**Advances in Applied Mathematics** 应用数学进展, **2019, 8(4), 790-797**
Published Online April 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.84089

# Multiple Positive Solutions of Discrete Sturm-Liouville-Like *P*-Laplacian Boundary Value Problems

**Meng Zhang, Hongbing Jiang**

Department of Mathematics, University of Jinan Quancheng College, Penglai Shandong
Email: zhang123meng@163.com, 120904553@qq.com

Received: Apr. 6th, 2019; accepted: Apr. 21st, 2019; published: Apr. 28th, 2019

## Abstract

**By using the Leggett-Williams fixed point theorem, a class of discrete Sturm-Liouville-like *p*-Laplacian boundary value problem is studied and some sufficient conditions for the existence of at least three positive solutions for the boundary value problem are obtained.**

## Keywords

**Sturm-Liouville-Like Boundary Value Problem, Leggett-Williams Fixed Point Theorem, Positive Solution**

# 具*P*-Laplace算子Sturm-Liouville型边值问题多个正解的存在性

**张　萌，姜洪冰**

济南大学泉城学院大学数学教学部，山东　蓬莱
Email: zhang123meng@163.com, 120904553@qq.com

收稿日期：2019年4月6日；录用日期：2019年4月21日；发布日期：2019年4月28日

## 摘　要

利用**Leggett-Williams**不动点定理研究一类离散具***p*-Laplace**算子**Sturm-Liouville**型边值问题，给出问题至少存在三个正解的几个充分条件。

文章引用: 张萌, 姜洪冰. 具*P*-Laplace 算子 Sturm-Liouville 型边值问题多个正解的存在性[J]. 应用数学进展, 2019, 8(4): 790-797. DOI: 10.12677/aam.2019.84089

## 关键词

**Sturm-Liouville型边值问题，Leggett-Williams不动点定理，正解**



## 1. 引言

离散型边值问题正解的存在性因其具有实际应用背景而受到学者广泛关注和研究[1] [2] [3] [4] [5]。Zhang Meng，Sun Shurong [4]等人研究一类具 $p$-Laplace 算子离散 Sturm-Liouville 型边值问题

$$\Delta\left(\varphi_p\left(\Delta u(n)\right)\right)+h(n)f\left(u(n)\right)=0,\quad n\in\mathbb{N}[0,N], \tag{1}$$

$$\alpha u(0)-\beta\Delta u(\xi)=0,\quad \gamma u(N+2)+\sigma\Delta u(\eta)=0。 \tag{2}$$

其中，$\Delta$ 表示步差为 1 的向前差分算子，$\varphi_p(u)=|u|^{p-2}u$，$p>1$，$\mathbb{N}[0,N]=\{0,1,\cdots,N\}$，$\alpha>0$，$\beta>0$，$\gamma>0$，$\sigma>0$，$\xi$，$\eta$，$N$ 为正整数，满足

$$0<\xi\le\frac{\delta}{\gamma}<\max\left\{\frac{2\delta}{\gamma},N+2-\frac{\beta}{\alpha},\frac{N+2}{2}+\frac{\delta}{2\gamma}\right\}\le\eta<N。$$

记 $\left(\varphi_p\right)^{-1}=\varphi_q$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。函数 $h$，$f$ 满足下列条件：

($C_1$)：$f:[0,\infty)\to(0,\infty)$ 连续；

($C_2$)：$h$ 为定义在 $N[0,N+2]$ 上的非负函数。

他们借助 Guo-krasnosel' skii's 不动点定理，给出问题至少一个正解存在的若干充分条件。2012 年针对该问题，张萌[5]等人利用 Avery-Henderson 不动点定理给出至少存在两个正解的充分条件。

受到前面研究启发，我们将利用 Leggett-Williams 不动点定理继续研究问题(1)和(2)，给出至少三个正解的几个充分条件。

## 2. 引理

**引理 1**：若 $u(n)$ 是边值问题(1)和(2)的解，则存在唯一的 $n_0$ 使得 $\Delta u(n_0)\ge0$，$\Delta u(n_0+1)\le0$。

**证明**：因为 $u(n)$ 边值问题(1)和(2)的解，所以 $\Delta u(n)$ 在 $N[0,N+1]$ 上递减。若对所有的 $n\in N[0,N+1]$ 都有 $\Delta u(n)>0$，则由边值条件(2)可知 $u(0)>0$，$u(N+2)<0$，矛盾。

类似可证对 $n\in N[0,N+1]$，$\Delta u(n)<0$ 也不成立。因此，存在 $n_0\in N[0,N]$ 使得 $\Delta u(n_0)\ge0$，$\Delta u(n_0+1)\le0$。

唯一性若还存在 $n_1\in N[0,N]$ (不失一般性，不妨 $n_1+1<n_0$)满足 $\Delta u(n_1)\ge0$，$\Delta u(n_1+1)\le0$，则对 $n\in N[n_1+1,n_0]$ 有 $\Delta u(n)\equiv0$，从而 $\Delta\left(\varphi_p\left(\Delta u(n)\right)\right)=-h(n)f\left(u(n)\right)\equiv0$，$n\in N[n_1+1,n_0]$，与条件($C_2$)矛盾。

为研究方便，令

$$M=\max\left\{\sum_{i=0}^{\xi}\varphi_q\left(\sum_{j=i}^{\xi}h(j)f\left(u(j)\right)\right),\sum_{i=\eta}^{N+1}\varphi_q\left(\sum_{j=0}^{i-1}h(j)f\left(u(j)\right)\right)\right\};$$

$$m=\min\left\{\sum_{i=\xi+1}^{N+1}\varphi_q\left(\sum_{j=\xi}^{i-1}h(j)f(u(j))\right),\sum_{i=0}^{\eta-1}\varphi_q\left(\sum_{j=i}^{\eta-1}h(j)f(u(j))\right)\right\}$$

$$L_1=\frac{\beta}{\alpha}\varphi_q\left(\sum_{j=\xi}^{n_0}h(j)\right)+\sum_{i=0}^{n_0}\varphi_q\left(\sum_{j=i}^{n_0}h(j)\right)$$

$$L_2=\frac{\sigma}{\gamma}\varphi_q\left(\sum_{j=n_0}^{\eta-1}h(j)\right)+\sum_{i=n_0+1}^{N+1}\varphi_q\left(\sum_{j=n_0}^{i-1}h(j)\right)$$

**引理 2：** 若条件($C_1$)~($C_2$)成立，对任意的 $u\in[0,+\infty)$， $M\le m$ 则

$$u(n)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\alpha}\varphi_q\left(A_u-\sum_{j=0}^{\xi-1}h(j)f(u(j))\right)+\sum_{i=0}^{n-1}\varphi_q\left(A_u-\sum_{j=0}^{i-1}h(j)f(u(j))\right), & n\in N[0,n_0+1]\\ \dfrac{\delta}{\gamma}\varphi_q\left(\sum_{j=0}^{\eta-1}h(j)f(u(j))-A_u\right)+\sum_{i=0}^{N+1}\varphi_q\left(\sum_{j=0}^{i-1}h(j)f(u(j))-A_u\right), & n\in N[n_0+1,N+2]\end{cases}$$

为边值问题(1)和(2)的解，这里的 $A_u$ 是下列方程的唯一解

$$\frac{\beta}{\alpha}\varphi_q\left(y-\sum_{j=0}^{\xi-1}h(j)f(u(j))\right)=\frac{\sigma}{\gamma}\varphi_q\left(\sum_{j=0}^{\eta-1}h(j)f(u(j))-y\right)+\sum_{i=0}^{N+1}\varphi_q\left(\sum_{j=0}^{i-1}h(j)f(u(j))-y\right)$$

并且 $u(n)$ 在 $N[0,\xi+1]$ 递增， $N[\eta,N+2]$ 递减。

**证明：** 我们仅证明 $u(n)$ 在 $N[0,\xi+1]$ 递增， $N[\eta,N+2]$ 递减，其他可见参考文献[4] [5]。

若 $u(n)$ 在 $N[0,\xi+1]$ 非增，则存在 $n_0\in N[0,\xi-1]$ 使得 $\Delta u(n_0)\ge 0$， $\Delta u(n_0+1)\le 0$。从而 $u(0)=\dfrac{\beta}{\alpha}\Delta u(\xi)\le 0$， $u(N+2)=\dfrac{\sigma}{\gamma}\Delta u(\eta)\ge 0$。由 $u$ 的表达式，知

$$\begin{aligned}u(n_0+1)&=\frac{\beta}{\alpha}\varphi_q\left(A_u-\sum_{j=0}^{\xi-1}h(j)f(u(j))\right)+\sum_{i=0}^{n_0}\varphi_q\left(A_u-\sum_{j=0}^{i-1}h(j)f(u(j))\right)\\&<\sum_{i=0}^{\xi}\varphi_q\left(\sum_{j=0}^{\xi}h(j)f(u(j))-\sum_{j=0}^{i-1}h(j)f(u(j))\right)\\&=\sum_{i=0}^{\xi}\varphi_q\left(\sum_{j=i}^{\xi}h(j)f(u(j))\right)\le M\end{aligned},$$

另一方面

$$\begin{aligned}u(n_0+1)&=\frac{\sigma}{\gamma}\varphi_q\left(\sum_{j=0}^{\eta-1}h(j)f(u(j))-A_u\right)+\sum_{i=n_0+1}^{N+1}\varphi_q\left(\sum_{j=0}^{i-1}h(j)f(u(j))-A_u\right)\\&\ge\sum_{i=\xi}^{N+1}\varphi_q\left(\sum_{j=0}^{i-1}h(j)f(u(j))-\sum_{j=0}^{\xi-1}h(j)f(u(j))\right)\\&=\sum_{i=\xi+1}^{N+1}\varphi_q\left(\sum_{j=\xi}^{i-1}h(j)f(u(j))\right)\ge m\end{aligned}。$$

因此， $M>m$，矛盾，故 $u(n)$ 在 $N[0,\xi+1]$ 递增。

类似可证 $u(n)$ 在 $N[\eta,N+2]$ 递减。

设空间 $E=\{u:\mathbb{N}[0,N+2]\to R^+\}$，如果对所有的 $n\in N[0,N+2]$，都成立 $u_1(n)\le u_2(n)$，则 $u_1\le u_2$，定义范数 $\|u\|=\max_{n\in\mathbb{N}[0,N+2]}|u(n)|$，则 $E$ 为 Banach 空间。

在空间 $E$ 上定义锥 $P:\{u:u\in E,u(n)\geq 0,n\in\mathbb{N}[0,N+2],\Delta^2u(n)\leq 0,n\in\mathbb{N}[0,N],\exists n_0$使得

$$\Delta u(n)\geq 0,n\in\mathbb{N}[0,n_0],\Delta u(n)\leq 0,n\in\mathbb{N}[n_0+1,N+1]\}.$$

对 $u\in P$，易知 $\|u\|=u(n_0+1)$。

定义算子 $A:P\to E$

$$Au(n)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\alpha}\varphi_q\left(A_u-\sum_{j=0}^{\xi-1}h(j)f(u(j))\right)+\sum_{i=0}^{n-1}\varphi_q\left(A_u-\sum_{j=0}^{i-1}h(j)f(u(j))\right), & n\in N[0,n_0+1]\\ \dfrac{\delta}{\gamma}\varphi_q\left(\sum_{j=0}^{\eta-1}h(j)f(u(j))-A_u\right)+\sum_{i=0}^{N+1}\varphi_q\left(\sum_{j=0}^{i-1}h(j)f(u(j))-A_u\right), & n\in N[n_0+1,N+2]\end{cases}$$

对 $u\in P$，下面说明 $Au\in P$ 且 $\|Au\|=Au(n_0+1)$。

事实上

$$\Delta Au(n)=\begin{cases}\varphi_q\left(A_u-\sum_{j=0}^{n-1}h(j)f(u(j))\right)\geq 0,n\in N[0,n_0]\\ \varphi_q\left(A_u-\sum_{j=0}^{n-1}h(j)f(u(j))\right)\leq 0,n\in N[n_0,N+1]\end{cases},$$

$\Delta^2Au(n)=-h(n)f(u(n))\leq 0$，故易知 $A:P\to P$ 且全连续。

**引理 3：**[5]若非负函数 $h(i)$ 满足 $\sum_{i=0}^{N+2}h(i)<\infty$，则存在整数 $w\in\left(0,\frac{N+2}{2}\right)$，使得 $(w,N+2-w)\neq\varnothing$，且 $\sum_{i=w}^{N+2-w}h(i)<\infty$，更进一步 $B(n)=\varphi_q\left(\sum_{i=w-1}^{t-2}h(i)\right)+\varphi_q\left(\sum_{i=n}^{N+1-w}h(i)\right)$，$n\in[w,N+2-w]$ 有最小值 $l$。

**引理 4：**[5]若 $u\in p$，$w$ 为引理 3 中给出的参数，则对所有 $t\in[w,N+2-w]$，有 $u(n)\geq\frac{w}{N+2}\|u\|$。

**引理 5：**[6]对于 $0<a<b$ 及锥 $P$ 上的非负连续凹泛函 $\psi$，定义凸子集 $P_r$ 和 $P(\psi,a,b)$ 如下：$P_r=\{x\in P:\|x\|<r\}$，$P(\psi,a,b)=\{x\in P:a\leq\psi(x),\|x\|\leq b\}$。设 $A:\overline{P}_c\to\overline{P}_c$ 是全连续的，$\psi$ 是锥 $P$ 上的非负连续凹泛函，且 $\psi(x)\leq\|x\|$，$x\in\overline{P}_c$。如果存在常数满足 $0<a<b<d\leq c$ 使得

(i) $\{x\in P(\psi,a,b):\psi(x)>a\}\neq\varnothing$ 且 $\psi(Ax)>a$，$x\in P(\psi,a,b)$；

(ii) $\|Ax\|<d$，$\|x\|\leq d$；

(iii) 对于 $x\in P(\psi,a,c)$ 且 $\|Ax\|>b$，有 $\psi(Ax)>a$。

则 $A$ 至少有三个不动点 $x_1$，$x_2$ 与 $x_3$，且满足

$$\|x_1\|<d,\quad a<\psi(x_2),\quad \|x_3\|>d \text{ 和 } \psi(x_3)<a。$$

## 3. 主要结果

定义非负连续凹泛函 $\phi:P\to[0,\infty)$

$$\phi(u)=\frac{1}{2}(u(w)+u(N+2-w)),\quad u\in P,$$

则对 $u\in P$，有 $\phi(u)\leq\|u\|$。

**定理 1：**假设存在常数 $0<a'<\frac{w}{N+2}b'<b'<\frac{N+2}{w}b'\leq d'$，使得下列条件成立

(H₁)：$f(u)<\varphi_p\left(\frac{a'}{L_i}\right)$，$i=1,2$，$0\le u\le a'$；

(H₂)：存在常数 $e'>d'$，使得 $f(u)<\varphi_p\left(\frac{e'}{L_i}\right)$，$i=1,2$，$0\le u\le e'$；

(H₃)：$f(u)>\varphi_p\left(\frac{2b'}{wl}\right)$，$\frac{w}{N+2}b'\le u\le d'$；

则边值问题(1)和(2)至少存在三个正解 $u_1$，$u_2$，$u_3$ 满足 $0\le\|u_1\|<a'$，$\phi(u_2)>b'$，$\|u_3\|>a'$，$\phi(u_3)<b'$。

**证明：** 由算子 $A$ 的定义及性质，只需证明算子 $A$ 满足引理[6]条件。

首先，若 $\|u\|<a'$，则 $\|Au\|<a'$。事实上，若 $u\in\overline{P_{a'}}$，则由(H₁)知，

$$\Delta Au(n)=\begin{cases}\varphi_q\left(A_u-\sum_{j=0}^{n-1}h(j)f(u(j))\right)\ge 0, n\in N[0,n_0]\\ \varphi_q\left(A_u-\sum_{j=0}^{n-1}h(j)f(u(j))\right)\le 0, n\in N[n_0,N+1]\end{cases}\quad \|Au\|=Au(n_0+1)$$

$$\begin{aligned}&=\frac{\beta}{\alpha}\varphi_q\left(A_u-\sum_{j=0}^{\xi-1}h(j)f(u(j))\right)+\sum_{i=0}^{n_0}\varphi_q\left(A_u-\sum_{j=0}^{i-1}h(j)f(u(j))\right)\\&\le\frac{\beta}{\alpha}\varphi_q\left(\sum_{j=\xi}^{n_0}h(j)f(u(j))\right)+\sum_{i=0}^{n_0}\varphi_q\left(\sum_{j=i}^{n_0}h(j)f(u(j))\right)\\&\le\frac{a'}{L_1}\left[\frac{\beta}{\alpha}\varphi_q\left(\sum_{j=\xi}^{n_0}h(j)\right)+\sum_{i=0}^{n_0}\varphi_q\left(\sum_{j=i}^{n_0}h(j)\right)\right]=a'\end{aligned},$$

和

$$\begin{aligned}\|Au\|&=Au(n_0+1)\\&=\frac{\delta}{\gamma}\varphi_q\left(\sum_{j=0}^{\eta-1}h(j)f(u(j))-A_u\right)+\sum_{i=n_0+1}^{N+1}\varphi_q\left(\sum_{j=0}^{i-1}h(j)f(u(j))-A_u\right)\\&\le\frac{\delta}{\gamma}\varphi_q\left(\sum_{j=n_0}^{\eta-1}h(j)f(u(j))\right)+\sum_{i=n_0+1}^{N+1}\varphi_q\left(\sum_{j=n_0}^{i-1}h(j)f(u(j))\right)\\&\le\frac{a'}{L_2}\left[\frac{\beta}{\alpha}\varphi_q\left(\sum_{j=n_0}^{\eta-1}h(j)\right)+\sum_{i=n_0+1}^{N+1}\varphi_q\left(\sum_{j=n_0}^{i-1}h(j)\right)\right]<a'\end{aligned}。$$

同理，条件(H₂)保证，存在常数 $c'>d'$，使得

$$A:\overline{P_{c'}}\to\overline{P_{c'}}。\tag{3}$$

由条件(H₂)和(3)式易知，取 $e'=c'$ 即可。

其次证明引理[6]中的条件(i)满足。为了验证条件成立，假设 $u(t)\equiv\frac{b'+d'}{2}$。

注意到 $\phi(u(t))=\phi\left(\frac{b'+d'}{2}\right)=\frac{b'+d'}{2}>b'$，因此 $\{u\in P(\phi,b',d'):\phi(u)>b'\}\ne\varnothing$。

令 $u\in P(\phi,b',d')$，则 $\phi(u)>b'$，因此有 $b'\le\|u\|\le d'$，由引理[4]知，$\frac{w}{N+2}b'\le\frac{w}{N+2}\|u\|\le u(n)\le d'$，

$n\in[w,N+2-w]$，从而 $f(u)>\varphi_p\left(\frac{2b'}{wl}\right)$。

若 $n_0+1\in(0,w]$，则对任意的 $u\in P(\phi,b',d')$，有

$$\begin{aligned}\phi(Au)&=\frac{1}{2}\left(Au(w)+Au(N+2-w)\right)\geq Au(N+2-w)\\&\geq\frac{\beta}{\alpha}\varphi_q\left(\sum_{j=n_0+1}^{\eta-1}h(j)f\left(u(j)\right)\right)+\sum_{i=n_0+1}^{N+1}\varphi_q\left(\sum_{j=n_0+1}^{i-1}h(j)f\left(u(j)\right)\right),\\&\geq\sum_{N+2-w}^{N+1}\varphi_q\left(\sum_{j=n_0+1}^{N+1-w}h(j)f\left(u(j)\right)\right)>\frac{2b'}{wl}w\varphi_q\left(\sum_{j=n_0+1}^{N+1-w}h(j)\right)>b'\end{aligned}$$

若 $n_0+1\in(w,N+2-w)$，则对 $u\in P(\phi,b',d')$，有

$$\begin{aligned}2\phi(Au)&=Au(w)+Au(N+2-w)\\&\geq\sum_{i=0}^{w-1}\varphi_q\left(A_u-\sum_{j=0}^{i-1}h(j)f\left(u(j)\right)\right)+\sum_{i=N+2-w}^{N+1}\varphi_q\left(\sum_{j=0}^{i-1}h(j)f\left(u(j)\right)-A_u\right)\\&\geq\sum_{i=0}^{w-1}\varphi_q\left(\sum_{j=i}^{n_0-1}h(j)f\left(u(j)\right)\right)+\sum_{i=N+2-w}^{N+1}\varphi_q\left(\sum_{j=n_0+1}^{N+1-w}h(j)f\left(u(j)\right)\right)\qquad,\\&>\frac{2b'}{wl}w\left[\varphi_q\left(\sum_{j=w-1}^{n_0-1}h(j)\right)+\varphi_q\left(\sum_{j=n_0+1}^{N+1-w}h(j)\right)\right]>2b'\end{aligned}$$

从而 $\phi(Au)>b'$。

若 $n_0+1\in[N+2-w,N+2]$，则对任意的 $u\in P(\phi,b',d')$，有

$$\begin{aligned}\phi(Au)&=\frac{1}{2}\left(Au(w)+Au(N+2-w)\right)\geq Au(w)\\&\geq\sum_{i=0}^{w-1}\varphi_q\left(\sum_{j=0}^{n_0-1}h(j)f\left(u(j)\right)-\sum_{j=0}^{i-1}h(j)f\left(u(j)\right)\right)\\&=\sum_{i=0}^{w-1}\varphi_q\left(\sum_{j=i}^{n_0-1}h(j)f\left(u(j)\right)\right)\qquad,\\&>\frac{2b'}{wl}w\varphi_q\left(\sum_{j=w-1}^{n_0-1}h(j)f\left(u(j)\right)\right)>b'\end{aligned}$$

因此，对任意的 $u\in P(\phi,b',d')$，有 $\phi(Au)>b'$。

最后验证引理[6]中的条件(iii)成立。设 $u\in P(\phi,b',c')$，且 $\|Au\|>d'$，由条件 $d'\geq\frac{N+2}{w}b'$，知

$$\phi(Au)=Au(w)+Au(N+2-w)\geq\frac{w}{N+2}\|Au\|>\frac{w}{N+2}d'\geq b'。$$

综上所述边值问题(1)和(2)至少存在三个正解 $u_1$，$u_2$，$u_3$ 满足 $0\leq\|u_1\|<a'$，$\phi(u_2)>b'$，$\|u_3\|>a'$，$\phi(u_3)<b'$。

**定理 2**：如果把定理 1 的条件($H_2$)替换成

($H_2'$)：$\limsup\limits_{u\to\infty}<\varphi_p\left(\frac{1}{L_i}\right)$，$i=1,2$。

则定理 1 的结论依然成立。

**证明**：只需证明存在常数 $c'$ 使得 $c' > d'$，$A:\overline{P_{c'}} \to \overline{P_{c'}}$。

由条件($H_2'$)知存在 $M'$，$\varepsilon < \varphi_p\left(\frac{1}{L_i}\right)$ 使得

$$\frac{f(u)}{\varphi_p(u)} \le \varepsilon\text{，}\quad u \ge M'\text{。} \tag{4}$$

令 $G = \max\limits_{u\in[0,M']} f(u)$，由(4)式易得

$$f(u) \le G + \varepsilon\varphi_p(u)\text{，}\quad u \ge 0\text{。} \tag{5}$$

取 $c'$ 满足

$$\varphi_p(c') > \max\left\{\varphi_p(d'), G\left(\varphi_p\left(\frac{1}{L_1} - \varepsilon\right)\right)^{-1}, G\left(\varphi_p\left(\frac{1}{L_2} - \varepsilon\right)\right)^{-1}\right\}\text{。} \tag{6}$$

则对任意的 $u \in \overline{P_{c'}}$，由(5)式和(6)式可得

$$\begin{aligned}
\|Au\| = Au(n_0+1) &= \frac{\beta}{\alpha}\varphi_q\left(A_u - \sum_{j=0}^{\xi-1} h(j) f(u(j))\right) + \sum_{i=0}^{n_0}\varphi_q\left(A_u - \sum_{j=0}^{i-1} h(j) f(u(j))\right) \\
&\le \frac{\beta}{\alpha}\varphi_q\left(\sum_{j=0}^{n_0} h(j) f(u(j)) - \sum_{j=0}^{\xi-1} h(j) f(u(j))\right) + \sum_{i=0}^{n_0}\varphi_q\left(\sum_{j=0}^{n_0} h(j) f(u(j)) - \sum_{j=0}^{i-1} h(j) f(u(j))\right) \\
&\le \frac{\beta}{\alpha}\varphi_q\left(\sum_{j=\xi}^{n_0} h(j) f(u(j))\right) + \sum_{i=0}^{n_0}\varphi_q\left(\sum_{j=i}^{n_0} h(j) f(u(j))\right) \\
&\le \frac{\beta}{\alpha}\varphi_q\left(\sum_{j=\xi}^{n_0} h(j)\left(G + \varepsilon\phi_p(u)\right)\right) + \sum_{i=0}^{n_0}\varphi_q\left(\sum_{j=i}^{n_0} h(j)\left(G + \varepsilon\phi_p(u)\right)\right) \\
&\le \varphi_q\left(G + \varepsilon\varphi_p(c')\right)L_1 < L_1\varphi_q\left(\varphi_p(c')\left(\phi_p\left(\frac{1}{L_1}\right) - \varepsilon\right) + \varepsilon\varphi_p(c')\right) \le c'
\end{aligned}\text{，}$$

及

$$\begin{aligned}
\|Au\| &= Au(n_0+1) \\
&= \frac{\delta}{\gamma}\varphi_q\left(\sum_{j=0}^{\eta-1} h(j) f(u(j)) - A_u\right) + \sum_{i=n_0+1}^{N+1}\varphi_q\left(\sum_{j=0}^{i-1} h(j) f(u(j)) - A_u\right) \\
&\le \frac{\delta}{\gamma}\varphi_q\left(\sum_{j=n_0}^{\eta-1} h(j) f(u(j))\right) + \sum_{i=n_0+1}^{N+1}\varphi_q\left(\sum_{j=n_0}^{i-1} h(j) f(u(j))\right) \\
&\le L_2\varphi_q\left(\varphi_p(c')\left(\varphi_p\left(\frac{1}{L_2}\right) - \varepsilon\right) + \varepsilon\varphi_p(c')\right) \le c'
\end{aligned}\text{。}$$

由上面的证明可知 $A:\overline{P_{c'}} \to \overline{P_{c'}}$。定理证毕。

**定理 3**：假设存在常数满足

$0 < a_1' < \frac{w}{N+2}b_1' < b_1' < \frac{N+2}{w}b_1' \le d_1' < a_2' < \frac{w}{N+2}b_2' < b_2' < \frac{N+2}{w}b_2' \le d_2' < \cdots < a_n'$，$n \in N$ 使得

($H_4$)：$f(u) < \varphi_p\left(\frac{a_i'}{L_j}\right)$，$j = 1, 2$，$0 \le u \le a_i'$；

$(H_5)$：$f(u) > \varphi_p\left(\frac{2b_i'}{wl}\right)$，$\frac{w}{N+2}b_i' \le u \le d_i'$。

则边值问题(1)和(2)至少存在 $2n-1$ 个正解。

**证明**：当 $n = 1$ 时，由条件$(H_4)$可知 $A$：$\overline{P_{a_1'}} \to \overline{P_{a_1'}} \subset \overline{P_{a_1'}}$，根据 Schauder 不动点定理可知 $A$ 至少有一个不动点，即问题至少存在一个正解。

当 $n = 2$ 时，取 $c' = a_2'$，则定理 1 条件满足，从而至少存在三个不同正解。

以此类推，用归纳法可知问题至少存在 $2n-1$ 个正解。

## 致　谢

作者感谢编辑和审稿人给予的指导和帮助。

## 基金项目

济南大学泉城学院科研项目(18JDQYKY17)。

## 参考文献

[1] 刘克盼, 杨赟瑞, 周永辉. 一类四阶四点边值问题的三个正解[J]. 兰州交通大学学报, 2018, 37(1): 107-112.

[2] 张亚静, 郝江浩. 一个非齐次临界 Neumann 问题的多正解[J]. 数学物理学报, 2013, 33A(4): 661-672.

[3] 赵爱祥, 李胜瑞. 一类二阶离散 $m$ 点边值问题正解的存在性[J]. 贵州大学学报, 2012, 29(3): 3-5.

[4] Zhang, M., Sun, S.R. and Han, Z.L. (2012) Positive Solutions for Discrete Sturm-Liouville-Like Four-Point $p$-Laplacian Boundary Value Problems. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **35**, 303-314.

[5] 张萌, 李秋萍, 孙书荣. 离散具 $p$-Laplace 算子 Sturm-Liouville 型边值问题正解的存在性[J]. 滨州学报, 2012, 28(6): 7-12.

[6] Leggett, R.W. and Williams, L.R. (1979) Multiple Positive Fixed Points of Nonlinear Operators on Ordered Banach Spaces. *Indiana University Mathematics Journal*, **28**, 673-688. https://doi.org/10.1512/iumj.1979.28.28046