\phi_j^\sigma(x) = \phi_j(y)|_{y=\sigma x}$ 和(3)式知 m 阶微分矩阵:

$$D_\sigma^{(m)} = D_\sigma^m = \sigma^m D^m$$

3. Kortewego-de Vries 方程的 Hermite 函数谱配置方法

3.1. 三阶 Kortewego-de Vries 方程配置方法

式(1)中令 $\gamma = \nu = 1$ 和 $\mu = 0$ 可得三阶 Kortewego-de Vries 方程[1], 考虑初值问题:

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u + \partial_x^3 u = 0, & x \in R, \quad t > 0, \\ u(x, t) \rightarrow 0, & |x| \rightarrow \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x \in R, \end{cases} \quad (4)$$

用 $p_N^\sigma(x, t) = \sum_{j=0}^N u(x_j, t) \phi_j^\sigma(x)$, $x \in R$, 逼近式(4)的解 $u(x, t)$, 将其代入式(4), 得

$$\begin{cases} \partial_t p_N^\sigma(x_k, t) + p_N^\sigma(x_k, t) \partial_x p_N^\sigma(x_k, t) + \partial_x^3 p_N^\sigma(x_k, t) = 0, & k = 0, 1, \dots, N, t > 0, \\ p_N^\sigma(x_k, 0) = \varphi(x_k), & k = 0, 1, \dots, N. \end{cases} \quad (5)$$

式(5)等价于

$$\begin{cases} u'(x_0, t) = -\sum_{j=0}^N u(x_j, t) (\phi_j^\sigma(x_0))^{(3)} - u(x_0, t) \sum_{j=0}^N u(x_j, t) (\phi_j^\sigma(x_0))^{(1)}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ u'(x_N, t) = -\sum_{j=0}^N u(x_j, t) (\phi_j^\sigma(x_N))^{(3)} - u(x_N, t) \sum_{j=0}^N u(x_j, t) (\phi_j^\sigma(x_N))^{(1)}, \\ u(x_j, 0) = \varphi(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, N. \end{cases} \quad (6)$$

令 $X(t) = (u(x_0, t), u(x_1, t), \dots, u(x_N, t))^T$, $X_0 = (\varphi(x_0), \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_N))^T$, 式(6)的矩阵形式为

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = -\sigma^3 D^3 X(t) - \sigma A(t)DX(t) \quad t > 0 \\ X(0) = X_0. \end{cases} \quad (7)$$

这里矩阵 $A(t) = (a_{ij}(t))$, 为 $(N+1) \times (N+1)$ 矩阵, 其元素为

$$a_{ij}(t) = \begin{cases} u(x_j, t), & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad 0 \leq i, j \leq N$$

显然, $A(t)DX(t)$ 是非线性项。

3.2. 数值结果

用格式(7)求解式(4)。在时间方向用步长为 τ 的 Crank-Nicolson 格式离散式(7), 得

$$\begin{cases} \left(I + \frac{1}{2} \tau \sigma^3 D \right) X(t+\tau) = \left(I - \frac{1}{2} \tau \sigma^3 D^3 \right) X(t) - \frac{1}{2} \tau \sigma (A(t+\tau)DX(t+\tau) + A(t)DX(t)), \\ t = 0, \tau, 2\tau, \dots, T - \tau, \\ X(0) = X_0. \end{cases} \quad (8)$$

由于式(7)式是关于 $X(t)$ 的非线性方程(或关于其分量的非线性方程组), 实际计算时应用解非线性方程(组)的 Newton 迭代方法, 需要计算迭代矩阵。为方便起见, 用如下的迭代方法: 在时间方向 $t+\tau$ 这一层进行迭代:

$$\begin{cases} \left(I + \frac{1}{2} \tau \sigma^3 D \right) X_{n+1}(t+\tau) = \left(I - \frac{1}{2} \tau \sigma^3 D^3 \right) X(t) - \frac{1}{2} \tau \sigma (A(t+\tau)DX_n(t+\tau) + A(t)DX(t)), \\ t = 0, \tau, 2\tau, \dots, T - \tau, \\ X(0) = X_0. \end{cases} \quad (9)$$

设定迭代终止条件: 对给定的 $\varepsilon > 0$, 如果 $|X_{n+1}(t+\tau) - X_n(t+\tau)| \leq \varepsilon$, 即得 $t+\tau$ 的值 $X(t+\tau)$ 。

三阶 Kortewego-de Vries 方程有精确孤波解[1] [6]:

$$u = 12\kappa \operatorname{sech}^2 \left(\kappa(x - 4\kappa^2 t - x_0) \right), \quad (10)$$

其中 κ 和 x_0 是给定的参数。

用 L^∞ -范数

$$E_N = \max_{0 \leq j \leq N} |u(x_j, t) - P_N^\sigma(x_j, t)|$$

度量数值误差。图 1 给出 $t=1$ 和不同 τ , 数值解和理论解的误差 E_N 的常用对数 $\log_{10} E_N$ 随 $\log_{10} N$ 的关系。

可以看出, 数值误差随 N 的增加及 τ 的减小而快速衰减, 空间方向达到谱精度; 图 2 给出 $t=1$ 和 $t=50$ 误差, 可以看出对较大的 t 所提算法格式仍然有效。

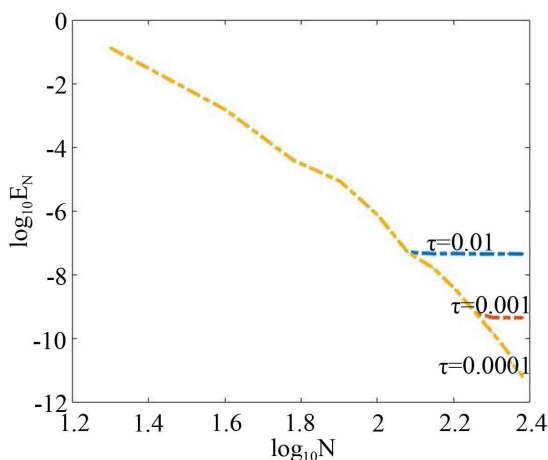


Figure 1. $\kappa = 0.3, \sigma = 0.3$

图 1. $\kappa = 0.3, \sigma = 0.3$

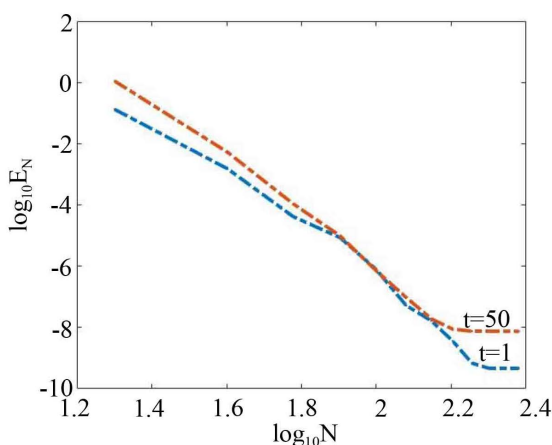


Figure 2. $\kappa = 0.3, \sigma = 0.3, \tau = 0.001$

图 2. $\kappa = 0.3, \sigma = 0.3, \tau = 0.001$

3.3. 五阶 Kortewego-de Vries 方程配置方法

用 $p_N^\sigma(x, t) = \sum_{m=0}^N u(x_j, t) \phi_j^\sigma(x)$, $x \in R$, 逼近式(1)的解, 将其代入式(1), 得

$$\begin{cases} \partial_t p_N^\sigma(x_k, t) + \gamma p_N^\sigma(x_k, t) \partial_x p_N^\sigma(x_k, t) + \nu \partial_x^3 p_N^\sigma(x_k, t) - \mu \partial_x^5 p_N^\sigma(x_k, t) = 0, & k = 0, 1, \dots, N, t > 0, \\ p_N^\sigma(x_k, 0) = \varphi(x_k) & k = 0, 1, \dots, N. \end{cases} \quad (11)$$

和式(7)相似, 式(11)的矩阵形式为

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = (\mu \sigma^5 D^5 - \nu \sigma^3 D^3) X(t) - \gamma \sigma A(t) DX(t), & t > 0 \\ X(0) = X_0. \end{cases} \quad (12)$$

4. 数值结果

用格式(12)求解式(1)。在时间方向用步长为 τ 的 Crank-Nicolson 格式离散式(12), 得

$$\left\{ \begin{aligned} \left(I - \frac{1}{2}\tau(\mu\sigma^5 D^5 - \nu\sigma^3 D^3) \right) X(t+\tau) &= \left(I + \frac{1}{2}\tau(\mu\sigma^5 D^5 - \nu\sigma^3 D^3) \right) X(t) \\ &\quad - \frac{1}{2}\tau\gamma\sigma(A(t+\tau)DX(t+\tau) + A(t)DX(t)), \\ t &= 0, \tau, 2\tau, \dots, T-\tau, \\ X(0) &= X_0. \end{aligned} \right. \quad (13)$$

由于式(13)是关于 $X(t)$ 的非线性方程(或关于其分量的非线性方程组), 用类似式(9)的迭代方法: 在时间方向 $t+\tau$ 这一层进行迭代:

$$\left\{ \begin{aligned} \left(I - \frac{1}{2}\tau(\mu\sigma^5 D^5 - \nu\sigma^3 D^3) \right) X_{n+1}(t+\tau) &= \left(I + \frac{1}{2}\tau(\mu\sigma^5 D^5 - \nu\sigma^3 D^3) \right) X_n(t) \\ &\quad - \frac{1}{2}\tau\gamma\sigma(A(t+\tau)DX_n(t+\tau) + A(t)DX_n(t)) \\ t &= 0, \tau, 2\tau, \dots, T-\tau, \\ X(0) &= X_0. \end{aligned} \right. \quad (14)$$

设定迭代终止条件: 对给定的 $\varepsilon > 0$, 如果 $|X_{n+1}(t+\tau) - X_n(t+\tau)| \leq \varepsilon$, 即得 $t+\tau$ 的值 $X(t+\tau)$ 。式(1)有精确解[11]

$$u(x, t) = \eta_0 + A \operatorname{sech}^4(\kappa(x - ct - x_0)),$$

其中 x_0 和 η_0 是任意常数,

$$A = \frac{105\nu^2}{169\mu\gamma}, \kappa = \sqrt{\frac{\nu}{52\mu}}, c = \gamma\eta_0 + \frac{36\nu^2}{169\mu}.$$

用 $u(x, t)$ 作为测试函数, 用 E_N 度量数值误差。图 3 给出 $t=1$ 和不同的 τ 及 $\log_{10} E_N$ 随 $\log_{10} N$ 的变化关系。可以看出, 数值误差随 N 的增加及数值误差 τ 的减小而快速衰减, 空间方向达到谱精度; 图 4 给出 $t=1$ 和不同的伸缩因子 σ 数值误差 $\log_{10} E_N$ 随 $\log_{10} N$ 的变化关系, 可以发现对适当小的 σ 数值误差更小。但如何选取最佳伸缩因子是一个未解决的问题。

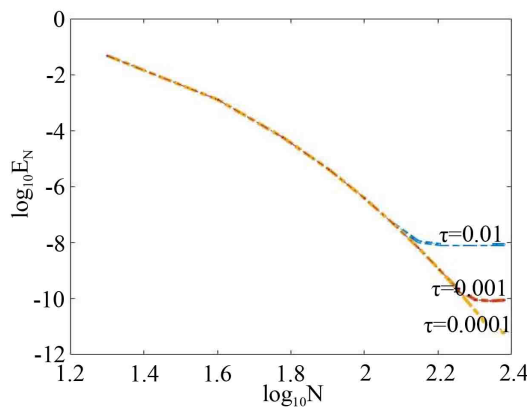


Figure 3. $\sigma = 0.365, \mu = \gamma = 1, \nu = 1.1, \eta_0 = 0$

图 3. $\sigma = 0.365, \mu = \gamma = 1, \nu = 1.1, \eta_0 = 0$

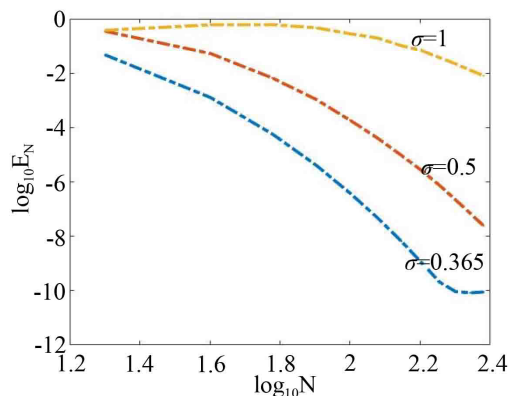


Figure 4. $\tau = 0.001, \mu = \gamma = 1, \nu = 1.1, \eta_0 = 0$

图 4. $\tau = 0.001, \mu = \gamma = 1, \nu = 1.1, \eta_0 = 0$

5. 结论

以带松弛因子的 Hermite 函数配置方法求问题(1) (三阶和五阶)的数值解, 逼近无界区域上的 KdV 方程的理论解。由于基函数含有因子 $e^{-(\sigma x)^2/2}$, 通过适当选取松弛因子 σ 可以使数值解能更好地吻合理论解在无穷远处的渐进行为, 所给算法尤其适合于非线性问题。

基金项目

国家自然科学基金项目(11371123); S201810464034。

参考文献

- [1] Korteweg, D. and de Vries, G. (1895) On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **39**, 422-443. <https://doi.org/10.1080/14786449508620739>
- [2] Kawahara, R. (1972) Oscillatory Solitary Waves in Dispersive Media. *Journal of the Physical Society of Japan*, **33**, 260-264. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.33.260>
- [3] Kichenassamy, S. and Olver, P. (1992) Existence and Nonexistence of Solitary Wave Solutions to Higher-Order Model Evolution Equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **23**, 1141-1166. <https://doi.org/10.1137/0523064>
- [4] Wang, Z.Q. and Guo, B.Y. (2012) Legendre-Gauss-Radau Collocation Method for Solving Initial Value Problems of First Order Ordinary Differential Equations. *Journal of Scientific Computing*, **52**, 226-255. <https://doi.org/10.1007/s10915-011-9538-7>
- [5] Wang, T.J. 一类线性奇异边值问题的谱配置方法[J]. 河南科技大学学报(自然科学版), 2013, 34(6): 75-78.
- [6] Shen, J., Tang, T. and Wang, L.L. (2011) *Spectral Method: Algorithms, Analysis and Applications*. Springer Verlag, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-71041-7>
- [7] 贾红丽, 王中庆. KdV 方程的 Chebyshev-Hermite 谱配置法[J]. 应用数学与计算数学学报, 2013, 27(1): 1-8.
- [8] 王天军. 半无界非线性热传导方程的 Laguerre 拟谱方法[J]. 应用数学与计算数学学报, 2013, 27(1): 9-15.
- [9] 王天军, 杨森. 非线性 Fokker-Planck 方程的 Hermite 谱配置方法[J]. 安徽工业大学学报, 2012, 29(4): 381-384.
- [10] Jie, S. and Tao, T. (2006) *Spectral and High-Order Methods with Applications*. Science Press, Beijing.
- [11] Parkes, E., Zhu, Z., Duffy, B. and Huang, H. (1998) Sech-Polynomial Travelling Solitary-Wave Solutions of Odd-Order Generalized KdV Equations. *Physics Letters A*, **248**, 219-224. [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(98\)00662-8](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(98)00662-8)

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：aam@hanspub.org